

同変実射影空間上の標準直線束について

岡山大学大学院自然科学研究科 祁 艶 (Yan, Qi)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 序節

この論文では G は有限群とする. (有限次元の) 実 G -加群 V に対して, $S(V)$ は V の G -不変な内積に関する単位球面を表し, $P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$ を表す. G -空間 M と実 G -加群 V に対して $\varepsilon_M(V)$ は底空間を M , 全空間を $M \times V$ とする直積束と呼ばれる同変ベクトル束を表す. $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}^m$ はそれぞれ自明な G -作用を持つ n -次元ユークリッド空間 (実 G -加群) と m 次元複素ベクトル空間 (複素 G -加群) を表す. $M = P(V)$ のとき, γ_M は M 上の同変標準直線束を表す ([2, § 2] 参照).

以下の定理が成り立つ.

定理 1. G は偶数位数 $2n$ の巡回群で, V は原点以外で自由な G -作用を持つ $2m$ -次元実 G -加群 ($m \geq 1$), $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ のとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ と任意の G -加群 U, W に対して, $\gamma_M^{\oplus k} \oplus \varepsilon_M(U)$ と $\varepsilon_M(W)$ は G -同型ではない.

証明の詳細は論文 [3] を参照されたい.

定理 2. G は奇数位数の巡回群で, V と M は定理 1 と同じ条件を満たすものとする. このとき, 複素 G -ベクトル束 $\gamma_M^{\oplus 2^{m+1}} \otimes \mathbb{C}$ は G -ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{m+1}})$ と G -同型である.

群作用のない場合の結果は [5, p. 252, 定理 6.17] を参照されたい.

2. 定理 2 の証明

この節で定理 2 を m に関する帰納法で証明する.

定理 2 における V を 1-次元複素 G -加群 W_i ($i = 1, \dots, m$) の直和の実化として表そう. $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ であり, 各 W_i は原点以外で自由な G -作用を持つ. また, $S_i = S(\mathbb{R} \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_i)$, $P_i = S_i/\{\pm 1\}$ とおく.

$m = 1$ のとき, $M = P(\mathbb{R} \oplus W_1) = P_1$ となる. 論文 [4] により,

$$\gamma_{P_1}^{\oplus 2^{1+1}} = \gamma_{P_1}^{\oplus 4} \cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \gamma_{P_1}^{\oplus 2^{1+1}} \otimes \mathbb{C} &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C} \\ &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C}) \\ &\cong_G \varepsilon_{P_1}(\mathbb{C}^{2^{1+1}}). \end{aligned}$$

従って $m = 1$ のとき, 定理 2 が成り立つ.

次に, $m = k$ のとき (底空間は P_k である) $\gamma_{P_k}^{\oplus 2^{k+1}} \otimes \mathbb{C} \cong_G \varepsilon_{P_k}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と仮定し, $m = k+1$ のときを考える. $U = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ とおくと, 底空間は $P_{k+1} = S(\mathbb{R} \oplus U \oplus W_{k+1})/\{\pm 1\}$ と表される. ここで

$$Y = (S(\mathbb{R} \oplus U) \times D(W_{k+1})/\{\pm 1\}), Z = (D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W_{k+1})/\{\pm 1\})$$

とおく. 明らかに Y は $S(\mathbb{R} \oplus U)/\{\pm 1\} = P_k$ と G -ホモトピックで, Z は $S(W_{k+1})/\{\pm 1\}$ と G -ホモトピックである. $m = k$ のときの仮定から,

$$(\gamma_{P_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}} \otimes \mathbb{C})|_Y \cong_G \varepsilon_Y(\mathbb{C}^{2^{k+1}}).$$

また, 論文 [4] により, $(\gamma_{P_1}^{\oplus 2})|_Z \cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2)$ であるから,

$$\begin{aligned} (\gamma_{P_1}^{\oplus 2} \otimes \mathbb{C})|_Z &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C} \\ &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}) \\ &\cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{C}^2). \end{aligned}$$

従って,

$$(\gamma_{P_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}} \otimes \mathbb{C})|_Z \cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{C}^{2^{k+1}}).$$

$\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}} = \gamma_{P_{k+1}} \otimes \mathbb{C}$ とおき, $(e_1, \dots, e_{2^{k+1}})$ と $(f_1, \dots, f_{2^{k+1}})$ をそれぞれ $(\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}|_Y)^{\oplus 2^{k+1}}$ 上と $(\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}|_Z)^{\oplus 2^{k+1}}$ 上の標準ユニタリーフレミングとする. この時, $Y \cap Z$ からユニタリー群 $U(2^{k+1})$ への G -同変な行列関数 $A = [a_{ij}]$ が次のようにして定められる.

