

半線形発展方程式に応ずる非線形半群について

航空宇宙技研 高橋匡康

本稿では, Banach空間において半線形発展方程式の mild solutions を与える非線形半群の特徴づけ, 積公式及び収束に関する結果を述べる.

§1. 基本的な仮定

X を Banach空間, $p: X \rightarrow [0, \infty]$ を適正な下半連続凸関数とし, $D(p)$ で p の effective domain を表わす. A を X における線形閉作用素, B を X における非線形作用素とし, $C = D(B) \cap D(p)$ とおく. ここでは $A+B$ の形の半線形作用素を考え, 次の形の半線形発展方程式に対する初期値問題を考える:

$$(1) \quad (d/dt)u(t) = (A+B)u(t), \quad t > 0; \quad u(0) = x \in C.$$

線形閉作用素 A に対しては次の条件を仮定する:

(H₁) A は X 上のクラス (C_0) の線形縮小半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の生成作用素である.

次に非線形作用素 B に対する条件であるが、ここでは B の連続性や消散性は汎関数 p に依存するものとし、次の形の条件を仮定する：

(H₂) 各 $\alpha > 0$ に対して $C_\alpha \equiv C \cap \{x \in X; p(x) \leq \alpha\}$ は X の閉凸部分集合である。

(H₃) B は各 C_α 上で連続である。

(H₄) 各 $\alpha > 0$ に対して適当な実数 ω_α を取れば、 $B - \omega_\alpha I$ は C_α 上で消散的 (dissipative) である。

このような設定のもとでは、(1) の $[0, \infty)$ 上の mild solution, すなわち次の積分方程式

$$(2) \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

を満足する $[0, \infty)$ 上の X 値連続関数 u の存在を示すためには、 $p(u(t))$ の評価が必要となる。 $p(u(t))$ を評価するためには、ここでは $[0, \infty)$ 上で連続かつ非減少な非負値関数 g を考え、次の条件を仮定する：

(H₅) 各 $\alpha \geq 0$ に対して、初期値問題

$$w'(t) = g(w(t)), \quad t > 0; \quad w(0) = \alpha$$

の $[0, \infty)$ 上での maximal solution $m_g(\cdot; \alpha)$ が存在する。

注意. 以下の定理は g の非減少性なしでも成立する。

条件 (H₅) のもとでは次が成立する。

補題 1. 条件 (H₅) を仮定する。このとき任意の $\varepsilon > 0$ と $\alpha \geq 0$ に対して初期値問題

$$w'(t) = g(w(t)) + \varepsilon, \quad t > 0; \quad w(0) = \alpha$$

の $[0, \infty)$ 上での maximal solution $m_{g+\varepsilon}(t; \alpha)$ が存在し, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $m_{g+\varepsilon}(\cdot; \alpha)$ は $m_g(\cdot; \alpha)$ に $[0, \infty)$ 上で広義一様収束する。

補題 2. 条件 (H₅) を仮定し, $\varepsilon > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, t > 0$ とする。このとき, $\beta \leq \alpha + t\{g(\alpha) + \varepsilon\}$ ならば $\beta \leq m_{g+\varepsilon}(t; \alpha)$ である。

§ 2. 半群の特徴づけ

定理 1. 条件 (H₁) - (H₅) のもとで次は同値である:

(I) 次の 2 条件を満足する C 上の半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在する。

$$(i) \quad S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)BS(\tau)x d\tau, \quad t \geq 0, x \in C;$$

$$(ii) \quad p(S(t)x) \leq m_g(t; p(x)), \quad t \geq 0, x \in C.$$

(II) 任意の $x \in C$ に対して次を満足する正数より成る null sequence $\{r_n\}$ と C における点列 $\{x_n\}$ が存在する。

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{-1} \|T(h_n)x + h_n Bx - x_n\| = 0;$$

$$(ii) \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} h_n^{-1} (p(x_n) - p(x)) \leq g(p(x)).$$

(III) $\bigcup_{\alpha > 0} \overline{D(A) \cap C_\alpha} = C$ であり, 任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して正数 $\lambda_0 \equiv \lambda_0(\alpha, \varepsilon)$ が存在し, 各 $x \in C_\alpha$ と $\lambda \in (0, \lambda_0)$ に対して次を満足する要素 $x_\lambda \in D(A) \cap C$ が存在する.

$$(i) x_\lambda - \lambda(A+B)x_\lambda = x;$$

$$(ii) p(x_\lambda) \leq p(x) + \lambda\{g(p(x)) + \varepsilon\}.$$

(IV) $\bigcup_{\alpha > 0} \overline{D(A) \cap C_\alpha} = C$ であり, 任意の $x \in C$ に対して次を満足する正数より成る null sequence $\{\lambda_n\}$ と $D(A) \cap C$ における点列 $\{x_n\}$ が存在する.

