

Perron - Frobenius 作用素のスペクトル

東大・教養 高橋 陽一郎 (Yoichiro Takahashi)

平田 雅樹 (Masaki Hirata)

§0. 序.

Perron - Frobenius 作用素は、数論的エルゴード理論では、連分数展開に附随した変換の不変測度等の研究も背景として、また、1960年代からは、1次元格子系統計力学における平衡状態に関連して研究されてきた。しかし、その性質は、対称でコンパクトな線型作用素などとは著しく異なった特徴を持つている。

最近では、振動された複素 Perron - Frobenius 作用素がさかんに研究され、区間上の Lasota - Yorke map に対する中心極限定理や局所極限定理を示すのに応用されている。また、1次元統計力学においては、相関関数の減衰の order の評価や、Ruelle - Artin - Mazur ζ -関数の性質を調べるのに用いられている。この小論では、まず Perron - Frobenius 作用素のスペクトルの性質について概観し、最後に、振動された複素

Ruelle 作用素 $L_{u+i(v+tw)}$ (ただし, v は Pollicott の " α -関数")
 の絶対値最大固有値の作る曲線の $t=0$ での曲率がどのように
 になるか計算する。

以下, Lasota-Yorke map の Perron-Frobenius 作用素は,
 Symbolic Dynamics における Ruelle 作用素とパラレルに議論
 できることを考慮して, 以下では, 話を Ruelle 作用素に
 限定して述べることにする。

§1. 定義, 基本的性質.

$(X, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とし, $T: X \rightarrow X$ を m -非特異変換と
 する。つまり, $m(T^{-1}(\cdot))$ が m に関し絶対連続とする。

このとき, T の Perron-Frobenius 作用素 $L: L^1(m) \rightarrow L^1(m)$
 とは次のように定義される:

$$(Lf)(x) := \frac{d}{dm} \int_{T^{-1}(x)} f \, dm, \quad f \in L^1(m).$$

今, 作用素 $U: L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ を $(Uf)(x) := f(Tx)$ と定義
 すれば, L は次のように特徴づけられる:

$$\int g(x)(Lf)(x) m(dx) = \int (Ug)(x)f(x) m(dx) \quad \text{for } \forall g \in L^0(m)$$

Rem. もし, T が高々可算 射影の写像であれば, 次の関係
 を満たすような $j: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する:

$$(Lf)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} j(y) f(y).$$

= のように j を "Jacobian" と呼ぶ。特に X が "区間" であり、 T が "区分的に滑らか" であるならば、 $j(x) = 1/|T'(x)|$ となる。

以下、Perron-Frobenius 作用素の基本的性質をまとめておく。

(i) $f \in L^1(m)$, $Lh = h$ であるならば、 $d\mu := h dm$ は T -不変測度である。

$$\dim \{h \in L^1(m) ; Lh = h\} = \#\{\text{ergodic components}\}$$

(ii) $\text{Spec } L \cap \mathbb{S}^1 = \{\lambda \in \text{Spec } L ; |\lambda| = 1\}$ と書くと、

$$\#(\text{Spec } L \cap \mathbb{S}^1) = \#\{\text{mixing components}\}$$

(iii) $U \in L^\infty(m)$ に制限して考えたもののスペクトル集合を

$$\text{Spec}(U, L^\infty(m)) \text{ と書くと、}$$

$$\text{Spec } L \cap \mathbb{S}^1 = \overline{\text{Spec}(U, L^\infty(m))}$$

(iv) $LU = 1$ を仮定すると、 $LU = \text{id.}$, $UL = T^{-1}B$ は projection.

(v) T が injective であるならば、 $\dim \ker L = \infty$.

