

無限群を基本群としてもつ3次元 多様体の位相同形問題について

北大 教養 小林一章

§0. 序論. 無限群を基本群としてもつコンパクト3次元多様体の位相同形問題については Waldhausen([W]) が orientable, sufficiently large, irreducible という条件の下で, 又 Heil ([H]) が non-orientable の場合 sufficiently large, P^2 -irreducible という条件の下で解決している。ここで sufficiently large という条件はコンパクト3次元多様体 M が 2-sided incompressible surface を含むという事であるが, これは $H_1(M)$ が無限群か又は $\pi_1(M) = (A *_C B)$ (free product with amalgamation) とかけるという事とも同値である。そして無限群を基本群としてもつが sufficiently large でない3次元多様体が存在する([E-J])。そこでこの論文では無限群を基本群にもつ orientable, コンパクト, 3次元閉多様体の位相同形問題を考える。

§1. α を多様体の中の閉曲線とするとき, $\langle \alpha \rangle$ は α を含

ホモロジー類, $[\alpha]$ は α を含むホモトピー類とする。

Lemma 1. M, N : closed, orientable, irreducible, 3-manifolds, $\pi_1(N) \neq \{1\}$, α を N の中の単純閉曲線で $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$ なるものとする。 $f: M \rightarrow N$ をホモトピー同値写像で α に横断的なものとする。 $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ としたとき, もし $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\} \subset \mathring{B}^3$, $\partial B^3 \cap f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ なる 3-ball B^3 が M にあれば次の 1) ~ 3) を満足するホモトピー同値写像 $f_1: M \rightarrow N$ が存在する。

1) $f_1 \simeq f$ (ホモトピーック) 2) f_1 は α に横断的

3) $f_1^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\alpha) - \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\}$.

証明. B^3 を上の条件のような M の中の 3-ball とする。
 $f(B^3) \subset N$ と仮定してよい。先ず写像 $f_1: M - \mathring{B}^3 \rightarrow N$ を $f_1 = f|_{M - \mathring{B}^3}$ と定義する。すると $f_1(\partial B^3) \cap \alpha = \emptyset$ として $\pi_2(N - \alpha) = 0$. 何故ならもし $\pi_2(N - \alpha) \neq 0$ なら Sphere Theorem によって $\pi_2(N - \alpha)$ の 0 でない元を表現する埋め込み $\phi: S^2 \rightarrow N - \alpha$ がある。 $\pi_2(N) = 0$ だから $\phi(S^2)$ は N の中で contractible 3-manifold C を bound する ([L]).
 もし $C \cap \alpha \neq \emptyset$ なら $\pi_1(N)$ で $[\alpha] = 1$ となり α の条件に反する。
 そこで $C \cap \alpha = \emptyset$ だが $\partial C \cap \alpha = \phi(S^2) \cap \alpha = \emptyset$ より $C \subset N - \alpha$ となり, これは $\phi(S^2)$ が $\pi_2(N - \alpha)$ の 0 でない元を表現している事に矛盾, 故に $\pi_2(N - \alpha) = 0$. 次に β を $N - \alpha$ の中の単純

閉曲線 γ で $[\gamma] \neq 1 \in \pi_1(N)$ 且 $\gamma - f(B^3) \neq \emptyset$ なるものとする。
 $\pi_2(N - \alpha) = 0$ と $[\gamma] \neq 1 \in \pi_1(N - \alpha)$ を使うと上と同様の議論
 によって $\pi_2(N - (\alpha \cup \gamma)) = 0$ が示せる。そこで f_1 を $f_1(B^3) \subset$
 $N - (\alpha \cup \gamma)$ になるように B^3 上に拡大する。すると $f_1^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$
 $= \{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}\}$ である。又 f_1 と f は B^3 上でのみ異なる。

(1) もし $\pi_1(N)$ が無限群なら N は aspherical space ([Sc])
 によって $\pi_3(N) = 0$ であり $f_1 \simeq f$ となる。

(2) もし $\pi_1(N)$ が有限群なら $\Sigma^3 = f(B^3) \cup_{\partial f} f_1(B^3)$ とおき
 $F: S^3 \rightarrow N$ を $F(S^3) = \Sigma^3$ なる写像とする。 $\gamma - f(B^3) \neq \emptyset$
 $\gamma \cap f_1(B^3) = \emptyset$ だから $\alpha \notin F(S^3)$ なる点 $\alpha \in N$ がある。

$p: \tilde{N} \rightarrow N$ を universal covering, $\tilde{F}: S^3 \rightarrow \tilde{N}$ を F の
 lifting とすると $\tilde{N}$ はホモトピー-3-sphere ([Sc]) で $\tilde{F}(S^3)$
 $\subset \tilde{N} - \{y\}$ ($y \in p^{-1}(\alpha)$)。それ故 $\tilde{F}(S^3) \simeq 0$ in $\tilde{N}$ 。従って
 $F(S^3) \simeq 0$ in N 。そこで $f_1 \simeq f$ 。そして $f_1(M) \cap \alpha \subset f(M)$
 $\cap \alpha$ だから f_1 は α に横断的である。』

Lemma 2. M, N, α, f は Lemma 1 と同じとする。ある
 次の 1), 2) を満足するホモトピー-同値写像 $f_1: M \rightarrow N$ が存
 在する。 1) $f_1 \simeq f$ 2) $M_0 = M - \bigcup (f_1^{-1}(\alpha), M)$ は又 irre-
 ducible。

証明) f_1 を Lemma 1 で得られた写像とする。 Σ^2 を M_0 に

埋め込まれた 2-sphere とする。 M は irreducible だから
 $\partial B^3 = \Sigma^2$ となる 3-ball B^3 が M にある。 $\Sigma^2 \cap f_1^{-1}(\alpha) = \emptyset$ だから
 $B^3 \subset M_0$ 。 又は B^3 はいくつかの α_i を含む。 しかし f_1 の条件によ
 って B^3 に含まれる α_i は存在しない。 したがって M_0 は irreduc
 ible である』

