

FREE SHIFT ON THE REDUCED FREE PRODUCT OF C^* -ALGEBRAS

大阪教育大学 長田 まりゑ (Marie Choda)

C^* -環 又は、von Neumann 環 A が、整数全体 $\mathbb{Z}$ を用いて構成されている時に、 $\mathbb{Z}$ 上の変換 $\alpha: n \rightarrow n+1$ から引き起こされる A の変換を、シフト (shift) と呼ぶ。その代表例は、エルゴード理論で現れるベルヌーイ変換である。その非可換版として、 n 次正方複素行列環の無限テンソル積で与えられる C^* -環 及び von Neumann 環上の、いわゆる非可換ベルヌーイ変換があり、より一般化された非可換ベルヌーイ変換が、Subfactor theory 及び Sector theory、そして エントロピー問題の興味から、取り扱われている。より一層きつい非可換性を有するシフトとして、($\mathbb{Z}$ 個の生成元を持つ自由群の群環に代表される) 自由積環上の 変換が在る。それを、自由変換 (Free shift) と呼ぶ。

ここでは、次の様に定義された C^* -環の制限自由積環上の自由変換について、エントロピーに関する結果の報告をする。

A_0 を unital C^* -algebra とし ϕ_0 を A_0 の state とする。 $i \in \mathbb{Z}$ に対して、 $A_i = A_0$, $\phi_i = \phi_0$ とおく。制限自由積 (reduced free product) $(A, \phi) = (*A_i, *\phi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ は A_i を ϕ_i により 空間 H_i 上へ 標準的に作用させ、 ξ_i をその canonical ベクトルとした時、free product Hilbert space $(H, \xi) = (*H_i, *\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 上の C^* -環として、Arvitour ([A]) と Voiculescu ([V]) により独立に定義された。 A の state ϕ は $\phi(\cdot) = \langle \cdot, \xi \rangle$ により定義されている。

$$\dot{A}_i = \{a \in A_i : \phi_i(a) = 0\}$$

とし、

$$\text{red}(A) = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} : a_{i_j} \in \dot{A}_{i_j}, i_1 \neq \cdots \neq i_n\}$$

と置くと、 $\text{red}(A) \subset \dot{A}$ 且つ $\mathbb{C}1 + \text{linear span } \text{red}(A)$ は A で稠密となり、変換 α は A 上の $\phi \cdot \alpha = \phi$ を満たす自己同型写像 (free shift) α を引き起こす。

この free shift は、非常に強いエルゴード性をもち、 C^* -環のテンソル積や制限自由積との関連で、他に影響を与える。

以下、 A は、制限自由積環 $(A, \phi) = (*A_i, *\phi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ とし、単位元を持つ二つの C^* -環 B と C に対して、 β を B の自己同型写像、 γ を C の自己同型写像とし、 μ を $\mu \cdot \beta = \mu$ を満たす B の state、 ρ を $\rho \cdot \gamma = \rho$ を満たす C の state とする。制限自由積環 $(A * C, \phi * \rho)$ と C とのテンソル積 $(A * C) \otimes B$ を考える。

補題 1 ([CN]).

勝手な β と γ に対して、 $(A * C) \otimes B$ の automorphism $(\alpha * \gamma) \otimes \beta$ は、常に $\mathbb{Z}$ の outer action を与える。

補題 2 ([Ch]).

E_ϕ を $E_\phi(a) = \phi(a)1, (a \in A)$ により定義された A から $\mathbb{C}1$ への conditional expectation とすると、 E_ϕ と B 上の identity map id_B との制限自由積 $(E_\phi * \text{id}_C)$ が定義できて、 $F = (E_\phi * \text{id}_C) \otimes \text{id}_B$ は $(A * C) \otimes B$ から $C \otimes B$ への conditional expectation となる。

定理 3 ([Ch]).