(vi) T が surjective である。かつ injective であるならば、 $\{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < 1\}$ は $\text{Spec}(L, L^\infty(m))$ に含まれ、 $|\lambda| < 1$ なる λ は固有値である。その多重度は ∞ 。かつ、Jordan block のサイズ $= \infty$ 。

(Takahashi [T])

(vii) 特に X が区間、 T が Lasota-Yorke map. の場合、 $\text{Spec } L \cap \mathbb{S}^1$ は有限集合であり、1 を含む。また、このとき、

$$BV := \{f \in L^1(m) ; \text{bounded variation}\}$$

とあると、Lasota-Yorke の不等式 ([L]) から、 $L(BV) \subset BV$ とあるのだから、 L は BV に制限して考えよう。

$$\{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < e^{-h(T)}\} \subset \text{Spec}(L, BV)$$

ただし、 $h(T)$ = topological entropy of T . (Keller [K])

以上のように Perron-Frobenius 作用素は、かなり特徴的な性質を持つ。序で述べたように以下、話を Ruelle 作用素に限定するが、上の BV は $\mathbb{Z}$ は配置空間上の Lipschitz 連続関数のなす空間と対応している。

§2. Symbolic Dynamics と Ruelle 作用素

次のように Symbolic Dynamics を考えよう。以下の () 内は 1 次元格子系統計力学としての解釈である。

$J = \{1, \dots, r\}$ 有限集合 (粒子の種類を表わす集合)

$A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ $A_{ij} = 1$ or 0 . irreducible (構造行列)

$\Sigma_A^+ := \{x = (x_i)_{i=0}^\infty \in J^\mathbb{N} ; A x_i x_{i+1} = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\}$ (配置空間)

σ : shift 変換 on Σ_A^+ i.e. $(\sigma x)_i = x_{i+1}$

$0 < \theta < 1$ を任意に固定し、 Σ_A^+ 上に距離 d_θ を次のように定める:

$$d_\theta(x, y) = \theta^n \quad \text{if } x_i = y_i \ i=0, \dots, n-1, \ x_n \neq y_n$$

$\mathcal{F}_\theta := \{d_\theta \text{ に関する } \Sigma_A^+ \text{ 上の Lipschitz 連続関数全体}\}$

今、 $f \in \mathcal{F}_\theta$ の Lipschitz constant を $\|f\|_\theta$ で表わすと、 $\|\cdot\|_\theta = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\theta$

とすれば、 $\mathcal{F}_\theta$ は Banach 空間になる。

さて、 $u \in \mathcal{F}_0$ を Hamiltonian とし、Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u: \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ を次のように定義する:

$$\mathcal{L}_u f(x) := \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} e^{u(y)} f(y).$$

$\mathcal{L}_u$ は Σ_A^+ 上の適当な測度に関して、Perron-Frobenius 作用素の定数倍である。 $\mathcal{L}_u$ については次の Ruelle の結果が基本的である。
定理 (Ruelle)

$\mathcal{L}_u$ は $e^{P(u)}$ ($P(u)$ は topological pressure) と simple な固有値と1をもち、この固有関数は正值である。また $\exists \varepsilon > 0$ が存在して、他の eigenvalue は半径 $(e^{P(u)} - \varepsilon)$ の円板内に含まれる。これは、非負行列に対する Perron-Frobenius の定理の拡張である。

Rem. topological pressure $P(u)$ は次の Gibbs 変分原理を満たす。

$$P(u) = \sup \{ h_g(u) + \int u d\mu_g ; \mu_g \text{ は } \sigma\text{-不変確率測度 on } \Sigma_A^+ \}$$

$$= z''', h_g(u) \text{ は metrical entropy,}$$

特に、 $P(u) = h_g(u) + \int u d\mu_g$ を満たす μ_g は平衡状態と呼ばれる。上の設定の下では、平衡状態は一意的に存在する(つまり相転移がない)ことが知られている。

§3. 複素 Ruelle 作用素の eigenvalue

Wielandt は、ある特別の複素行列に対して、非負行列に対する Perron-Frobenius の定理と同様の事実が成立する =

と示した ([4], p.57) が、M. Pollicott は、Ruelle の定理
 について同様の複素化ができることを示した。 ([P.1])

