

球面上の解析汎函数の Fantappié 変換

上智大理工 和田涼子^{*} (Ryoko Wada)

d を 2 以上の自然数とする. $\mathbb{R}^{d+1}$ の単位球面を S で表わす.
 $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ で $(d+1)$ 次元複素射影空間を表わし, (ξ_0, ξ) で
 $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の元の同次座標を表わす ($\xi_0 \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}^{d+1}$). $\mathbb{C}^{d+1}$ の
compact 集合 K について

$$\begin{aligned} {}^*K = \{ (\xi_0, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi_0 + \xi \cdot z \neq 0 \\ \text{for } \forall z \in K \} \end{aligned}$$

とおく. $\mathcal{O}(K)$ を K 上の正則函数の芽の全体とし, $\mathcal{O}'(K)$ で
 $\mathcal{O}(K)$ の dual space を表わす.

$T \in \mathcal{O}'(K)$ について Fantappié 変換 $\Phi_T(\xi_0, \xi)$ は
次式で定義される.

$$\Phi_T(\xi_0, \xi) = \left\langle T_z, \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi \cdot z} \right\rangle \quad ((\xi_0, \xi) \in {}^*K).$$

* 現在 広島大 総合

$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K)$ を $\mathbb{C}K$ 上の正則関数で $\{(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{C}K; \zeta_0 = 0\}$ 上で 0 になるものの全体とする. Martineau [3] は K が compact かつ convex ならば 変換 $\Phi: T \rightarrow \Phi_T$ は $\mathcal{O}(K)$ から $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K)$ への線型位相同型であることを示した.

しかし, S は convex でないので この結果からは $\mathcal{O}(S)$ の Φ による像を決めることはできない. ここでは $\mathcal{O}(S)$ の Φ による像を決めることを目的とする.

§ 1. 準備

d を 2 以上の自然数とする. $z = (z_1, z_2, \dots, z_{d+1})$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j,$$

$$\|z\|^2 = z \cdot \bar{z},$$

$$z^2 = z \cdot z$$

とおく.

$\mathbb{C}^{d+1}$ の開集合 W について $\mathcal{O}(W)$ で W 上の正則関数の空間を表わす. $\mathcal{O}(W)$ には W 上の広義一様収束の位相を入れる.

$\mathbb{C}^{d+1}$ の compact 集合 K について

$$\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{W \supset K} \mathcal{O}(W)$$

とおく (W は K を含む開集合). $\mathcal{O}'(K)$ で $\mathcal{O}(K)$ の dual space を表わす.

$S = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} ; \|x\| = 1\}$ とおき ds を S 上の $\int_S 1 ds = 1$ をみたす $O(d+1)$ -invariant な測度とする. $\|\cdot\|_\infty$ を S 上の sup norm, $H_{n,d}$ を $(d+1)$ 次元 n 次の球面調和函数の全体とする. $P_{n,d}$ で $(d+1)$ 次元 n 次の Legendre 多項式を表わす. (球面調和函数, Legendre 多項式については [6] 参照).

$h \in H_{n,d}$ について $\tilde{h}$ で $\tilde{h}|_S = h$ をみたす $\mathbb{R}^{d+1}$ 上の n 次同次調和多項式 (一意的に決まる) を表わす.

f' が S 上の汎函数であるとき f' の n 次球面調和成分 $S_n(f'; \cdot) \in H_{n,d}$ は次式で定義される:

$$(1.1) \quad S_n(f'; s) = N(n, d) \langle f', P_{n,d}(\cdot, s) \rangle$$

$$(s \in S),$$

ここで

$$(1.2) \quad N(n, d) = \dim H_{n,d}$$

$$= \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n! (d-1)!}.$$

球面調和成分については [5] を参照.

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie norm $L(z)$ および dual Lie norm $L^*(z)$ は次のように定義される:

$$L(z) = \{ \|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2} \}^{1/2},$$

$$\begin{aligned} L^*(z) &= \sup \{ |z \cdot \xi| ; L(\xi) \leq 1 \} \\ &= \left(\frac{\|z\|^2 + |z^2|}{2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の $1/L$ $N(z)$ について

$$B_N(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) < r \} \quad (0 < r \leq \infty)$$

$$B_N[r] = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) \leq r \} \quad (0 \leq r < \infty)$$

とおくと $S \subset B_L[1] \subset B_{L^*}[1]$ である. $\| \cdot \|_N$ は $B_N[1]$ 上の sup norm を表わす.