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \|x_n - \lambda_n(A+B)x_n - x\| = 0;$$

$$(ii) \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \lambda_n^{-1} (p(x_n) - p(x)) \leq g(p(x)).$$

注意 1. (I)-(ii) は各 $x \in C$ に対して $p(S(\cdot)x)$ が Bihari 型の不等式

$$p(S(t)x) \leq p(x) + \int_0^t g(p(S(\tau)x)) d\tau, \quad t \geq 0$$

を満足することと同等である.

注意 2. (I) $\Rightarrow$ (II), (III) $\Rightarrow$ (IV) の証明は容易である。(II) $\Rightarrow$ (I) は補題 2 と Pavel [9], Kenmochi-Takahashi [2] の議論を組み合わせ

せて証明される。(III) $\Rightarrow$ (I) は次の指数公式

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n}(A+B))^{-n} x, \quad t \geq 0, x \in C$$

が成立することを意味する。(IV) $\Rightarrow$ (I) は補題 2 と Kobayashi [3] の議論を用いて証明される。以上の議論では ρ と C の convexity は不要である。

以下では (I) を仮定し, (I) $\Rightarrow$ (III) を証明する。

補題 3 (cf. [4]). $\bigcup_{\alpha > 0} \overline{D(A) \cap C_\alpha} = C$.

証明. $\alpha > 0$ とし $x \in C_\alpha$ とする。各 $t > 0$ に対し $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)x d\tau$ とおくと, (I)-(ii) より十分小なる $t > 0$ に対して $x_t \in C_{\alpha+t}$ である。また,

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)x d\tau + \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \int_0^\tau T(\tau-\sigma)BS(\sigma)x d\sigma \right\} d\tau$$

であるから容易に $x_t \in D(A)$ であることが示せる。 $t \downarrow 0$ のとき $x_t \rightarrow x$ だから補題が証明される。

次に, $\alpha > 0, \varepsilon > 0$ とし $\delta \in (0, 1]$ を次のような数とする:

$$|\xi - \eta| \leq \delta, \quad \xi, \eta \in [0, \alpha+1] \text{ ならば } |g(\xi) - g(\eta)| \leq \varepsilon/2.$$

$\omega = \max \{0, \omega_{\alpha+1}\}$ とし, $\lambda_0 = \min \{1/\omega, \delta/g(\alpha+1) + \varepsilon\}$ とおく。

さて, $x \in C_\alpha, \lambda \in (0, \lambda_0)$ を固定し, $\beta = \rho(x) + \lambda \{g(\rho(x)) + \varepsilon\}$ と

おくと次の補題が成立する。

補題 4. 各 $z \in C_\beta$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx, C_\beta) = 0,$$

但し, $d(\cdot, \cdot)$ は X における距離を表わす。

証明. $z \in C_\beta$ とし, $h_0 \in (0, 1]$ を次のような数とする:

$$h \in (0, h_0] \text{ ならば } m_g(\lambda h; p(z)) \leq p(z) + \lambda h \{g(p(z)) + \varepsilon/2\}.$$

各 $h \in (0, h_0]$ に対して $z_h = (1-h)S(\lambda h)z + hx$ とおくと $z_h \in C$

である。また p は convex だから

$$\begin{aligned} p(z_h) &\leq (1-h)p(S(\lambda h)z) + hp(x) \\ &\leq (1-h)m_g(\lambda h; p(z)) + hp(x) \\ &\leq (1-h)p(z) + h(p(x) + \lambda g(p(z)) + \lambda \varepsilon/2) \\ &\leq (1-h)\beta + h(p(x) + \lambda g(p(x) + \delta) + \lambda \varepsilon/2) \\ &\leq (1-h)\beta + h(p(x) + \lambda g(p(x)) + \lambda \varepsilon) \\ &= \beta \end{aligned}$$

を得る。従って, 各 $h \in (0, h_0]$ に対して $z_h \in C_\beta$ である。さて

$$\begin{aligned} &h^{-1} d(T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx, C_\beta) \\ &\leq h^{-1} \|T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx - z_h\| \\ &\leq h^{-1} \|T(\lambda h)z + \lambda h Bz - S(\lambda h)z\| + \|S(\lambda h)z - z\| \end{aligned}$$

であり, $h \downarrow 0$ のとき, $(\lambda h)^{-1}[S(\lambda h)z - T(\lambda h)z] \rightarrow Bz$,

$S(\lambda h)z \rightarrow z$ だから補題が成立する。

次の補題は (III)-(i), (ii) が成立することを示している.