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} a_{ji}(x) e_j(x) \quad (x \in Y \cap Z, i = 1, \dots, 2^{k+1}).$$

もし, G -写像 A が Z 上に拡張することができるならば, $\gamma_{P_{k+1}\mathbb{C}}^{\oplus 2^{k+1}}$ は自明な複素 G -ベクトル束になる. 以下の (1)-(3) が容易に確かめられる.

- (1) $Y \cap Z$ は Z の境界 ∂Z と等しい.
- (2) A は不変である (ユニタリー群上の G -作用を自明とする).

(3) Z から $U(2^{k+1})$ への G -写像は Z/G から $U(2^{k+1})$ への写像と一対一対応する。よって, $\partial Z/G$ から $U(2^{k+1})$ への写像 A' ($A'([x]) = A(x)$ ($x \in \partial Z$)) が Z/G に拡張できるかどうか鍵となる。さらに, アイレンバーグの定理 (詳細は [1] の第 4 章に記述してある) により, もし, $n+1 \leq \dim P_{k+1} = 2(k+1)$ となるような任意の自然数 n に対して, $H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{k+1})))$ に含まれている A' の障害類 a' が 0 となるならば, 写像 A' は Z/G に拡張する。

対応 $(r, u, w) \rightarrow (r, u \otimes w, w)$ で定義される写像

$$f: D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W_{k+1}) \rightarrow D(\mathbb{R}) \times D(U \otimes W_{k+1}) \times S(W_{k+1})$$

を考察してみよう。明らかに f は同相写像で, $D(U \otimes W_{k+1})$ 上の $\{\pm 1\}$ 作用は自明である。従って

$$\begin{aligned} Z/G &= \frac{D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\} \times G} \\ &= \frac{D(\mathbb{R}) \times D(U \otimes W_{k+1}) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\} \times G} \\ &= \frac{\frac{D(\mathbb{R}) \times S(W_{k+1})}{\{\pm 1\}} \times \frac{D(U \otimes W_{k+1})}{\{\pm 1\}}}{G} \\ &= \frac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G} \end{aligned}$$

である。ここで, M はメビウスの帯を表す。また $\frac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G}$ は底空間が M/G で, ファイバーが $D(U \otimes W_{k+1})$ である k -次元複素ベクトル束の全空間, 従って向き付け可能な $2k$ -次元実ベクトル束の全空間とみなすことができる。更に, G は奇数位数の巡回群なので, M/G もまたメビウスの帯 M' である。Thom の同型定理より,

$$\begin{aligned} &= H^{n+1}\left(\frac{M \times D(U \otimes W_{k+1})}{G}, \frac{\partial(M \times D(U \otimes W_{k+1}))}{G}; \pi_n(U(2^{k+1}))\right) \\ &= H^{n+1-2k}(M', \partial M'; \pi_n(U(2^{k+1}))). \end{aligned}$$

また, 次の事実がよく知られている ([6, p. 207, p. 211] を参照されたい)。もし, $n < 2(2^{k+1} + 1) - 2 = 2^{k+2}$ ならば,

$$\pi_n(U(2^{k+1})) = \pi_n(U) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \mathbb{Z} & (n \text{ は奇数}). \end{cases}$$

明らかに $n+1 \leq \dim P_{k+1} = 2(k+1)$ なので, $n \leq 2k+1 < 2^{k+2}$ となる。ゆえに,

$$H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{k+1}))) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n+1-2k=2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を得る. 写像 A' が拡張できるかどうかは判断できないので次の工夫をする. 次のように定義される写像 $A'^2 : \partial Z/G \rightarrow U(2^{(k+1)+1})$,

$$A'^2([x]) = \begin{pmatrix} A'([x]) & 0 \\ 0 & A'([x]) \end{pmatrix} \quad ([x] \in \partial Z/G)$$

を考える. A' の障害類を a' としよう. このとき $2a'$ は A'^2 の障害類であり, それは $H^{n+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_n(U(2^{(k+1)+1})))$ の元なので, 上の結果により, $2a' = 0$ である. 従って, A'^2 は Z/G 上に拡張する. つまり, $\gamma_{P_{k+1}} \mathbb{C}^{\oplus 2^{(k+1)+1}} \cong_G \varepsilon_{P_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{(k+1)+1}})$ である.

REFERENCES

- [1] Sze-Tsen Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Mathematics VIII, Academic Press, New York and London, 1959.
- [2] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies No.76, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
- [3] Yan Qi, The tangent bundles over equivariant real projective spaces, accepted by Mathematical Journal of Okayama University, Okayama Japan.
- [4] 祁 艶, 同変実射影空間上の同変実ベクトル束について, RIMS Kokyuroku No.1670, 117-125, 2009.
- [5] 戸田 宏, 三村 護, ホモトピー論, 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1975.
- [6] 戸田 宏, 三村 護, リー群の位相 (上), 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1978.

E-mail address: qiyan@math.okayama-u.ac.jp