

Seitert fibered space の geometric structure

都立大理 小島 定吉

(Sadayoshi Kojima)

§1 序

5月末に数理研で, orbit space $b\mathbb{S}^2$, exceptional fiber $b\mathbb{S}^3$ の Seitert fibered space に Thurston の意味での geometric structure が入ること示した。ここで geometric structure とは, local に [3] で挙げた geometric space を model とする Riemannian structure である。本稿ではその後の少々の進展を述べたい。Thurston による orbifold はその為の基本的な概念であり, 以降その定義, 基本的な性質等 [2] §13 の内容を記号も含め自由に使う。

§2 5/82

orbifold の $\mathbb{S}^1$ -fibration $E \rightarrow O$ は, Seitert fibration の自然な一般化であり, 又その現代的な表現でも

ある。実際 E が orbitoid として manifold のとき $E \rightarrow O$ は Seiert fibration に他ならず, exceptional fiber は O の elliptic point 上の fiber に対応する。orbitoid O の elliptic point の order p と, この回転 action の lift を定める integer q ($0 \leq q < p$) との pair (p, q) が, E の elliptic point 上の fiber の近傍の orbitoid structure を決める。この pair は従来の Seiert fibration の立場から見れば, Dehn surgical な index (通常の index の dual) と一致する。一言注意しておく, $E \rightarrow O$ が Seiert fibration であること, X_E が Seiert fibred space であることは同値ではない。従来の Seiert fibration を orbitoid としての $\mathcal{S}$ -fibration として記述することは出来るが, fibration が underlying space X_E の構造だけで決まる訳ではないからである。例えば X_E が $\mathbb{S}^3$ に同相で X_O が多角形となる orbitoid としての $\mathcal{S}$ -fibration $E \rightarrow O$ が存在する。この場合 Σ_E は $\mathbb{S}^3$ 内の link であり, 従って E は manifold ではない。

ここでは E に fibration structure を利用して Thurston の意味での geometric structure を与えるのが主題であるが, その為 3 次元 fibred geometry の説明をしよう。まず 2 次元に因りて, 次の 3 つの geometric space が良く知

られている。

$$\begin{cases} \text{Spherical Geometry} & (\mathbb{S}^2, \text{SO}(3)) \\ \text{Euclidean Geometry} & (\mathbb{E}^2, \text{Isom}^+ \mathbb{E}^2) \\ \text{Hyperbolic Geometry} & (\mathbb{H}^2, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \end{cases}$$

任意の2次元 closed 多様体は, その Euler 標数の正負に従い上記のいずれかの structure を持つ。この事実は good な2次元 orbifold に自然に拡張される。即ち, closed good 2-orbifold O は, $\chi(O)$ の正負に従い上記3つのいずれかの structure を持つ。さて3次元 fibered geometry は, いずれかの2次元 geometry $\wedge$ equivariant な projection: $(X, G) \rightarrow (P, K)$ による geometric space (X, G) として定められる。2次元 geometry は3種類あり, それぞれについて自明な fibration 及び非自明な fibration に対応するものの2種類があるので, 合計6種類の fibered geometry が得られるはず。それは [3] p.368 で 1, 2, 4, 5, 6, 7 として述べられた。ただ spherical geometry 1 と euclidean geometry 2 は equivariant な projection を得る為, 変換群を制限しなければならない。制限のしるについては [1] を参照。

ここで5月末の結果を orbifold を用いて定式化する。

定理. $E \rightarrow O$ を orbitoid としての Seibert fibration, $X_0 \approx \mathbb{P}^2$, $\Sigma_0 = \{3\text{ の elliptic points}\}$ とする。このとき E には、次の表に従う与えられた fibration と compatible な fibered geometric structure が入る。