Lemma 3. M, N : closed, orientable 3-manifolds

$\pi_1(N) \neq \{1\}$, $\pi_2(N) = \{0\}$, $f: M \rightarrow N$ をホモトピー同値写像
 とする。 $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$ であるような N の中の単純閉曲線 α
 に対して次の (1), (2) を満足する写像 $g: M \rightarrow N$ がある。

(1) $g \simeq f$. (2) g は α に横断的で $g^{-1}(\alpha)$ は連結。

証明. f は α に横断的であると仮定してよい。 従って $f^{-1}(\alpha)$
 $= \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ は単純閉曲線の和集合。 f はホモトピー同値
 写像であって $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$ だから $f^{-1}(\alpha)$ の一つの成分, (例
 えば α_1) で $f|_{\alpha_1}: \alpha_1 \rightarrow \alpha$ が上への写像になっているものがある。
 $f(e_1) = f(e_2)$ となるような点 $e_1 \in \alpha_1$, $e_2 \in \alpha_2$ を選ぶ。 f
 がホモトピー同値写像だから e_1 と e_2 を結ぶ M の中の単純曲線
 β_2 で次の (3), (4), (5) を満足するものが取れる。 (3) $\beta_2 \cap \bigcup_{j=1}^n \alpha_j =$
 $\emptyset$ (4) $\beta_2 \cap \bigcup_{j=1}^n \alpha_j = \{e_1, e_2\}$ (5) N で $f(\beta_2) \simeq 0$ (5) $f|_{\beta_2}$ が埋め込み。
 更に $N - \alpha$ で $f(\beta_2) \simeq 0$ としてよい。 これはもし必要なら f を
 ホモトピーの範囲で変形する事により可能である。 $U_2 = U(\beta_2,$

M), $V_i = U(f(\beta_i), N)$ を N の正則近傍とする。 $\partial U_i \cap \alpha_1 = \{C_{i1}, C_{i2}\}$, $\partial U_i \cap \alpha_2 = \{C_{i1}, C_{i2}\}$ とする。 C_{i1} と C_{i1} 又は C_{i2} とを U_i の中の simple unknotted arc γ_{i1} で結び C_{i2} と C_{i1} 又は C_{i2} とを U_i の中の simple unknotted arc γ_{i2} で結び。 ただし結び方は $(\alpha_1 - (\alpha_1 \cap U_i)) \cup (\alpha_2 - (\alpha_2 \cap U_i)) \cup \gamma_{i1} \cup \gamma_{i2}$ が α_1, α_2 の向きから導入された向きをもつ単純閉曲線になるように取る。 今 C_{i1}, C_{i2} は各々 C_{i1}, C_{i2} と結ばれたと仮定する。 C_{ij} と C_{ij} ($j=1,2$) を次の (6), (7) を満足するように ∂U_i 上の単純閉曲線 δ_{ij} ($j=1,2$) で結び。 (6) $\delta_{i1} \cap \delta_{i2} = \emptyset$ (7) $\gamma_{ij} \cup \delta_{ij}$ ($j=1,2$) は U_i に埋め込まれた 2-ball B_j^2 ($j=1,2$) を bound し $B_1^2 \cap B_2^2 = \emptyset$. 次に写像 $g_i: M \rightarrow N$ を定義する。 先ず $g_i: M - U_i \rightarrow N$ を $g_i = f|_{M - U_i}$ と定義し $g_i(\gamma_{ij}) = \begin{cases} \alpha \cap V_i & \text{もし } g(\partial \gamma_{ij}) = f(\partial \gamma_{ij}) = 2 \text{ 葉} \\ f(\partial \gamma_{ij}) & \text{もし } g(\partial \gamma_{ij}) = f(\partial \gamma_{ij}) = 1 \text{ 葉} \end{cases}$ と定義する。 すると $g_i(\gamma_{ij} \cup \delta_{ij})$ は U_i の中の閉曲線である。
 $N - \alpha$ で $f(\beta_i) \simeq 0$ であり $g(\gamma_{ij} \cup \delta_{ij}) \simeq f(\beta_i)$ in V_i , しかもそのホモトピーは $N - \alpha$ で作れるから $g(\gamma_{ij} \cup \delta_{ij}) \simeq 0$ in $N - \alpha$ ($j=1,2$) である。 従って g_i を $g_i(B_j^2) \subset N - \alpha$ ($j=1,2$) となるように $B_1^2 \cup B_2^2$ 上に拡大出来る。 次に $U_i - (B_1^2 \cup B_2^2)$ は 3-ball であり Lemma 1 の証明と同様にして $\pi_2(N - \alpha) = 0$ であるから g_i を $g_i(U_i - (B_1^2 \cup B_2^2)) \subset N - \alpha$ となるように $U_i - (B_1^2 \cup B_2^2)$ 上に拡大出来る。 g_i と f は U_i 上でのみ異なるから, もし $\pi_1(N)$ が無限群な

ら N は aspherical manifold に なり 従って $g_i \simeq f$. 又 もし $\pi_1(N)$ が 0 で ない 有限群 である なら 実 $x \in N$ を $x \notin V_i \cup g_i(U_i)$ なる よう に とる。これは $\alpha - (V_i \cup g_i(U_i)) \neq \emptyset$ だから 可能 である。
 $p: \tilde{N} \rightarrow N$ を universal covering とし $\Sigma^3 \subset \tilde{N}$ を $f(U_i) \cup g_i(U_i)$ の lifting とする。 $\tilde{N}$ は ホモトピー 3 次元 球面 ([Sc]) で $\Sigma^3 \subset \tilde{N} - \{y\}$ ($y \in p^{-1}(x)$) だから $\Sigma^3 \simeq 0$ in $\tilde{N} - \{y\}$. そこで $\tilde{N}$ で $\Sigma^3 \simeq 0$. 従って N で $f(U_i) \cup g_i(U_i) \simeq 0$. 故に $g_i \simeq f$.
 そして $g_i^{-1}(\alpha)$ の 連結成分 の 数は $f^{-1}(\alpha)$ の それ より も 1 つ 少なく なっている。この事を 全ての $i=1, 2, \dots, n$ に 対して 行なうと 求める 写像 g を 得る。』