補題 5. 次を満足する C_β 上の半群 $\{S_\lambda(t); t \geq 0\}$ が存在する.

$$(a) S_\lambda(t)z = T(\lambda t)z + \int_0^t T(\lambda t - \lambda \tau)(\lambda B - I + x)S_\lambda(\tau)z d\tau, \quad t \geq 0, z \in C_\beta;$$

$$(b) \|S_\lambda(t)z - S_\lambda(t)w\| \leq e^{(\lambda\omega - 1)t} \|z - w\|, \quad t \geq 0, z, w \in C_\beta;$$

(c) $S_\lambda(t)$ は共通の不動点 $x_\lambda \in C_\beta$ をもつ, すなわち,

$$0 = \lambda(A+B)x_\lambda - x_\lambda + x$$

を満足する要素 $x_\lambda \in D(A) \cap C_\beta$ が存在する.

証明. 補題 4 は, 定理 1 の (II) が A を λA で, B を $\lambda B - I + x$ (但し, $D(\lambda B - I + x) = C_\beta$) で置きかえ, $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ として成立することを意味する. 従って, (a) が成立する. (b) は Pavel [9] と同様の議論により示される. $\lambda\omega - 1 < 0$ だから, (c) は (b) より導かれる.

§3. 積公式

この節では, 条件 (H₁) - (H₅) に加えて次の条件を考える.

(H₆) 各 $t \geq 0$ と $x \in C$ に対して, $T(t)x \in C$ であり

$$p(T(t)x) \leq p(x) \text{ である.}$$

(H₇) 次を満足する C 上の半群 $\{U(t); t \geq 0\}$ が存在する.

$$(i) U(t)x = x + \int_0^t B U(\tau)x d\tau, \quad t \geq 0, x \in C;$$

$$(ii) p(U(t)x) \leq m_g(t; p(x)), \quad t \geq 0, x \in C.$$

注意1. 条件 (H_6) と (H_7) はそれぞれ次の条件と同値である:

$(H_6)^*$ 各 $\lambda > 0$ と $x \in C$ に対して, $(I - \lambda A)^{-1}x \in C$ であり
 $p((I - \lambda A)^{-1}x) \leq p(x)$ である.

$(H_7)^*$ 任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して正数 $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \varepsilon)$ が存在し,
 各 $x \in C_\alpha$ と $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対して $(I - \lambda B)^{-1}x$ は
 意味をもち次を満足する.

$$p((I - \lambda B)^{-1}x) \leq p(x) + \lambda \{g(p(x)) + \varepsilon\}.$$

注意2. 条件 (H_6) と (H_7) , もしくは条件 $(H_6)^*$ と (H_7) のもと
 では定理1の(IV)が満足される. また, 条件 (H_6) と $(H_7)^*$, もし
 くは条件 $(H_6)^*$ と $(H_7)^*$ のもとでは定理1の(IV)が満足される.

これらの事実により次の結果が得られる.

定理2. 条件 $(H_1) - (H_7)$ を仮定すると定理1の(I)が成立し,
 しかも各 $x \in C$ に対して次の収束が有界な $t \geq 0$ について
 一様に成立する:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [T(\frac{t}{n})U(\frac{t}{n})]^n x = S(t)x, \quad t \geq 0;$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(I - \frac{t}{n}A)^{-1}U(\frac{t}{n})]^n x = S(t)x, \quad t \geq 0;$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [T(\frac{t}{n})(I - \frac{t}{n}B)^{-1}]^n x = S(t)x, \quad t \geq 0;$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(I - \frac{t}{n}A)^{-1}(I - \frac{t}{n}B)^{-1}]^n x = S(t)x, \quad t \geq 0.$$

この定理は、補題2と定理1を考慮すれば、Miyadera-Kobayashi [8]あるいはBrezis-Pazy [1]の方法により証明される。

§4. 半群の収束

各 $d > 0$ に対して $X_d = \{x \in X; p(x) \leq d\}$ とおく。さて、 $\{A_k\}_{k \geq 1}$ を X における線形閉作用素の列、 $\{B_k\}_{k \geq 1}$ を X における非線形作用素の列、 $\{g_k\}_{k \geq 1}$ を $[0, \infty)$ 上で定義された連続かつ非減少な非負値関数の列とし、以下の条件を考える：

