

Complex analytic singular foliations

北大理 諏訪 立雄 (Tatsuo Suwa)

本論文 [4], [6], [7] の概要である。以下 X を連結な n 次元複素多様体とし, $\mathcal{O}_X, \mathcal{H}_X, \mathcal{Q}_X$ をそれぞれ X 上の正則関数, 正則ベクトル場, 正則 1 形式の芽の層とする。

§1. 複素解析的特異葉層構造.

一般に 連続 $\mathcal{O}_X$ -加群 $\mathcal{F}$ に対し

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \text{ は } \mathcal{O}_{X,x}\text{-自由でない}\}$$

と置く。これは X の解析的集合である。rank $\mathcal{F}$ を局所自由層 $\mathcal{F}|_{X - \text{Sing}(\mathcal{F})}$ の階数として定義する。

まずベクトル場を用いて特異葉層構造を定義する。層 $\mathcal{H}_X$ の連続 $\mathcal{O}_X$ -部分加群 $\mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_X / \mathcal{E}$, $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$ と置く。 $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ は $\text{Sing}(\mathcal{E})$ を部分集合とし包含, 具体的には次のように表わされる。ある座標近傍 U 上の $\mathcal{E}$ の生成元 $v_1, \dots, v_r$ をとり, U 上の局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を用い

$$v_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i=1, \dots, r$$

と表わして置く。

$$U \cap S(E) = \{x \in U \mid \text{rank}(f_{ij}(x)) \text{ が最大である}\}$$

となる。

定義 (1.1). X 上の (1.1) による) 特異葉層構造とは, $\mathcal{O}_X$ の連接部分 $\mathcal{O}_X$ -加群 E で積分可能条件

$$(*) \quad [E_x, E_x] \subset E_x, \quad x \in X - S(E)$$

を満たすもの. E が reduced であるとは, E が $\mathcal{O}_X$ の中で full であり, X の任意の開集合 U に対し

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \cap \Gamma(U - S(E), E) = \Gamma(U, E)$$

であることとする。

注意 (1.2). 1°. $p = \text{rank } E$ であるとする E は $X - S(E)$ 上 p 次元の非特異葉層構造を定義する。

2°. E が reduced なことは $(*)$ は X のすべての点で成り立つ。

次に 1 形式を用いて特異葉層構造を定義する. 層 Ω_X の連接部分 $\mathcal{O}_X$ -加群 F に対し, $\Omega_F = \Omega_X / F$, $S(F) = \text{Sing}(\Omega_F)$ ($\supset \text{Sing}(F)$) とおく. $S(F)$ の具体的表式は (1.1) による α と同様である。

定義 (1.3). X 上の (1 形式による) 特異葉層構造とは, Ω_X の連接部分 $\mathcal{O}_X$ -加群 F で積分可能条件

$$dF_x \subset (\Omega_x \wedge F)_x, \quad x \in X - S(F)$$

をみたすもの。 F が reduced であるとは、 F が Ω_x の中で full であることである。

注意 (1.4). $q = \text{rank } F$ とすると上の F は $X - S(F)$ 上の余次元 q の非特異葉層構造を定義する。

定義 (1.1) と (1.3) は次のように関係する。次元 p の特異葉層構造 E があるとき、 $F \in E$ の annihilator E^a とすると、

なり

$$F_x = \{\omega \in \Omega_{X,x} \mid \langle v, \omega \rangle = 0, \forall v \in E_x\}$$

とすると、 F は余次元 $q = n - p$ の reduced な特異葉層構造で、 $S(F) \subset S(E)$ である。逆に、余次元 q の特異葉層構造 F があるとき、 $E \in F$ の annihilator F^a とすると、 E は次元 $p = n - q$ の reduced な葉層構造で、 $S(E) \subset S(F)$ である。 E は F があるとき、 $(E^a)^a$ は $(F^a)^a \in E$ は F の reduction である。以後 reduced な葉層構造のみを考えるので定義 (1.1) と定義 (1.3) とは同値である。

§2. 特異点集合の構造.

$E \in X$ 上の reduced な p 次元葉層構造とし、 $F = E^a$ とお

＜. X の各点 x に対し

$$E(x) = \{v(x) \mid v \in E_x\}$$

とすると, x は x を含む X の接空間 $T_x X$ の部分空間として空間となる. $0 \leq k \leq p$ なる各整数 k に対し

$$S^{(k)} = \{x \in X \mid \dim E(x) \leq p - k\}$$

とすると, X の解析的集合が得られる.

$$S^{(0)} \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \dots \supset S^{(p)}$$

を得る. $S^{(0)} = X$ で, $S^{(1)} = S(E)$ が E の特異点集合である.

一般に X の解析的集合 S の $x \in S$ に対する tangent cone $C_x S$ を表示する. x が S の regular 点ならば $C_x S = T_x S$ である.