Lemma 4. N を $\pi_2(N)=0$ である ような closed, orientable 3-manifold とし, α を N の 中の 単純 閉曲線 とする。 m を $\partial U(\alpha) = \partial U(\alpha, N)$ の meridian とする。もし N が 種数が 正 である ような 2-sided, incompressible surface を 含まない なら 任意の $t \neq 0$ に 対し $H_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ で $\gamma_{\#}(t \langle m \rangle) \neq 0$. ここで $\gamma: \partial U(\alpha) \rightarrow N - \mathring{U}(\alpha)$ は 包含 写像 である。

証明. もし ある $t \neq 0$ に 対し $\gamma_{\#}(t \langle m \rangle) = 0$ なら $\langle \phi(\partial F') \rangle = \gamma_{\#}(t \langle m \rangle)$ となる ような proper embedding $\phi: (F', \partial F') \rightarrow (N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ がある。 $\phi(\partial F')$ は $\partial U(\alpha)$ 上の 1-spheres の 和集合 で 各 1-sphere は $\partial U(\alpha)$ 上で m に isotopic である とし

てよい。そこで $\phi(\partial F')$ は $U(\alpha)$ で 2-balls D_i^2 ($i=1, 2, \dots, p$) を bound する。 $F = \phi(F') \cup \bigcup_{i=1}^p D_i^2$ とおく。 F は N の中の 2-sided orientable surface. もし F が incompressible でないなら ([H3. 6.1]) を使って F を surgery し F を incompressible surface F_1 に変える。すると F_1 は surgery trace によって N で F に homologous であり N に埋める条件より F_1 は 2-spheres の和集合、そして F_1 と α との交叉数 $= t \neq 0$ 。これは $\pi_2(N) = 0$ に矛盾、従って任意の $t \neq 0$ に対し $H_1(N - U(\alpha))$ で $\gamma_{\#}(t \langle m \rangle) \neq 0$ 。

Lemma 5. ([Sc]) M を $\pi_2(M) = 0$ なるコンパクトな次元多様体とする。もし $\pi_1(M)$ が無限群なら torsion free である。

Lemma 6. M を irreducible 3-manifold とし、 S を M の中の連結部分集合で M の中のどんな 3-ball にも含まれないものとする。すると $M - S$ の各連結成分は irreducible である。

証明. Σ^2 を $M - S$ のある連結成分に埋め込まれた 2-sphere であるとする。 M が irreducible だから $\partial B^3 = \Sigma^2$ となる 3-ball B^3 が M の中にある。 S は B^3 の中に含まれなく $\Sigma^2 \subset M - S$ ということより B^3 は Σ^2 が含まれる $M - S$ の連結成分に含まれる。従ってその連結成分は irreducible。

Lemma 7. N は $\pi_2(N)=0$ であるような closed, orientable 3-manifold で更に種数が正である 2-sided, incompressible surface を含まないとする。 α を $\pi_1(N)$ で $[\alpha]$ が infinite order をもつような N の中の単純閉曲線とする。すると $\partial U(\alpha) = \partial U(\alpha, N)$ は $N - \mathring{U}(\alpha)$ で incompressible.

証明. Dehn's Lemma と Loop Theorem によって

$\gamma_*: \pi_1(\partial U(\alpha)) \rightarrow \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ が injective である事を示せばよい。 Lemma 4 と $[\alpha]$ が infinite order をもつ事より

$$\pi_1(\partial U(\alpha)) \xrightarrow{\cong} H_1(\partial U(\alpha)) \quad \text{任意の } s, t (\neq 0) \text{ に対し}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_* \downarrow & \downarrow \gamma_{\#} & \gamma_*([m]^s) \neq 1, \gamma_*([l]^t) \neq 1 \\ \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha)) & \rightarrow H_1(N - \mathring{U}(\alpha)) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \omega_* \downarrow & & \text{ここで } m, l \text{ は } \partial U(\alpha) \text{ 上のある指定された meridian と} \\ \pi_1(N) & & \text{longitude. } \alpha \text{ ではない適當} \end{array}$$

な s, t に対し $\gamma_*([m]^s[l]^t) = 1$ とすると $1 = \omega_*\gamma_*([m]^s[l]^t) = \omega_*([l]^t)$ これは $[\alpha]$ が $\pi_1(N)$ で infinite order をもつ事に矛盾。故に γ_* は injective.