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ とおき, $\Lambda_+ = \{ (n, k) \in \mathbb{Z}_+^2 ; n \equiv k \pmod{2}, k+1 \leq n \}$ とする. $\forall F \in \mathcal{O}(B_L(r))$ について $S_{n,k}(F:) \in H_{k,d}$ が一意的に存在して

$$(1.3) \quad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z})^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(F: z)$$

という形に展開できる. (1.3) の右辺は $B_L(r)$ 上 広義一様

収束する。 $S_{n,k}(F:)$ は F の (n,k) -成分とよばれる ([4] 参照)。

$\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; z^2 = 1\}$ で $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の複素球面を表わす。 $1 \leq r < \infty$ について

$$\tilde{S}[r] = B_L[r] \cap \tilde{S}$$

とおく。 $S = \tilde{S} \cap \mathbb{R}^{d+1} = \tilde{S}[1]$ である。

$M = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; z^2 = 0\}$, $\Sigma = \{z = x + iy \in M; \|x\| = \|y\| = 1\}$ とおくとき $\Sigma \simeq O(d+1)/O(d-1)$ となり $\int_{\Sigma} 1 \, dz = 1$ をみたす $O(d+1)$ -invariant な測度 dz が一意的に存在する。 次のことがわかっている。

命題 1.1 (cf. [2][6][8]) $f \in H_{n,d}$, $g \in H_{k,d}$ とする。このとき次式が成り立つ。

$$(1.4) \quad \int_S f(s) g(s) \, ds = 0 \quad (\text{if } n \neq k)$$

$$(1.5) \quad \int_S f(s) \overline{g(s)} \, ds$$

$$= \frac{n! \Gamma(\frac{d+1}{2}) N(n,d)}{2^{2n} \Gamma(n + \frac{d+1}{2})} \int_{\Sigma} \tilde{f}(z) \overline{\tilde{g}(z)} \, dz.$$

§ 2. $\mathcal{O}'(\widehat{S}[r])$ の Fantappiè 変換

$\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ を $(d+1)$ 次元複素射影空間とする. (ξ_0, ξ) ($\xi_0 \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}^{d+1}$) で $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の元の同次座標を表わす. $K \subset \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$\begin{aligned} {}^*K = \{ (\xi_0, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi_0 + \xi \cdot z \neq 0 \\ \text{for } \forall z \in K \} \end{aligned}$$

とおく. K が $\mathbb{C}^{d+1}$ の compact 集合のとき *K は $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の開集合になる.

例. $A \subset \mathbb{C}^{d+1}$ と $\{(1, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi \in A\}$ を同一視すると

$$(i) \quad {}^*B_N[r] = B_{N^*}(1/r),$$

$$\text{ここで } N^*(z) = \sup \{ |\xi \cdot z| ; N(z) \leq 1 \}.$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad {}^*S = \{ x + iy \in \mathbb{C}^{d+1} ; \|x\| < 1 \text{ or } \\ \|y\|^2 > \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \} \\ (x, y \in \mathbb{R}^{d+1}) \end{aligned}$$

$(\xi_0, \xi) \in {}^*K$, $T \in \mathcal{O}'(K)$ について Fantappiè indicator

$\Phi_T(\xi_0, \xi)$ は次のように定義される:

$$(2.1) \quad \Phi_T(\xi_0, \xi) = \left\langle T, \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi \cdot z} \right\rangle.$$

次の定理が知られている.

定理 2.1 (Martineau [3] Theorem 5) $K \subset \mathbb{C}^{d+1}$ が convex かつ compact とし $\mathcal{O}_0(\check{K})$ を $\check{K}$ 上で正則で $\{(\xi_0, \xi) \in \check{K}; \xi_0 = 0\}$ で 0 になる函数の全体とすると Fantappiè 変換 $\Phi: T \rightarrow \Phi_T$ は $\mathcal{O}'(K)$ から $\mathcal{O}_0(\check{K})$ への線型位相同型になる.