ψ を $(A * C) \otimes B$ の state とするとき、

$$\phi \cdot (\alpha * \gamma) \otimes \beta = \phi$$

である為の必要十分条件は、 $C \otimes B$ 上の $\gamma \otimes \beta$ -不変な state ω が存在して

$$\psi = \omega \cdot F$$

という形式をしていることである。

上の定理は、特に、 $C = \mathbb{C}1$ とした時には、[A : 4.1 Proposition] にあたる。

Connes-Narnhofer-Thirring ([CNT]) は、 γ の ρ に関するエントロピー $h_\rho(\gamma)$ を von Neumann 環のトレース保存 automorphism に対する Connes-Størmer エントロピー $H(\cdot)$ の拡張として、定義した。Sauvageot-Thouvenot は、Connes-Narnhofer-Thirring エントロピーの類似エントロピー $H_\rho(\gamma)$ を定義した。二つの値 $h_\rho(\gamma)$ と $H_\rho(\gamma)$ は C^* -環 C が、nuclear な時に、一致する ([ST])。

Sauvageot-Thouvenot エントロピー $H_\rho(\gamma)$ は、次の様に定義される。

B が可換で、 $C \otimes B$ 上の state ψ が

$$\psi(c \otimes 1) = \rho(c), \quad (c \in C)$$

を充たす時、対 (ψ, B) を (C, ρ) の coupling と呼ぶ。 (C, ρ) の coupling (ψ, B) に対して、

$$\mu(b) = \psi(b \otimes 1), \quad (b \in B)$$

と置くことにより、 B の state μ を得る。 β を B の $\psi \cdot \gamma \otimes \beta = \psi$ を満足する automorphism とする。勿論、 β は $\mu \cdot \beta = \mu$ を充たす。orthogonal projections $\{p_i \in B : 1 \leq i \leq n, \sum_i p_i = 1\}$ から成る B の有限分割 $\mathcal{P}$ に対して、

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n -\mu(p_i) \log \mu(p_i)$$

かつ

$$h'(\psi, \mathcal{P}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} \beta^{-i}(\mathcal{P})\right) - H_\mu(\mathcal{P}) + S(\phi \otimes (\mu|_{\mathcal{P}}), \psi|_{A \otimes P})$$

と置く。ただし、 $S(\cdot, \cdot)$ は states の 双対エントロピー ([PW], [K]) である。その時、Sauvageot-Thouvenot エントロピー は、

$$H_\phi(\alpha) = \sup h'(\psi, \mathcal{P}),$$

として定義される。ただし、 $\sup$ は、全ての couplings (ψ, B) とすべての分割 $\mathcal{P}$ とすべての上の様な automorphisms β を動かして、取られる。

定理 3 を使って、次の定理 4 が得られる。

定理 4 ([Ch]).

勝手な C, γ, ρ に対して、Sauvageot-Thouvenout エントロピーは次の関係式を満たす。

$$H_{\phi * \rho}(\alpha * \gamma) = H_{\rho}(\gamma) = H_{\phi \otimes \rho}(\alpha \otimes \gamma).$$

A, C が nuclear ならば、 $A \otimes C$ は、nuclear であるから、次を得る。

系 5

A, C が nuclear ならば、

$$h_{\phi \otimes \rho}(\alpha \otimes \gamma) = h_{\rho}(\gamma).$$

nuclear 制限自由積環 A の代表例は、Cuntz 環 $\mathcal{O}_{\infty}$ である。

又定理 4 に於いて、特に、 $C = \mathbb{C}1$ とすると、次の結果がでる。

系 6 ([S3, Ch]).

$$H_{\phi}(\alpha) = 0.$$

エントロピーは、エルゴード的な automorphism に対して、意味を持つ不変量である。automorphism γ は、制限 C^* -接合積 $C \rtimes_{\gamma} \mathbb{Z}$ の unitary $u(\gamma)$ を生じ $C \rtimes_{\gamma} \mathbb{Z}$ の automorphism $\text{Ad } u(\gamma)$ を引き起こす。一般に、

$$\text{entropy of } \text{Ad } u(\gamma) \geq \text{entropy of } \gamma$$

である。この等号が成立するか否かという質問が、[S] により提示されている。特に、 γ が測度空間 X 上の測度保存エルゴード変換からくる $L^\infty(X)$ の automorphism の場合には、等号が成立することが、Voiculescu [V] により示された。

ここでは、自由シフト α に対して、この等号が成立すること、及び、定理 4 との関係で、Adu 問題を扱う。

そのために、定理 3 の Adu 版の為に、次の定理 7 を得る。

E を $((A * C) \otimes B) \rtimes_{(\alpha * \gamma) \otimes \beta} \mathbb{Z}$ から $(A * C) \otimes B$ の上への conditional expectation とし、

$$(\widehat{\phi * \rho}) \otimes \mu = (\phi * \rho) \otimes \mu \cdot E$$

と置く。

定理 7 ([CN]).