Lemma 8. M, N を closed, orientable 3-manifolds とし $\pi_1(N) \neq 1, \pi_2(N)=0$ とする。 α を N の中の単純閉曲線で $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(N)$ なるものとする。 $f: M \rightarrow N$ を α に横断的なホモトピー同値写像とすると次の (1), (2) を満足する α に横断

的な写像 $g: M \rightarrow N$ がある。 (1) $g \simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha)$ の任意の連結成分 γ に対し $g_*([\gamma]) = [\alpha]$ 。

証明. $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ ($\alpha_i \cong S^1$) とする。もし $f_*([\alpha_i]) = [\alpha]^t$ ($|t| > 1$) なら $f(e_1) = f(e_2)$ となる α_i の点 e_1, e_2 をとる。 f_* が同形だから e_1 と e_2 を結ぶ M の単純閉曲線 γ で N の中で $f(\gamma) \simeq 0$ となるものがある。 γ は $\gamma \cap f^{-1}(\alpha) = \partial \gamma \cap f^{-1}(\alpha) = e_1 \cup e_2$ となっているとしてよい。 lemma 3 の証明と同じ方法によって次の (3), (4) を満足する写像 $f_1: M \rightarrow N$ を得る
 (3) $f_1 \simeq f$ (4) $f_1^{-1}(\alpha) = \alpha_{11} \cup \alpha_{12} \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n$ で $f_{1*}([\alpha_{11}]) = [\alpha]^{t_1}$, $f_{1*}([\alpha_{12}]) = [\alpha]^{t_2}$, $t = t_1 + t_2$, $t_1, t_2 \neq 0$ として α_{11}, α_{12} は lemma 3 の証明にある surgery と同じ方法により α_1 から得られたもの。又もし $f_*([\alpha_i]) = 1$ なら α_i を $f_*([\alpha_i]) = [\alpha]^t$ ($t \neq 0$) なる $f^{-1}(\alpha)$ の成分 α_j に lemma を使って連結する。又もし $f_*([\alpha_i]) = [\alpha]^{-1}$ なら α_i の向きを逆にする。このような操作を全ての α_i に対し行なう事により求める写像 g を得る。

Lemma 9. M, N, α, f を lemma 8 と同じものとする。すると次の (1), (2) を満足するホモトピー同値 $g: M \rightarrow N$ がある。 (1) $g \simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha) = \gamma$ は連結で $g_*([\gamma]) = [\alpha]$ 。

証明. $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ とする。 lemma 3 と lemma 8 を

使うことにより全ての i に対し $f_*([\alpha_i]) = [\alpha]$ となっていると仮定してよい。 γ_2 を α_1 と α_2 を結ぶ M の中の単純曲線であって次の (3), (4) を満足するものとする。 (3) $\gamma_2 \cap \bigcup_{i=1}^n \alpha_i = \partial \gamma_2 \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2) = \partial \gamma_2$ (4) $f(\gamma_2)$ は閉曲線であって $N - \alpha$ 上で $f(\gamma_2) \simeq 0$. すると f_* が同形だから M で $\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1} \gamma_2^{-1} \simeq 0$. 従って $\phi(\partial D^2) = \alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1} \gamma_2^{-1}$ となるような写像 $\phi: D^2 \rightarrow M$ がある。 $\phi(D^2)$ を利用して α_1, α_2 を変形する事により次の (5), (6), (7) を満足する写像 $f_1: M \rightarrow N$ を作る。 (5) $f_1 \simeq f$ (6) $f_1^{-1}(\alpha) = \alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3 \cup \dots \cup \alpha_n$ (7) 次の (a), (b), (c) を満足する写像 $\phi_1: D^2 \rightarrow M$ が存在する。

$$(a) \phi_1(\partial D^2) = \alpha'_1 \gamma_2 \alpha'_2^{-1} \gamma_2^{-1}$$

$$(b) \phi_1(D^2) \cap (\alpha_3 \cup \dots \cup \alpha_n) = \emptyset$$

$$(c) \phi_1^{-1}(\gamma) \subset \partial D^2 \cap S_2(\phi_1) \text{ 且 } S(\phi_1) - \phi_1^{-1}(\gamma) \subset \mathring{D}^2.$$

ここで $S(\phi_1) = \mathcal{Q}\{x \in D^2 \mid \# \phi_1^{-1} \phi_1(x) > 1\}$, $S_2(\phi_1) = \{x \in D^2 \mid \# \phi_1^{-1} \phi_1(x) = 2\}$ である。 Dehn's Lemma を使って ϕ_1 を $S(\phi_2) = \phi_2^{-1}(\gamma) \subset \partial D^2$ となるような写像 $\phi_2: D^2 \rightarrow M$ に変える。 従って次のような埋め込み $\phi_3: S^1 \times I \rightarrow M$ があるとしてよい。

$$(8) \phi_3(S^1 \times \{0\}) = \alpha'_1, \phi_3(S^1 \times \{1\}) = \alpha'_2$$

$$(9) \phi_3(S^1 \times I) \cap f_1^{-1}(\alpha) = \phi_3(S^1 \times I) \cap (\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3 \cup \dots \cup \alpha_n) = \alpha'_1 \cup \alpha'_2.$$

又 $f_{1*}([\alpha_i]) = [\alpha]$ と f_1 が α に transversal ([R & S]) という事より ([H3. 13.1]) を使って $f_1|_{U(\alpha_i)}: U(\alpha_i) \rightarrow U(\alpha)$ は