つまり、8.2 の設定で関数を $\mathbb{C}$ -値とし、Lipschitz 連続関
 数の空間を $\mathcal{F}_0^{\mathbb{C}}$ と書くと、 $u+iv \in \mathcal{F}_0^{\mathbb{C}}$ ($\Leftrightarrow u, v \in \mathcal{F}_0$) に対
 し、複素 Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_{u+iv} : \mathcal{F}_0^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{F}_0^{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{R}$ -値のとき
 と同様に定義できる。つまり、

$$\mathcal{L}_{u+iv} f(x) := \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} e^{u(y)+iv(y)} f(y).$$

このとき次の事実が成立する：

定理 (Pollicott)

$u+iv \in \mathcal{F}_0^{\mathbb{C}}$ について、 $\exists w \in C(\Sigma_A^+)$, $\exists a \in [0, 2\pi)$ s.t.

$$v - a + w \circ \sigma - w \in C(\Sigma_A^+ \rightarrow 2\pi\mathbb{Z}).$$

(このとき v は " a -関数" であるという)

$\Rightarrow e^{ia+P(u)}$ ($P(u)$ は topological pressure) は $\mathcal{L}_{u+iv}$ の
 simple な固有値である。また、 $\exists \varepsilon > 0$ が存在して、他の

スペクトルは半径 $(e^{P(u)} - \varepsilon)$ の円板内に含まれる。 //

(注：実は一般に $\text{Spec}(\mathcal{L}_{u+iv}) = e^{ia} \text{Spec}(\mathcal{L}_u)$ である。)

また、 v が如何なる $a \in [0, 2\pi)$ に対しても a -関数にならな
 いとき、 $\mathcal{L}_{u+iv}$ の全てのスペクトルは半径 $(e^{P(u)} - \varepsilon)$ の円板内
 に含まれることもわかる。

さらに、スペクトルの型について、Pollicott [P.3] は、

Nussbaum の essential spectral radius formula を用いて、次のことを示した。

定理 (Pollicott)

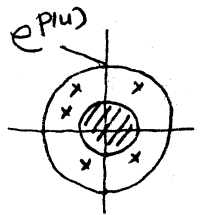
$\mathcal{L}_{u,tiv}$ の スペクトル は 次の 2 つ の 部分 に 分れる :

(i) 円板 $\{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| \leq e^{P(u)}\}$ 内の 全 2 の 点.

(ii) 円環 $\{\lambda \in \mathbb{C} ; e^{P(u)} < |\lambda| \leq e^{P(u)}\}$ 内の 有限個の

有限多重度の孤立した固有値.

//



Rem. Ruelle [Ru] は、上の円環領域内の固有値に対応する

$\mathcal{L}_{u,tiv}^*$ の一般化された固有ベクトル (=これは一般に signed-measure の空間より広い空間 $\mathcal{H}_0^*$ に属する) が、平衡状態の複素化された概念になっていることを示し、"Gibbs-distribution" と呼んでいる。

また、 $\mathcal{L}_{u,tiv}$ ($u, v \in \mathcal{H}_0, t \in \mathbb{R}$) に対し、(必要があれば、 $e^{P(u)}$ に対応する $\mathcal{L}_u$ の固有関数を用いて規格化した)、 $\mathcal{L}_u 1 = 1$ とする。このとき、

$$G[v] := \{(t, a, h) ; \mathcal{L}_{u,tiv} h = e^{ia} h, t, a \in \mathbb{R}, |h| = 1\}$$