$((A * C) \otimes B) \rtimes_{(\alpha * \gamma) \otimes \beta} \mathbb{Z}$ から $C^*(C \otimes B, u((\alpha * \gamma) \otimes \beta))$ の上への conditional expectation ϵ で、つぎの条件を満たすものが存在する：

- (1) $(\widehat{\phi * \rho}) \otimes \mu \cdot \epsilon = (\phi * \rho) \otimes \mu$
- (2) $\epsilon(xu) = F(x)u, \quad (x \in (A * C) \otimes B)$
- (3) 任意の $x \in ((A * C) \otimes B) \rtimes \mathbb{Z}$ と $\varepsilon > 0$ に対して或る自然数 p と p 個の自然数 $n_1, \dots, n_p$ が存在して、

$$\|\epsilon(x) - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}^{n_i}(x)\| < \varepsilon$$

を満たす。ただし、

$$\hat{\alpha}(xu((\alpha * \gamma) \otimes \beta)) = ((\alpha * id_C) \otimes id_B)(x)u((\alpha * \gamma) \otimes \beta), \quad x \in (A * C) \otimes B.$$

この結果は、定理 3 の接合積版として接合積上の state を決定する。

定理 4 の接合積版として、次を得る。

定理 8 ([CN]).

$$H_{\widehat{\phi * \rho}}(\text{Ad } u(\alpha * \gamma)) = H_{\widehat{\rho}}(\text{Ad } u(\gamma)) = H_{\widehat{\phi \otimes \rho}}(\text{Ad } u(\alpha \otimes \gamma)).$$

特に、 C を trivial algebra $\mathbb{C}1$ とすると、自由シフトに対して、Størmer の問題の等号が得られる：即ち

$$H_{\phi}(\alpha) = 0 = H_{\widehat{\phi}}(\text{Ad } u(\alpha)).$$

更に、 β を n 点集合の積空間上の Bernoulli shift とし、 A が nuclear だとすると、Connes-Narnhofer-Thirring エントロピー ([CNT]) に対して、

$$h_{\widehat{\phi \otimes \mu}}(\text{Ad } u(\alpha \otimes \beta)) = h_{\widehat{\mu}}(\text{Ad } u(\beta)) = \log n = h_{\mu}(\beta) = h_{\phi \otimes \mu}(\alpha \otimes \beta).$$

REFERENCES

- [A] D. Avitzour: Free products of C^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **271** (1982), 423-435.
- [B] E. Bèdos: On the uniqueness of the traces on some simple C^* -algebras, *J. Operator Theory* **30** (1993), 149-160.
- [Ch] M. Choda : Reduced free products of completely positive maps and entropy for free products of automorphisms, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **32** (1996), 179-190.
- [CN] M. Choda and T. Natume : Reduced C^* -crossed products by free shifts, Preprint, (1996).
- [CS] A. Connes and E. Størmer: Entropy of II_1 von Neumann algebras, *Acta Math.*, **134** (1975), 289-306.
- [CNT] A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring: Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.*, **112** (1987), 691-719.

- [C] J. Cuntz: Simple C^* -algebras generated by isometries, *Commun. Math. Phys.*, **57** (1977), 173-185.
- [K] H. Kosaki : Relative entropy of states: a variational expression, *J. Operator Theory* **16** (1986), 335-348.
- [P] R. Powers : Simplicity of the C^* -algebra associated with the free group on two generators, *Duke Math. J.* **42** (1975), 151-156.
- [PW] W. Pusz and S. Woronowicz : Form convex functions and the WYDL and other inequalities, *Letter Math. Phys.* **2** (1978), 505-512.
- [S1] E. Størmer : Entropy in operator algebras, Preprint, 1992.
- [S2] E. Størmer : Entropy of some automorphisms of the II_1 factor of the free group in infinite number of generators, *Invent. Math.* **110** (1992), 63-73.
- [S3] E. Størmer : States and shifts on infinite free products of C^* -algebras, Preprint, University of Oslo, 1995
- [ST] J-L. Sauvageot and J-P Thouvenot: Une nouvelle définition de l'entropie dynamique des systèmes non commutatifs, *Commun. Math. Phys.* **145** (1992), 411-423.
- [V1] D. Voiculescu: Symmetries of some reduced free product C^* - algebras, *Operator Algebras and Their Connection with Topology and Ergodic Theory (Lecture Notes in Math. 1132)*. Springer Verlag, 1985, 556-588.
- [V2] D. Voiculescu: Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras, *Commun. Math. Phys.* **170** (1995), 249-281.
- [VDN] Voiculescu, D. Dykema, K. and Nica, A. : *Free random variables, (CRM Monograph vol. 1). AMS, 1992*