位相同形であると仮定してよい。 $P = U(\phi_3(S^1 \times I), M)$ とおくと $P \cong S^1 \times D^2$. ここで $\psi(S^1 \times D^2) = P$, $\psi(S^1 \times \{0\}) = \alpha'$ なる埋め込み $\psi: S^1 \times D^2 \rightarrow M$ をとる (ここで $\{0\}$ は D^2 の中心). 写像 $g_1: M - P \rightarrow N$ を $g_1 = f|_{M-P}$ と定義し $g_1\psi(S^1 \times \{0\}) = \alpha$, $g_1\psi_*([S^1 \times \{0\}]) = [\alpha]$ と定義する。 $g_1\psi(p \times D^2)$ を $g_1\psi(p \times (D^2 - \{0\})) \subset N - \alpha$ となるように定義する。ただし $\psi(p \times D^2) \cap \alpha$ となるようにしておく。 $U(p) = U(p, S^1)$ において g_1 を $U(p) \times D^2$ 迄拡大. このとき $g_1(U(p) \times (D^2 - \{0\})) \subset N - \alpha$ と出来る。今 ω を D^2 の中心と ∂D^2 の点とを結ぶ線分で $\psi(\omega) \cap \alpha$ なるものとする。 $f_1\psi(\alpha'_1 \gamma_2 \alpha'_2{}^{-1} \gamma_2{}^{-1}) \simeq 0$ in $N - \alpha$ と $f_1|_{U(\alpha_i)}: U(\alpha_i) \rightarrow U(\alpha)$ が位相同形より $N - \alpha$ で $g_1\phi(\partial((S^1 - \dot{U}(p)) \times \omega)) \simeq 0$. 従って $g_1\phi((S^1 - \dot{U}(p)) \times \omega) \subset N - \alpha$ となるように g_1 を拡大出来る。 $Q = (S^1 \times D^2) - (U(p) \cup (S^1 - \dot{U}(p)) \times \omega)$ は open 3-ball で $\pi_2(N - \alpha) = 0$ だから $g_1(Q) \subset N - \alpha$ となるように g_1 を拡大出来る。従って我々は次をみたす map $g_1: M \rightarrow N$ を得た事になる。(10) $g_1 \simeq f$ (11) $g_1^{-1}(\alpha) = \alpha'_1 \cup \alpha'_3 \cup \dots \cup \alpha'_n$ (12) $g_{1*}([\alpha'_i]) = g_{1*}([\alpha'_i]) = [\alpha]$ ($i=3, 4, \dots, n$). この操作を繰り返していくと求める g が得られる。

Lemma 10. M, N, α, f は lemma 9 と同じとする。
 $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ とおく。ただし $f_*([\alpha_i]) = [\alpha]$. 今 $[\alpha_1]$ に

よって生成される部分群 $gp(\{[\alpha_i]\}, \pi_1(M))$ に対応する M の covering space $\tilde{M}$ が $S^1 \times R^2$ に位相同形で α_1 の $\tilde{M}$ への lifting $\tilde{\alpha}_1$ が $\tilde{\alpha}_1 = S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times R^2$ となっていると次のような写像 $g: M \rightarrow N$ がある. (1) $g \simeq f$ (2) $g^{-1}(\alpha) = \alpha_1$ で $g_*([\alpha_1]) = [\alpha]$.

証明. lemma 9 の証明において f を g_1 に変形したとき $g_1^{-1}(\alpha) = \alpha'_1 \cup \alpha_3 \cup \dots \cup \alpha_n$ ではなく $g_1^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \alpha_3 \cup \dots \cup \alpha_n$ と変形出来ればよい。そのためには lemma 9 の証明で $\phi(D^2)$ を利用して f から f_1 を作るとき α_1 と α_2 の両方を変えずに α_2 のみを変えて作ればよい。 $\tilde{\alpha}_i$ を α_i の $\tilde{M}$ への lifting ($i=1, 2$) とする。すると $\tilde{\alpha}_1 \simeq \tilde{\alpha}_2$ in $\tilde{M}$. 今 $U_0 = U(\tilde{\alpha}_1, \tilde{M}) = U(S^1 \times \{0\}, S^1 \times R^2)$ を $\tilde{\alpha}_1$ の小さな近傍で $U_0 \cap \tilde{\alpha}_2 = \emptyset$ なるものとする。すると $[\tilde{\alpha}_2] = [m_0]^a [l_0] \in \pi_1(\tilde{M} - U_0)$ ($a \in \mathbb{Z}$)。従って $\phi: S^1 \times I \rightarrow \tilde{M}$ を $\phi(S^1 \times \{0\}) = \tilde{\alpha}_1$, $\phi(S^1 \times \{1\}) = \tilde{\alpha}_2$ とする $\tilde{\alpha}_1$ と $\tilde{\alpha}_2$ との間のホモトピーとすると $S(\phi) \cap S^1 \times \{0\} = \emptyset$ と出来る。そこで $S(\phi) = \{x \in S^1 \times I \mid \# \phi^{-1}(\phi(x)) > 1\}$ 従って α_2 のみを変えて lemma 9 の f_1 が作れる。』

Proposition 1. M, N を closed, orientable, irreducible 3-manifolds としそれらの基本群は無限群であるとする。 $f: M \rightarrow N$ をホモトピー同値写像とし α を $\pi_1(N)$ で $[\alpha] \neq 1$ なる N の中の単純閉曲線とする。すると次の (1), (2), (3) を満

足する写像 $g: M \rightarrow N$ がある。(1) $g \simeq f$ (2) $g|_{g^{-1}(U(\alpha))}: g^{-1}(U(\alpha)) \rightarrow U(\alpha)$ は位相同形写像 (3) $(g|M - g^{-1}(U(\alpha)))_*: \pi_1(M - g^{-1}(U(\alpha))) \rightarrow \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ は surjective homomorphism. ここで $U(\alpha) = U(\alpha, N)$ は α の N における正則近傍.

証明. N が正の種数をもつ 2-sided, incompressible surface を含むなら N は sufficiently large. 従って結果は Waldhausen ([W]) から得られる。そこで N はそのような曲面を含まないとする。 f は α に横断的であると仮定してよい ([R&S]). Lemma 9 によって次の (4), (5) を満足する写像 $g_0: M \rightarrow N$ がある。(4) $g_0 \simeq f$ (5) $g_0^{-1}(\alpha) = \beta$ は連結で $\pi_1(N)$ で $g_{0*}([3]) = [\alpha]$. g_0 は α に横断的だから $g_{0\#}: H_1(\partial U(\beta)) \rightarrow H_1(\partial U(\alpha))$ は同形である ([R&S]). すると ([H3, 13.1]) によって次の (6), (7) を満足する写像 $g: M \rightarrow N$ がある。(6) $g \simeq g_0$ (7) $g|_{U(\beta)}: U(\beta) \rightarrow U(\alpha)$ は位相同形写像. さて $g_{1*} = (g|M - \mathring{U}(\beta))_*: \pi_1(M - \mathring{U}(\beta)) \rightarrow \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha))$ が surjective である事を示す。対 $(M - \mathring{U}(\beta), \partial U(\beta))$, $(N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ のホモトピー完全系列より