定理 2.1 と 例 (i) より $\Phi: \mathcal{O}'(B_L[r]) \cong \mathcal{O}(B_{L^*}(1/r))$ が言えるが, $\tilde{S}[r]$ は convex でないので定理 2.1 によって $\mathcal{O}(\tilde{S}[r])$ の Φ による像を決めることはできない. ここでは $\mathcal{O}(\tilde{S}[r])$ の Φ による像について考える.

微分作用素

$$(2.2) \quad \mathcal{P}(D) = \left(2 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) - \Delta_z$$

を考える (ここで $\Delta_z = \sum_{j=1}^{d+1} (\partial/\partial z_j)^2$). $W \subset \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$\mathcal{O}_I(W) = \{ F \in \mathcal{O}(W) : I(D)F = 0 \}$$

とおく. ここで次の定理が成り立つ.

定理 2.2 (cf. [9]) $1 \leq r < \infty$ のとき Fantappiè 変換 $\Phi: \mathcal{T} \rightarrow \Phi_r$ は $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ から $\mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ への線型位相同型である. 特に $r=1$ とおくと

$$\Phi: \mathcal{O}'(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1))$$

である.

定理 2.2 を証明するために 次の補題が必要である.

補題 2.3 $F \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(p))$ ($p > 0$) とし, $S_{n,k}$ を F の (n, k) -成分とする. このとき 次の式が成り立つ.

$$(2.3) \quad S_{n,k} = \frac{n! \Gamma(k + \frac{d+1}{2})}{2^{n-k} k! \Gamma(\frac{n-k}{2} + 1) \Gamma(\frac{n+k+d+1}{2})} S_{k,k}$$

for $(n, k) \in \Lambda_+$,

$$(2.4) \quad \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \|S_{k,k}\|_{\infty}^{1/k} \leq (2p)^{-1}.$$

証明. $F \in \mathcal{O}_T(B_L^*(P))$ より

$$(2 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}) (1 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}) F = \Delta_z F$$

(1.3) より $z \in B_L(P)$ について

$$\text{左辺} = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (n+1)(n+2)(\sqrt{z^2})^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(z)$$

$$\text{右辺} = \sum_{\substack{(n,k) \in \Lambda_+ \\ n > k}} (n-k)(n+k+d-1)(\sqrt{z^2})^{n-k-2} \widetilde{S}_{n,k}(z).$$

(n,k) -成分の一意的性より $0 \leq k \leq n-2$, $n \equiv k \pmod{2}$

について

$$(2.5) \quad (n-1)n \cdot \widetilde{S}_{n-2,k} = (n-k)(n+k+d-1) \widetilde{S}_{n,k}.$$

(2.3) は (2.5) より得られる.

$$F_n(z) = \sum_{\substack{k \equiv n \pmod{2} \\ 0 \leq k \leq n}} (\sqrt{z^2})^{n-k} \widetilde{S}_{n-k}(z)$$

とおくとき [5] Lemma 4.1 より

$$(2.6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|F_n\|_{L^*}^{1/n} \leq 1/p.$$

[8] Lemma 2.5 より $\forall s \in S$ について

$$(2.7) \quad S_{n,n}(s) = N(n,d) \int_S F_n(z) (z \cdot \frac{s}{2})^n dz.$$

$z \in \Sigma$ のとき $L^*(z) = 1$ かつ $\bar{z} \in \Sigma$ だから

$$|\bar{z} \cdot \frac{z}{2}| \leq L^*(\bar{z}) L(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}$$

従って (2.7) より

$$(2.8) \quad \|S_{n,n}\|_{\infty} \leq N(n,d) \left(\frac{1}{2}\right)^n \|F_n\|_{L^*}.$$

(2.6), (2.8) より (2.4) がわかる. (証明終).

定理 2.2 の証明. $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ とする. $\xi \in \tilde{S}[r]$ を固定すると $(1+\xi \cdot z)^{-1} \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ だから $\forall f'(z) = \langle f'_\xi, (1+\xi \cdot z)^{-1} \rangle \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ である. $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \subset \mathcal{O}'(B_L[r])$ だから 定理 2.1 より 又は $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ から $\mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ への中への 1 対 1 線型写像である.