(H₁)^{*} 各 A_k は X 上のクラス (C_0) の線形縮小半群 $\{T_k(t); t \geq 0\}$ の生成作用素である。

(H₂)^{*} 各 $k \geq 1$ と $d > 0$ に対して $D(B_k) \cap X_d$ は X の閉凸部分集合である。

(H₃)^{*} 各 $k \geq 1$ と $d > 0$ に対して B_k は $D(B_k) \cap X_d$ 上で連続である。

(H₄)^{*} 各 $k \geq 1$ と $d > 0$ に対して k に依存しない実数 ω_d が存在し、 $B_k - \omega_d I$ は $D(B_k) \cap X_d$ 上で消散的である。

(H₅)^{*} 各 $k \geq 1$ と $d \geq 0$ に対して、初期値問題

$$w'(t) = g_k(w(t)), \quad t > 0; \quad w(0) = d$$

の $[0, \infty)$ 上での maximal solution $m_{g_k}(\cdot; d)$ が存在する。

$\{A_k\}$, $\{B_k\}$ として $\{g_k\}$ はそれぞれ次の意味で A , B として g に収束するものとする。

(H₈) $D(A) \subset \bigcap_{k \geq 1} D(A_k)$ であり, 各 $x \in D(A)$ に対して
 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k x = Ax$ である。

(H₉) $C \subset (\bigcap_{k \geq 1} D(B_k)) \cap D(p)$ であり, 各 $x \in C$ に対して
 $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k x = Bx$ である。

(H₁₀) 各 $\xi \in [0, \infty)$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(\xi) = g(\xi)$ である。

注意. 各 $\varepsilon > 0$ と $d > 0$ に対して, $m_{g_k+\varepsilon}(\cdot; d)$ を初期値問題

$$w'(t) = g_k(w(t)) + \varepsilon, \quad t > 0; \quad w(0) = d$$

の $[0, \infty)$ 上の maximal solution とすると, Schechter [10] の結果に

より, 条件 (H₁₀) のもとでは次が成立する: 各 $d \geq 0$, $t \geq 0$

及び $\varepsilon > 0$ に対して

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} m_{g_k+\varepsilon}(t; d) \leq m_{g+\varepsilon}(t; d).$$

定理 3. 条件 (H₁) – (H₅) を仮定し定理 1 の (I) が成立するものとする。また, 条件 (H₁)^{*} – (H₅)^{*} を仮定し, 各 $k \geq 1$ に対して次を満足する $D(B_k) \cap D(p)$ 上の半群 $\{S_k(t); t \geq 0\}$ が存在するものとする:

$$(i)_k \quad S_k(t)x = T_k(t)x + \int_0^t T_k(t-\tau) B_k S_k(\tau)x d\tau, \quad t \geq 0, \quad x \in D(B_k) \cap D(p);$$

$$(ii)_k \quad p(S_k(t)x) \leq m_{g_k}(t; p(x)), \quad t \geq 0, \quad x \in D(B_k) \cap D(p).$$

このとき, 条件 (H_8) , (H_9) , (H_{10}) のもとでは, 各 $x \in C$ に対して次の収束が有界な $t \geq 0$ について一様に成立する:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t)x = S(t)x, \quad t \geq 0.$$

この定理は, 定理 2 と同様に, Miyadera-Kobayashi [8] あるいは Brezis-Pazy [1] の方法により証明される。

注意. g 及び g_k が非減少関数でない場合は, 条件 (H_{10}) の代わりに次を仮定すれば定理 3 は成立する:

$(H_{10})^*$ $k \rightarrow \infty$ のとき, g_k は g に $[0, \infty)$ 上で広義一様収束する。

参考文献

- [1] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Funct. Anal., 9 (1972), 63-74.
- [2] N. Kenmochi and T. Takahashi, Nonautonomous differential equations in Banach spaces, Nonlinear Analysis TMA, 4 (1980), 1109-1121.

- [3] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27(1975), 640-665.
- [4] Y. Kobayashi, Differentiability of contractive semigroups governed by semi-linear operators, preprint.
- [5] V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. 1., Academic Press, 1969.
- [6] R. H. Martin, Jr., Invariant sets for perturbed semigroups of linear operators, Ann. Mat. Pura Appl., 150(1975), 221-239.
- [7] R. H. Martin, Jr., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley-Interscience, 1976.
- [8] I. Miyadera and Y. Kobayashi, Convergence and approximation of nonlinear semigroups, Japan-France Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis, 1976.
- [9] N. Pavel, Global existence for nonautonomous perturbed differential equations and flow-invariance, Preprint series in Mathematics, No. 22, Bucuresti 1981.
- [10] E. Schechter, One-sided continuous dependence of maximal solutions, J. Differential Equations, 39(1981), 413-425.