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow \pi_1(\partial U(\beta)) & \longrightarrow & \pi_1(M - \mathring{U}(\beta)) & \longrightarrow & \pi_1(M - \mathring{U}(\beta), \partial U(\beta)) & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow g_{2*} & & \downarrow g_{1*} & & \downarrow g_{3*} & \\
 0 \longrightarrow \pi_1(\partial U(\alpha)) & \longrightarrow & \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha)) & \longrightarrow & \pi_1(N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha)) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

を得る。ここで $g_i (i=1, 2, 3)$ は全て g の適当な制限写像であ

り, $\partial U(\alpha), \partial U(\beta)$ が lemma 7 より 各々 $N - \mathring{U}(\alpha), M - \mathring{U}(\beta)$ で incompressible だから i_α, i_β は injective である。そして上の議論によって g_{2*} は同形である。 γ を $N - \mathring{U}(\alpha)$ の中の単純曲線で $\pi_1(N - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ の 0 でない元を表現しているものとする。と, $\partial U(\beta)$ を固定したまゝ $g'_3 \simeq g|_{M - \mathring{U}(\beta)}$ となり且つ γ に横断的な写像 $g'_3: M - \mathring{U}(\beta) \rightarrow N - \mathring{U}(\alpha)$ がある。 $\partial g'_3 = g'_3|_{\partial U(\beta)}$ は位相同形だから $g'^{-1}_3(\gamma)$ の component δ で $\pi_1(M - \mathring{U}(\beta), \partial U(\beta))$ で $[\delta] \neq 1$ なるものがある。従って g_{3*} は surjective 故に g_{1*} は surjective 故に g は求める写像である。

Proposition 2. M, N を closed, orientable, irreducible 3-manifolds とし $\pi_1(N)$ は無限群とする。 $\pi_1(M), \pi_1(N)$ で各々 $[\alpha] \neq 1, [\beta] \neq 1$ なるような M, N の中の単純閉曲線 α, β とホモトピー-同値写像 $h: M \rightarrow N$ があって次の (1), (2), (3) を満足するとする。(1) $h^{-1}(\beta) = \alpha$ (2) $h_*([\alpha]) = [\beta]$ (3) $(h|_{M - \mathring{U}(\alpha)})_*: \pi_1(M - \mathring{U}(\alpha)) \rightarrow \pi_1(N - \mathring{U}(\beta))$ は同形。すると h にホモトピックな位相同形写像 $\tilde{h}: M \rightarrow N$ がある。

注. Proposition 1 によって上の性質 (3) 以外の性質を満足する単純閉曲線 α, β とホモトピー-同値 $h: M \rightarrow N$ は常に存在する。

証明. $M_0 = M - \mathring{U}(\alpha), N_0 = N - \mathring{U}(\beta), h_0 = h|_{M - \mathring{U}(\alpha)}$ とおく

すると Proposition 1 と ([H3. 13. 1]) より次の (4), (5), (6) を満足するホモトピー $g_t: M \rightarrow N$ ($0 \leq t \leq 1$) がある. (4) $g_0 = h$
 (5) $g_t(M - \dot{U}(\alpha)) = N - \dot{U}(\beta)$, $g_t(U(\alpha)) = U(\beta)$ (6) $g_1|_{U(\alpha)}: U(\alpha) \rightarrow U(\beta)$ は位相同形写像. そこで $(g_1|_{M - \dot{U}(\alpha)}) \simeq h_0$. 従って $g_1|_{M - \dot{U}(\alpha)}: M - \dot{U}(\alpha) \rightarrow N - \dot{U}(\beta)$ は $g_1|_{U(\alpha)}$ が位相同形写像であるようなホモトピー同値. M_0, N_0 は lemma 6 によって irreducible で $N_0 \cong S^1 \times S^1$ だから ([H3. 6. 6., 6. 7]) より N_0 は sufficiently large. そこで ([W]) より $U(\alpha)$ 上では g_1 と一致し $g_1|_{M - \dot{U}(\alpha)}$ にホモトピックな位相同形写像

$g_2: M - \dot{U}(\alpha) \rightarrow N - \dot{U}(\beta)$ がある. そこで

$$h = \begin{cases} g_1 & \text{on } U(\alpha) \\ g_2 & \text{on } M - \dot{U}(\alpha) \end{cases} \quad \text{と定義すればよい.}$$

』

定義. M を closed, connected 3-manifold で基本群が無限群であるようなものとする. $g \in \pi_1(M)$ によって生成される部分群 $\langle g \rangle, \pi_1(M)$ に対応する M の被覆空間 $\tilde{M}$ が $S^1 \times \mathbb{R}^2$ に位相同形のとき $\pi_1(M)$ は $(*)$ -条件を満足するといひ, 上の g を $(*)$ -類といひ.