$F \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$, $S_{n,k} = S_{n,k}(F; \cdot)$ とする. $f_n \in H_{n,d}$ を

$$(2.9) \quad f_n = (-2)^n \frac{\Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} S_{n,n}$$

と定義し, $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ とおくと (2.4), (2.9) および [5] Theorem 6.2 より $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ である.

$\forall z \in B_{L^*}(1/r)$ について

$$\begin{aligned}\Phi f'(z) &= \left\langle f'_z, \frac{1}{1+\xi \cdot z} \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f'_z, (-\xi \cdot z)^n \right\rangle.\end{aligned}$$

$z \in M$ のとき $z^2 = 0$ より

$$\begin{aligned}(2.10) \quad \widetilde{S}_{n,n}(\Phi f': z) &= \left\langle f'_z, (-\xi \cdot z)^n \right\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_S f_m(s) (-s \cdot z)^n ds\end{aligned}$$

また $z \in M$ のとき $(s \cdot z)^n \in H_{n,d}$ かつ $\forall s \in S$ について

$$(2.11) \quad \frac{2^n \Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{N(n,d) n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} (s \cdot z)^n = \widetilde{P}_{n,d}(s \cdot z)$$

であるので (2.9) - (2.11) および (1.4) より $\forall z \in M$ について

$$\begin{aligned}(2.12) \quad \widetilde{S}_{n,n}(\Phi f': z) &= \int_S f_n(s) (-s \cdot z)^n ds \\ &= \int_S (-2)^n \frac{\Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} \widehat{S}_{n,n}(s) (-s \cdot z)^n ds \\ &= N(n,d) \int_S S_{n,n}(s) \widehat{P}_{n,d}(s \cdot z) ds \\ &= \widetilde{S}_{n,n}(z).\end{aligned}$$

(1.5) および (2.12) より $\forall s \in S$ について

$$(2.13) \quad S_{n,n}(\Phi f': s) = \widehat{S}_{n,n}(s).$$

$F, \Phi f' \in \mathcal{O}_T(B_{L^*}(1/r))$ だから 補題 2.3 および (2.13) より $\Phi f' = F$. よって Φ は全射である.

定理 2.1 より Φ, Φ^{-1} は連続である. よって Φ は $\mathcal{O}'(\mathcal{S}[r])$ から $\mathcal{O}_T(B_{L^*}(1/r))$ への線型位相同型である. (証明終).

Remark. $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}^{d+1})$ について Fourier-Borel 変換 $\mathcal{T}$ は次の式で定義される:

$$(2.14) \quad \mathcal{T}T(z) = \langle T_\xi, \exp(\xi \cdot z) \rangle \quad (z \in \mathbb{C}^{d+1}).$$

また $0 \leq r < \infty$ なる r について $\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)) = \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); |F(z)| \exp(-r'L^*(z)) < \infty \text{ for } r' > r\}$ とおくと $F \in \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*))$ について Laplace projective transformation $\mathcal{L}$ は 次式で定義される:

$$(2.15) \quad \mathcal{L}F(z) = \int_0^\infty F(-zt) e^{-t} dt \quad (z \in B_{L^*}(1/r)).$$

[3] より $\Phi = \mathcal{L} \circ \mathcal{T}$ が成り立ち, $\text{Exp}_\Delta(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)) = \{F \in \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)); \Delta_z F = F\}$ とおくと [3] [7] および 定理 2.2 から 次の線型位相同型が得られる ($1 \leq r < \infty$):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Exp}_{\Delta}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*)) \\
 \mathbb{I} \downarrow & & \swarrow \sim \\
 \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r)) & & L
 \end{array}$$

References

- [1] L. Drużkowski, Effective formula for the crossnorm in the complexified unitary spaces, *Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat.* 16 (1974), 47-53.
- [2] K. Ii, On a Bergmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions, *Tôhoku Math. J.* 38 (1986), 57-69.
- [3] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. France* 95 (1967), 109-154.
- [4] M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, *Tokyo J. Math.* 3 (1980), 1-35.
- [5] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, *Complex Analysis, Banach Center Publications*, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.
- [6] C. Müller, Spherical Harmonics, *Lecture Notes in Math.* 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [7] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, *Tôhoku Math. J.*, 38 (1986), 417-432.
- [8] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the

differential operators $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math. 10 (1987), 93-105.

- [9] R. Wada, Fantappi  transformations of analytic functionals on the sphere, preprint.