$e(E) \setminus X(0)$	> 0	$= 0$	< 0
$= 0$	$\emptyset$	2	5
$\neq 0$	1	7	6

ここで $e(E)$ は $E \rightarrow O$ の euler number, compatible とは $E = X/\Gamma$ と書いたとき projection $p: (X, G) \rightarrow (P, K)$ が induce する写像: $E = X/\Gamma \rightarrow P/p(\Gamma)$ が $E \rightarrow O$ の $E \rightarrow O$ と一致していることを意味する。

Structure の構成は、3角形による 2次元 geometric space の tiling に因する事実と、Thurston による hyperbolic Dehn surgery の他の geometry の version を用いてなされる。詳しくは [1] を見て戴きたい。

§3 8/82

上の定理は、一般の closed fibered orbitoid $E \rightarrow O$ に対し次の様に拡張されることが確かめられた。O が good な場合は、証明も殆んど同様である。

定理 I. $E \rightarrow O$ を closed fibered orbifold とする.

(A) O が good のとき, E には次の表に従う与えられた fibration に compatible な fibered geometric structure が入る.

$e(E) \setminus \chi(O)$	> 0	$= 0$	< 0
$= 0$	4	2	5
$\neq 0$	1	7	6

(B) O が bad のとき,

(i) $e(E) = 0 \iff E$ が bad

(ii) $e(E) \neq 0 \iff E$ は spherical structure を持つ.

注. (B) (ii) における E の spherical structure は X_E 上の circle action を許容し, この fibered orbifold $E \rightarrow O$ を定めるが, この場合 $\pi_{1, \text{orb}}(E)$ が fibered geometry の変換群からはみ出てしまうので, quotient に geometric structure を induce しない. 実際 O は bad.

更に compact fibered orbifold $E \rightarrow O$ の内部 $\text{int } E = E - \partial E$ に入る geometric structure については次の通り.

定理 II. $E \rightarrow O$ を compact fibered orbitoid で $\partial E \neq \emptyset$ なるものとする

(A) $\chi(O) < 0$ のとき, $\text{int } E$ には与えられた fibration に compatible な有限体積 complete 5, 6 型双方の structure が入る。

(B) $\chi(O) \geq 0$ のとき, $\text{int } E$ には 2, 3, 5, 6, 7, 8 型の complete geometric structure が入り, かつそれは無限体積。

注. (B) で現われる多様体は, solid torus, $T^2 \times I$, Klein bottle との twisted I -bundle であり, すべて geometric decomposition の立場から見ると, closed 多様体を分解したときの piece とはならない特殊なものである。一般に E が fibered geometric structure を持ったとしても, それが fibration を induce するかどうかは分らないが,

定理 III. E が有限体積 fibered geometric structure を持てば, 定理 I (A), 定理 II (A) で述べた fibration を induce する。

spherical 及び euclidean orbitoid は最近研究し尽くされたらしい (Dunbar 等?), 例えば E が spherical が euclidean structure を持ちかつ closed manifold であれば, 定理 I (A) (B) で述べた fibration を induce すること等は古くから知られていた。

系. 双方共 manifold という仮定を落とすと, fibered structure を持たない orbitoid が存在する。

従って fibered orbitoid $E \rightarrow O$ が許容する geometric structure の variation は大体 (manifold については完全に) 記述されたことになる。例えば従来の Seifert fibration が殆んど unique であることから

系. Closed Seifert fibered space の許容する geometric structure の種類は unique (structure は一般に unique ではない)。

が得られる。即ち closed Seifert fibered space が属する geometry は topological invariant ということである。

最後に, Thurston は geometric structure の存在に関する定理を [3] で announce している。しかし細かいこと

については何も言っていないので、本稿の内容がどの程度関連しているか(含まれているか?)は今述べることは出来ない。

References

- [1] Kojima, S.: Geometric structures on simple Seifert fibered spaces. preprint
- [2] Thurston, W.: The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Note, Princeton University (1978)
- [3] Thurston, W.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. (New Series) Amer. Math. Soc., 6, 357-381 (1982)