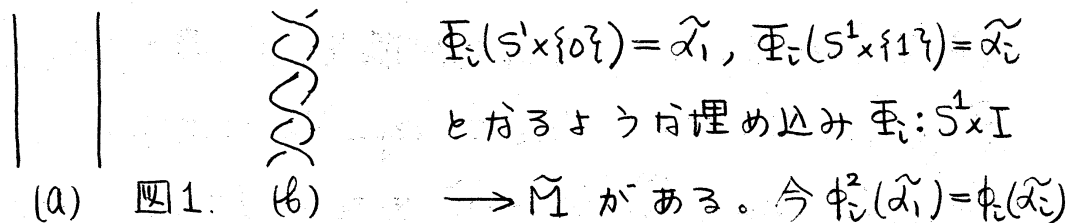
定理 1. M, N を closed, connected, orientable, irreducible 3-manifolds とし $\pi_1(M), \pi_1(N)$ は $(*)$ -条件を満足

する無限群とする。もし $f_*(g_M) = g_N$ なるホモトピー同値写像 $f: M \rightarrow N$ があれば f にホモトピーな位相同形写像 $h: M \rightarrow N$ がある。

証明。Proposition 2 の条件を満足する M, N の中の単純閉曲線 α, β とホモトピー同値写像 $h: M \rightarrow N$ を作ればよい。

$G = gp(\{g_M\}, \pi_1(M))$ とおくと $f_*(G) = gp(\{g_N\}, \pi_1(N))$ である。

$p_1: \tilde{M} \rightarrow M, p_2: \tilde{N} \rightarrow N$ を $G, f_*(G)$ に対応する M, N の被覆空間とする。(★)-条件より $\tilde{M} \cong S^1 \times R^2 \cong \tilde{N}$. $\tilde{f}$ を f の lifting とする。 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を $\tilde{M}, \tilde{N}$ の中の単純閉曲線で $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times R^2 \cong \tilde{M} \cong \tilde{N}$ に対応するものとする。 $p_{1*}: \pi_1(\tilde{M}) \rightarrow \pi_1(M), p_{2*}: \pi_1(\tilde{N}) \rightarrow \pi_1(N)$ は injective で $p_{1*}(\pi_1(\tilde{M})) = G, p_{2*}(\pi_1(\tilde{N})) = f_*(G)$ だから $p_{1*}([\tilde{\alpha}]) = g_M, p_{2*}([\tilde{\beta}]) = g_N$. $\alpha = p_1(\tilde{\alpha}), \beta = p_2(\tilde{\beta})$ を g_M, g_N を表現する単純閉曲線とする。 $p_1^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}_1 \cup \tilde{\alpha}_2 \cup \dots, \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}$ とおくと $\tilde{\alpha} = S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times R^2 = \tilde{M}$ であり各 α_i に対し被覆変換写像 $\phi_i: (\tilde{M}, \tilde{\alpha}_i) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\alpha}_i)$ があるから α_1 と α_i の位置関係は図1の(a)又は(b)になっているとしてよい。従って



$= \tilde{\alpha}_{i+1}, \phi_i^{n+1}(\tilde{\alpha}_1) = \phi_i(\phi_i^n(\tilde{\alpha}_1)) = \tilde{\alpha}_{i+n}$ とおく。もし $\tilde{\alpha}_1$ と $\tilde{\alpha}_i$ が $S^1 \times R^2 \subset R^3$ の中で linking number $L(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_i) = p_i \neq 0$

とすると(即ち図1.(b)のような事が起ったとすると) 此は lemma 5 より infinite order をもつから $L(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i) = p_i$, $L(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = p_i$ より $L(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+n}) = (n+1)p_i$, $L(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+n}) = np_i$ が出る。そこでこの事を繰り返していくと x_1 と x_i の間に張られた annulus $\Xi(S^1 \times I)$ に交わる無限個の単純閉曲線の族, $\tilde{x}_{i+1}, \tilde{x}_{i+2}, \dots, \tilde{x}_{i+n}, \dots$ がある。これは $\Xi_i(S^1 \times I)$ が有限単体的複体である事に矛盾。従って図1(a)のような場合のみが起る。そこで $p_1^{-1}(\alpha)$ の任意の成分 $\tilde{\alpha}_\lambda$ は $\tilde{\alpha}_\lambda = S^1 \times \{p_\lambda\} \subset S^1 \times R^2 = \tilde{M}$ ($p_\lambda \in R^2$, $\lambda \in \Lambda$) という形をしているとしてよい。 $\tilde{N}$ についても同様に $p_2^{-1}(\beta)$ の任意の成分 $\tilde{\beta}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) は $\tilde{\beta}_\lambda = S^1 \times \{q_\lambda\} \subset S^1 \times R^2 = \tilde{N}$ ($q_\lambda \in R^2$) という形をしているとしてよい。次に $f_1 \simeq f$, $f_1(\alpha) = \beta$ を満足する写像 $f_1: M \rightarrow N$ がある。そして lemma 10 によって (1) $f_1 \simeq f$ (2) $f_1^{-1}(\beta) = \alpha$ (3) $\pi_1(N)$ で $f_{1*}([x]) = [\beta]$ を満足する写像 $f_1: M \rightarrow N$ がある。上の条件(2)より $f_1^{-1}(N - \dot{U}(\beta)) = M - \dot{U}(\alpha)$. $M_0 = M - \dot{U}(\alpha)$, $N_0 = N - \dot{U}(\beta)$, $f_0 = f_1|_{M - \dot{U}(\alpha)}$ とおく。 f_{0*} が同形写像である事を証明する(即ち Proposition 2 の条件(3)が満足される事を示す)。先ず Proposition 1 によって f_{0*} は surjective である。

f_{0*} : injective $\tilde{f}_1: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ を f_1 の lifting とすると上の条件(2), (3)より $\tilde{f}_1^{-1}p_2^{-1}(N - \dot{U}(\beta)) = \tilde{M} - p_1^{-1}(\dot{U}(\alpha))$. $f_{1*}([x]) = [\beta]$ で f_1 は α に横断的だから $(\partial f_0)_*([m_\alpha]) = [m_\beta]$, $(\partial f_0)_*([l_\alpha])$

