

S^2 の identification

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

我々の考察の対象となる 2-sphere S^2 の identification は次の通り定義されるものである。

Def. 1 $P \in \text{polyhedron}$ として, $f: S^2 \rightarrow P$ が S^2 の identification である。

- $\equiv$ (i) f は non-degenerate cont. onto map である。
 (ii) $\exists$ connected 1-polyhedron $G \subset S^2$
 and $\exists$ set of finite pts $V \subset G$

$\Rightarrow$ (1) $\forall$ component X of $S^2 - G$ or $G - V$,
 $f|X: X \rightarrow f(X)$ は homeo.

$$(2) \quad f(S^2 - G) \cap f(G) = \emptyset = f(G - V) \cap f(V)$$

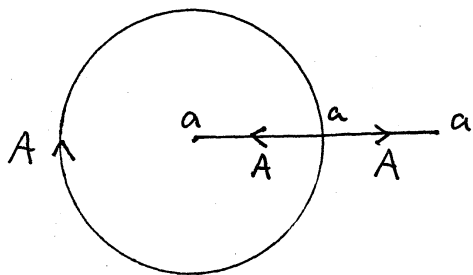
(3) $\forall$ components X, Y of $S^2 - G$ or $G - V$,
 $f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset \Rightarrow f(X) = f(Y)$

(4) $\forall$ component X of $S^2 - G$, $\exists 1$ component X' of $S^2 - G \rightarrow X \cap X' = \emptyset$, $f(X) = f(X')$

S^2 is 3-ball B^3 の boundary と思えば, S^2 の identification f を用いて, 3-polyhedron B^3/f が得られる。

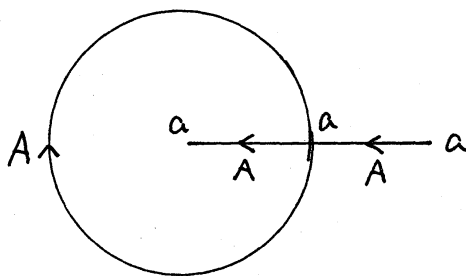
以下では B^3/f が manifold である条件を述べる。

Examples



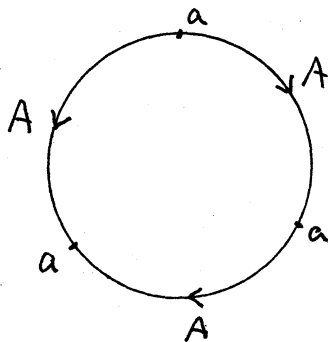
$S^2/f = \text{Dunce hat}$

B^3/f は manifold ではない。



$S^2/f = \text{Dunce hat}$

$B^3/f = S^3$



$S^2/f = \text{Dunce hat}$

B^3/f は manifold ではない。

さて, $\#$ で components の個数を表わす事にして,

$$E(f) = \#(V/f) - \#(G-V/f) + \#(\delta^2 G/f)$$

と置く。

Prop. 1 B^3/f : manifold $\Rightarrow E(f) = 1$

これは良く知られた定理で, Seifert-Threlfall の教科書には必要十分条件として述べてある。ところが, 先の例には $E(f) = 1$ でありながら B^3/f が manifold でないものがある。これは, 我々の identification が彼等のそれと異なっている事を示している。

Def. 2 S^2 の identification $f: S^2 \rightarrow P$ が (*) を満たす。

$$\equiv \begin{cases} (1) & (G, V) \text{ は } 3\text{-regular graph} \\ (2) & \forall a \in V, \quad \#f^{-1}(f(a)) = 4 \\ (3) & \forall e \in \{G-V \text{ の component} \}, \quad \#f^{-1}(f(e)) = 3 \end{cases}$$

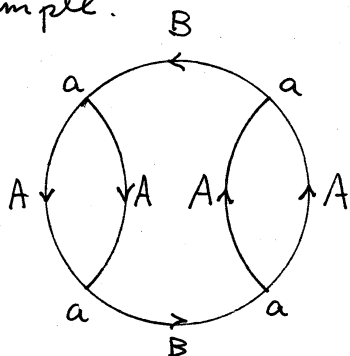
identification with (*) なるものを考える根拠については 数理研講究録 524 --- K.524 を書く --- を参照のこと。

Prop. 2 f : identification with $(*)$
 $\Rightarrow S^2/f$: closed fake surface

Prop. 3 f : identification with (1), (3) of $(*)$
 $\Rightarrow f$: local homeomorphism

Prop. 4 f : identification with $(*) \Rightarrow B^3/f$: manifold

Example.



$$E(f) = 1,$$

(G, V) : 3-regular

$$f^{-1}f(a): 4 \text{ 点}$$

$$f^{-1}f(A): 4 \text{ 本}$$

$$f^{-1}f(B): 2 \text{ 本}$$

Prop. 5 f : identification with (1), (3) of $(*)$

$$E(f) = 1 \Rightarrow f \text{ は } (*) \text{ の (2) を 満たす。}$$

Prop. 6 f : identification with (1), (3) of $(*)$ の時。

$$B^3/f \text{ : manifold} \Leftrightarrow E(f) = 1.$$

Remark. 後の方の Example は非常に嫌味を含んでいる。
図から読み取れる情報, 即ち, 頂点, 辺, 面の identification,
だけからは, map の uniqueness が証明出来ない。特別に
この例については, map の如何を問わぬ B^3/f が manifold
にならない事はすぐ解るのであるが, それで良いとは言えない。
一般的にこの議論をしなければならぬところと頼むしい。
この点については, Seifert-Threlfall の identification の
場合は, 彼等は正確な記述を explicit にしているのので
想像であるが, 定義の段階で除外されているのであろう。

ところが, これで我々が不利になっっている事はないのであ
る。と言うのは, 我々の対象は identification with (*),
言い換えては DS-diagram, である事に注意して,
K.524 の Prop. 9 を思い出して欲しい。これをもっと
精密に言うと,

$$X \sim X' \Leftrightarrow [X] = ABw_X, [X'] = ABw_{X'}$$

となる。DS-diagram 上に AB は 7 度 2 ヶ所に現われ
るから, 図の情報だけで identification map が一意
に定まっている事が証明されるのである。

従って

"DS-diagram を与えると manifold は unique に定まる。"