定理 (2.1) (Tangency lemma). $0 \leq k \leq p$ なる任意の k

と $S^{(k)}$ の任意の点 x に対し

$$E(x) \subset C_x S^{(k)}$$

注意 (2.2). $k=1$ での x が $S^{(1)}$ の regular 点 a とき a の定理は P. Baum [2] による証明と一致する.

定理 (2.1) の証明には次の key となる.

補題(2.3). $v \in E_x$ とし, $\{\varphi_t\}$, $\varphi_t = \exp tv$, $t \in \mathbb{R}$ を生成した 1 次元 $\times 4$ 局所変換群とすると

$$(\varphi_t)_* E_x = E_{\varphi_t(x)}$$

が 0 に近くなるにつれて成り立つ。つまり v は E の 1 次元 $\times 4$ 局所自己同型群を生成する。

定理(2.1)は次のように refine できる。

定理(2.4) (Mitra [4]). $0 \leq k \leq p$ なる任意の k に対し, $\mathcal{J}^{(k)} = \{S_\alpha\} \in \mathcal{S}^{(k)}$ の自然な Whitney stratification とすると, 任意の $S_\alpha \in \mathcal{J}^{(k)}$ と $x \in S_\alpha$ に対し

$$E(x) \subset T_x S_\alpha.$$

系(2.5). 各 k に対し, $\mathcal{J}^{(k)}$ は (2.4) と同様とすると, 任意の $S_\alpha \in \mathcal{J}^{(k)}$ に対し E は $S_\alpha - S_\alpha^{(k+1)}$ 上 $p-k$ 次元非特異葉層構造をもちあふ。

系(2.6). X の複素部分多様体の族 $\mathcal{L}$ についてみたすものが存在する。

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, $L_1 \neq L_2$ ならば $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

(b) $X = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$

(c) 任意の $L \in \mathcal{L}$ と $x \in L$ に対し $E(x) = T_x L$.

以上のことを用いると E の局所的構造に關し次が成り立つ
定理 (2.7). (Mitra [4]). $x \in \mathcal{S}^{(k)} - \mathcal{S}^{(k+1)}$ の点と
 し (従って $\dim E(x) = p - k$), $D \in T_x X$ の $E(x)$ に横
 断的な $n - p + k$ 次元小円板とすると, D 上の k 次元特異葉
 層構造 E' ($E'|_0 = 0$) および x の近傍 U が存在し,
 $E|_U$ は U から D への submersion による E' のひきまとい
 うに同型である.

注意 (2.8). $k=1$ かつ x が $\mathcal{S}^{(1)}$ の regular な点の場合, 上の
 定理は P. Baum [2] による.

定理 (2.7) は特異葉層構造の解析的局所自明性に関するものであるが, 位相的局所自明性に関しは次のようなことが考
 えられる. つまり葉層構造は単に一般化をみることも出来る
 表すので, 以下は "third isotopy lemma" は成り立つ
 つかという問題である. X の stratification $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_\alpha\}$
 が次をみたすとき $\mathcal{S}$ を特異葉層構造 E の stratification
 と呼ぶことにする.

(2.9) E は各 $\mathcal{S}_\alpha$ 上非特異葉層構造をひきまにする. つまり

S_α 上には非特異葉層構造が存在し、各 $x \in S_\alpha$ に対し $L \ni x \ni$ 通る葉とすると $E(x) = T_x L$.

E a stratification $S = \{S_\alpha\}$ に対し、次のような regularity 条件が考えられる:

(a_E) $x_0 \in S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$, $\{x_i\}$ が S_β の点列で $x_i \rightarrow x_0$,
 $E(x_i) \rightarrow T$ ならば $E(x_0) \subset T$.

(w_E) X の任意の点 x_0 に対し、 x_0 の近傍 U と定数 C が存在し、 $S_\alpha \cap U$ の任意の点 x と $S_\beta \cap U$ の任意の点 y について
 $d(E(y), E(x)) < C|y-x|$. ここで、 U は適当な複素 $n-1$ 次元空間の開集合とみて、
 $d(E(y), E(x))$ は 2 つの線型部分空間の距離である。

もちろん (w_E) は (a_E) より強く、(a_E) は常に成り立つ。 (w_E)-条件があるとは、各 stratum に対しての局所自相的自明性が出たのではなかろうかと思われる。これに関し、Kabala による余次元 1, 局所葉層構造で特異点集合が非特異の場合の研究がある ([3])。

§3. 特異葉層構造に付随した $\mathcal{D}_X$ -加群

$\mathcal{D}_X$ を X 上の正則関数係数線型微分作用素の芽のなす層とする。 X 上の p -次元特異葉層構造 E に対し、 $\mathcal{D}_X E$ を E で生