$= [m_\beta] [l_\beta] \quad (a \in \mathbb{Z}) \quad ([R \& S])$ 即ち $(\partial h_0)_*$ は同形である。
 ここで m_α, m_β は各々 $\partial U(\alpha), \partial U(\beta)$ の meridians, l_α, l_β は各々 $\partial U(\alpha), \partial U(\beta)$ のある指定された longitude. ([H3. 13.1])
 を使うと $\partial h_0: \partial U(\alpha) \rightarrow \partial U(\beta)$ は位相同形写像と仮定してよい。
 又 $(\pi(M): G) = (\pi(N): f_*(G))$ だから $\tilde{h}|_{p_1^{-1}(\partial U(\alpha)): p_1^{-1}(\partial U(\alpha))} \rightarrow p_2^{-1}(\partial U(\beta))$ も位相同形と仮定してよい。
 γ を $M - \dot{U}(\alpha)$ の中の単純閉曲線で $M - \dot{U}(\alpha)$ で $\gamma \neq 0$, $N - \dot{U}(\beta)$ で $h_0(\gamma) \simeq 0$ なるものとする。
 $\tilde{\gamma}$ を $p_1^{-1}(\gamma)$ の1つの成分とする。 M で $\gamma \simeq 0$ だから $\tilde{\gamma}$ は $\tilde{M} - p_1^{-1}(U(\alpha))$ で $\tilde{\gamma} \neq 0$ となる単純閉曲線である。
 $\tilde{\gamma}$ はコンパクトだから $p_1^{-1}(\alpha)$ の有限個の成分 $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p$ に対し $\tilde{M} - (U(\tilde{\alpha}_1) \cup \dots \cup U(\tilde{\alpha}_p))$ の中で $\tilde{\gamma} \neq 0$ としてよい。ここで $U(\tilde{\alpha}_i) = U(\tilde{\alpha}_i, \tilde{M})$. $\tilde{h}(\tilde{\alpha}_i) = \tilde{\beta}_i \in p_2^{-1}(\beta)$ とおく。
 $\Phi_i: S^1 \times I \rightarrow \tilde{M}$, $\Psi_i: S^1 \times I \rightarrow \tilde{N}$ ($i=1, 2, \dots, p$) を前述したような次の(4), (5)を満足する埋め込みとする

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \Phi_i(S^1 \times \{0\}) = \tilde{\alpha}_i, \quad \Phi_i(S^1 \times \{1\}) = \tilde{\alpha}_i, \quad \Psi_i(S^1 \times \{0\}) = \tilde{\beta}_i, \\
 & \Psi_i(S^1 \times \{1\}) = \tilde{\beta}_i
 \end{aligned}$$

(5) $\Phi_i(S^1 \times I) \cap \Phi_j(S^1 \times I) = \emptyset$, $\Psi_i(S^1 \times I) \cap \Psi_j(S^1 \times I) = \emptyset$ ($i \neq j$)
 これらの埋め込みは前述したような $\{\tilde{\alpha}_\lambda\}, \{\tilde{\beta}_\lambda\}$ の $\tilde{M}, \tilde{N}$ における位置関係から存在する。 $K = \bigcup_{i=1}^p \Phi_i(S^1 \times I)$, $L = \bigcup_{i=1}^p \Psi_i(S^1 \times I)$ とおく。
 すると包含写像によって

$$\pi(\tilde{M} - \bigcup_{i=1}^p \dot{U}(\tilde{\alpha}_i)) \cong \pi((\bigcup_{i=1}^p \partial U(\tilde{\alpha}_i) \cup K) - (K \cap \bigcup_{i=1}^p \dot{U}(\tilde{\alpha}_i))),$$

$$\begin{aligned}
\pi_1(\tilde{N} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i)) &\cong \pi_1((\bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i) \cup L) - (L \cap \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i))) \\
\text{簡単のために } P &= (\bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\alpha}_i) \cup K) - (K \cap \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\alpha}_i)) \\
Q &= (\bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i) \cup L) - (L \cap \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i)) \text{ とおく.} \\
\pi_1(\tilde{M} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\alpha}_i)) &\xrightarrow{(\tilde{h}|_{\tilde{M} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\alpha}_i)})_*} \pi_1(\tilde{N} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i)) \\
\cong \uparrow & \quad \quad \quad \downarrow \cong \\
\pi_1(P) &\xrightarrow[(\tilde{h}_0)_*]{\cong} \pi_1(Q)
\end{aligned}$$

上の可換図式より $(\tilde{h}|_{\tilde{M} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\alpha}_i)})_*$ は同形. $\therefore \tilde{N} - \bigcup_{i=1}^p \tilde{U}(\tilde{\beta}_i)$ で $\tilde{h}(\tilde{\gamma}) \neq 0$. 従って $\tilde{N} - p_2^{-1}(\tilde{U}(\beta))$ で $\tilde{h}(\tilde{\gamma}) \neq 0$. これは $N - \tilde{U}(\beta)$ で $h_0(\gamma) \cong 0$ という事に矛盾. $\therefore h_{0*}$ は injective. 以上で h_{0*} が同形である事が言えた. 従って Proposition 2 より f はホモトピーック位相同形写像 $M \rightarrow N$ が存在する.

参 照

[E & J] B. Evans and W. Jaco: Varieties of groups and three manifolds, Topology 12 (1973) 83-97

[H] W. Heil: On P^2 -irreducible 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1963) 772-775

[H]₂ ———: Almost sufficiently large Seifert fiber space, Michigan Math. J. 20 (1973) 217-223

[H]₃ J. Hempel: 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86 Princeton Univ. Press.

[L] F. Laudenbach : Topologie de la dimension trois Homotopie et isotopies, Societe Math. de France.
Asterisque 12.

[R&S] C. P. Rowke and B. J. Sanderson : Block bundles II, Transversality. Ann. Math. 87 (1968) 255-277.

[Sc] P. Scott : An introduction to 3-manifolds,
Lecture note #11 Univ. of Maryland.

[W] F. Waldhausen : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. Math. 87 (1968) 56-88.