とみると、これは群をなし、Morita [M] の分類は、Ruelle 作用素の場合、次のように拡張される。

命題

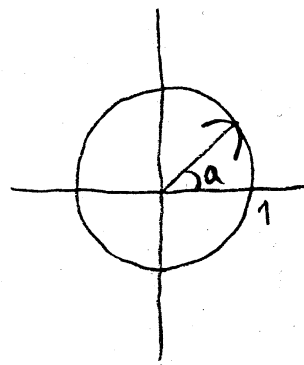
$u \in \mathcal{H}_0$ が $S(u) = 0$ とする。ここで S は Hamiltonian

u に対する平衡状態。また、次の量を定義する：

Pollicott [P.2] は Special flow 上で、上のようは相関関数の減衰の order を Hamiltonian の虚部を摂動した Ruelle-作用素 $\mathcal{L}_{u+iv}$ ($t \in \mathbb{C}$, v は Special flow の天井関数) を用いて評価している。

以上のようは背景から、摂動された複素 Ruelle 作用素の性質、特にその絶対値最大の固有値の挙動について考えることは興味深い。さて、一般に $\mathcal{L}_{u+iv+tw}$ の絶対値最大の固有値 $\lambda(t)$ は simple であれば、ある範囲では t について analytic である。今、 v が A -関数であれば、Pollicott の結果から、 e^{ia} は $\mathcal{L}_{u+iv}$ の simple な絶対値最大の固有値である。さて、 $\mathcal{L}_{u+iv+tw}$ の絶対値

最大の固有値 $\lambda(t)$ は $t=0$ の近傍で、右図のようは曲線を描くことが予想される。そこで、曲線 $\lambda(t)$ の e^{ia} での接し方、つまり曲率を計算してみると、それは、次のようは量であることがわかる。



定理.

$$\text{曲率} = 1 + \frac{\sigma(w)^2}{\rho(w)^2}$$

ここで、 ρ は u に対する平衡状態。 $\sigma(w)^2$ は §3 の命題の中で定義された量である。

Rem. π に現われる量の意味を述べた。 $\{w_0 \sigma^n\}$ を確率変数列と見れば、中心極限定理が成り立つ。 $\rho(w)$, $\sigma(w)$ は、その極限として現われる正規分布の平均と分散である。(つまり、曲率は w には依存しない)。証明は、Perron-Frobenius 作用素の基本的性質と Rousseau-Egele [Ro] の手法を用いて示される。(詳しくは平田 [H])

§ 5. 終わりに

以上、Perron-Frobenius 作用素 B_w 、その摂動された作用素のスペクトルについて述べてきたが、ここで触れたかった重要なテーマとして、Artin-Mazur の ζ -関数 B_w 、Fredholm determinant との関係がある。これらについては、[PR], [P3], [T] 等の文献がある。

References.

- [G]. Gautmacher, F.R. "The Theory of Matrix, vol II" Chelsea, New York, 1974.
- [H]. 平田 雅樹. "複素 Ruelle-Perron-Frobenius 作用素のスペクトル" 東大・相関理化学・修士論文.

- [K] Keller, G. "On the rate of convergence of Equilibrium in 1-dimensional system", *Commun. Math. Phys.* 96, 181-193 (1984)
- [L] Lasota, A. and York, J. "On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations", *Trans. Amer. Soc.* 186, 481-488 (1973)
- [M] Morita, T. "Generalized local limit theorem for Lasota-York transformation", preprint.
- [P.P.] Parry, W. and M. Pollicott "An analogue to the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows." *Annals of Math.* 118, 573-591 (1983).
- [P.1] Pollicott, M. "A complex Ruelle-Perron-Frobenius theorem and two counter examples", *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 4, 135-146 (1984)
- [P.2] ———, "On the rate of mixing of Axiom A flows", *Invent. Math.* 81, 413-426 (1985)
- [P.3] ———, "Meromorphic extensions of generalized zeta functions", *Invent. Math.* 85, 147-164 (1986)
- [Ro] Rousseau-Egele, J. "Un théorème de la limite locale pour classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux", *Annals of Prob.* 11, 772-788 (1983)

- [T] Takahashi, Y. "Fredholm determinant of unimodal linear maps", Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 30, 61-87 (1981),