成すもの $\mathcal{D}_X$ の左 ideal 層 $\mathcal{L}$, 左 $\mathcal{D}_X$ -加群 $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X E$ を考える. $(\mathcal{D}_k)_{k \geq 0}$ を微分作用素の階数による $\mathcal{D}_X$ の自然な filtration とすると $\mathcal{D}_X E$ は $(\mathcal{D}_X E)_k = \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_X E$ で filter され, $\mathcal{D}_E$ は $(\mathcal{D}_E)_k = \mathcal{D}_k / (\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_X E)$ で filter される. $\mathcal{D}_E$ の特性多様体 $\text{Char } \mathcal{D}_E$ は $\text{gr } \mathcal{D}_X E$ の radical $\sqrt{\text{gr } \mathcal{D}_X E}$ で定義され T^*X の部分解析空間である. $(U, x_1, \dots, x_n) \in X - S(E)$ の E の flat chart とする. すると U は $X - S(E)$ の $(x_1, \dots, x_n)$ を座標とする座標近傍で, $U \perp E$ は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$ で生成されるとする. $\xi_i = \sigma(\frac{\partial}{\partial x_i}) \in \frac{\partial}{\partial x_i}$ を principal symbol とすると, $\text{gr } \mathcal{D}_X E|_{\pi^{-1}U}$ は $\xi_1, \dots, \xi_p$ で生成される. 従って, $\text{Char } \mathcal{D}_E \cap \pi^{-1}(X - S(E))$ は $\pi^{-1}(X - S(E))$ の余次元 p の部分多様体であることが分る.

定義 (3.1). E が regular であるとは, X の各点 x に対し, E_x の生成元 $v_1, \dots, v_r$ で, $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_r)$ が $\text{gr } \mathcal{D}_{X,x}$ の regular sequence となるものが存在すること.

注意 (3.2). 1°. E が regular ならば, E は局所自由で $r=p$.
2°. E が局所自由で $p \leq 2$ ならば E は regular である.

E に属する微分作用素の principal symbol で生成され

る $gr \mathcal{D}_X$ の ideal 層 $\in \sigma(E)$ とし, $V(E) \in \sqrt{\sigma(E)}$ で定義した T^*X の部分解析空間とす。 $V(E) \in E$ の特性多様体と呼ぶことにす。 一般には $gr \mathcal{D}_X E \supset \sigma(E)$ であり $Char \mathcal{D}_E \subset V(E)$ である。

定理 (3.3). E を p -次元 regular 特異葉層構造とすると $gr \mathcal{D}_X E = \sigma(E)$. 従って $Char \mathcal{D}_E = V(E)$ であり T^*X の余次元 p の局所的完全交差。

これを系 (2.6) の通りとす。

$V(E) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} T_X^* L$, $T_X^* L$ は L の conormal 束と表わすので, $\mathcal{L}(E)$ の構造から $V(E)$ の構造が分り, E が regular の場合は $Char \mathcal{D}_E$ の構造も分る。 亦 $Char \mathcal{D}_E$ 又は $V(E)$ 上には $\sqrt{gr \mathcal{D}_X E}$ 又は $\sqrt{\sigma(E)}$ に属する関数の Hamiltonian を与える場により、定義された葉層構造があり, これは X 上の葉層構造 E を lift するものである。

$\mathcal{D}_E$ の解複体 $Sol \mathcal{D}_E = RHom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_E, \mathcal{O}_X)$ について は次の“大域的指数定理”がある。

定理 (3.4). X が compact のとき,

$$\chi(RP(X, \text{Sol } \mathcal{D}_E)) = (-1)^n \int_X \text{cl}(Li^* \mathcal{D}_E) \text{td}(T^*X)$$

ここで左辺は $\text{Sol } \mathcal{D}_E$ の hypercohomology の Euler-Poincaré 指標, $i: X \rightarrow T^*X$ は X の T^*X の 0 section とする埋め込み, Li^* は functor i^* の左導関数 functor である。

特に E が regular なとき, (3.4) の右辺は

$$\int_X \text{td}(\mathcal{H}_E) c_p(E)$$

となる。 $\text{Sol } \mathcal{D}_E$ に関する他の結果については [7] を参照。

$\text{Sol } \mathcal{D}_E$ の局所的性質を調べるのが今後の課題であり, そのためには $S(E)$, $\text{Chor } \mathcal{D}_E$ の構造が必要となる。

References

- [1] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geom. 7 (1972) 279-342.
- [2] P. Baum, Structure of foliation singularities, Adv. in Math., 15 (1975), 361-374.
- [3] A. Kabilia, Formes intégrables à singularités

lisses, Thèse, Université de Dijon 1983.

[4] 三寺芽樹, 複素解析的な媒体上の特異点を持つ葉層構造の構造について, 北海道大学修士論文 1989.

[5] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, Japan. J. Math. 9(1983), 181-206.

[6] T. Suwa, Structure of the singular set of a complex analytic foliation, preprint.

[7] T. Suwa, $\mathcal{D}$ -modules associated to complex analytic singular foliations, preprint.