

Mordell-Weil Lattices と

その応用

立教大学理学部 塩田 徹治

序. Mordell-Weil lattice なる概念は、当初考えていたより はるかに深さとひろがりをもつもののようで、未だに、その全貌を把握したとはいえない状況である。勿論、基礎理論は出来ている ([1], I) し、また、これを、最初に適用した 有理楕円曲面 の場合には かなりのことか分っている ([1], II, [7])。この場合の M.W. lattices は、root lattice E_8 を頂点とする hierarchy を成すものの内には、family, specialization, degeneration, ... といった代数幾何における常とうの手段が、自然に反映される構造となっている。しかし、基礎の体を、任意の体 (たとえば有理数体 $\mathbb{Q}$) によったので、その arithmetic を議論することになると、有理楕円曲面の場合に限っても 相当豊かな内容があり、 $E_8, E_7, E_6, \dots$ 等の各論も、十分面白い理論と応用がある。

たとえば、 E_8 については、

(i) " E_8 型" 代数方程式論. (cf. [2]), 後述.

(ii) M.W. rank = 8 なる $\mathbb{Q}(t)$ 上の楕円曲線の構成,

この際, $E(\mathbb{Q}(t))$ の基底 $\{P_1, \dots, P_8\}$ も explicit に

与えられる (cf. [1], III, Th. 7.2, [4], [5])

(iii) - Weyl 群 $W(E_8)$ 全体を生成する Galois 表現 (M.W. lattice 上の) の存在と構成 ([1], Th. 7.1), とくに,

$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = W(E_8)$ となる $K/\mathbb{Q}$ の構成 (準備中).

(iv) 特異点 (E_8 -sing.) の変形理論 - a la (p). ([6]), 後述

(v) - del Pezzo surface との関係.

等がある. そして, これらの $E_7, E_6, \dots$ に対する variants も与えられる.

さて, 有理楕円曲面をこえて, M.W. lattices を考え

ると, 第1の問題点 (主要な困難 + 新しい興味) は,

“超越的サイクル” あるいは “周期” の存在による. そして,

避けるための, 一方の方向は, 標数 p の supersingular な楕円曲面を考えることにある. 実際, この観点から試みられる最も簡単な例から生ずる M.W. lattices は, sphere packings の意味で, かなり面白いものを与える (cf. [3]). これらについては, 別の機会に述べる.

去る1月の域崎におけるシンポジウムにおいては, 以上の順序として, M.W. lattices の定義と, 基本的な定理を述べ, 次に, 有理楕円曲面で, $\text{M.W. rank} \geq 6$ なるものの構造を述べた. 上記の (i) と (iv) について説明をした.

以下は、これらのうち、他の機会にすゝに書く部分
 ([1]', [2]) との重複はなるべく避けて、かつその後の考察も
 多少のことで概略を記すことにする。時々の制約で、あり
 難く述べている点はいふおいてしなくてはならぬ。また、私にとっては、
 新しく学んだ分野のことも多いので、お交付ものは、御注意
 頂ければ有難いと思ふ。

1. 定義と著者の結果

k を任意の代数の体、 $K = k(C)$ を数代数体、

E/K , 楕円曲線、 $E(K) = \{K\text{-有理点}\} \ni O$.
 $= \{f \text{ sections}\}$

$f: S \rightarrow C$ (楕円曲面), O -section $O \in \cdot$.

(仮定) f は smooth $\sim$ torus ($\exists$ singular fibre).

これより、 $E(K)$ は、有限生成 abel 群 (Mordell-Weil Th.)

であるが、 S 上の intersection theory により、自然に

$E(K)$ 上の "height pairing", $\langle P, Q \rangle$ を定義され、これを

より、 $E(K)/(\text{torsion})$ においては $E(K)^0 = \{P \in E(K) \mid \text{section}(P) \equiv O \pmod{\text{torsion}}\}$

全の fibre $f^{-1}(v)$ ($v \in C$) にある。同様に $\mathbb{Z}$ の成分で定まる。

は、正定値な lattice となる。これは Mordell-Weil lattice,

および narrow M.W. lattice とよぶ。

より具体的に、 $\langle P, Q \rangle$ は次の形に与えられる：

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (P, O) + (Q, O) - (P, Q) - \sum_{v \in R} \text{Contr}_v(P, Q)$$

χ は S の arithmetic genus (仮定より $\chi > 0$)
 (PQ) は section (P) と (Q) の交点数, $\dots$, R は $f^{-1}(v)$ の
 可約 (2個以上の既約成分をもつ) $\wedge$ ような $v \in C$ の集合.
 各 $v \in R$ に対し $\text{Contr}_v(P, Q) \in \mathbb{Q}$ は "local contribution"
 として singular fibre $f^{-1}(v)$ の P と Q の
 どのどの成分と交わるかで定まる数である (cf. [1]).
 とする. P と $Q \in E(K)^0$ のとき $\text{Contr}_v(P, Q) = 0$.
 従って $E(K)^0$ は, かつ.

$$\begin{cases} \langle P, Q \rangle = \chi + (PQ) + (QO) - (PO) \in \mathbb{Z} \\ \langle P, P \rangle = 2\chi + 2(PQ) \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

(2.5) positive definite even integral lattice とする.

-3. M.W. rank r は.

$$r + 2 + \sum_{v \in R} (m_v - 1) = p = \text{Picard number of } S.$$

($m_v = \# f^{-1}(v)$ の既約成分の個数.)

である.

ところで, 一般の r 定理は省略して, S 上の有理の複素曲面
 に適用する場合をみる. 2.6.2.

$$C = \mathbb{P}^1, K = k(t), \chi = 1, p = 10$$

次の結果は, 一連の結果の推定から得られる.

Th. 1 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 上の可約 fibre F があるならば

$$r = 8 \quad \text{かつ} \quad E(K) = E(K)^0 \cong E_8 \quad (\text{extension free})$$

$\cong \mathbb{Z}^2$. E_8 は, $\mathbb{Z}$ の二次形式 $x^2 + y^2 + \dots + z^2$ の root lattice (cf. [B], [CS])
 2ps. rank 8, pos. def. even unimodular to $h^2 = 1$ の lattice
 (2次形式論, topology, ... 2-6 § 2.2.2).

M.W. lattice の 8 次元 m . $\mathbb{Z}^2$ に $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}^2$ 上の $\mathbb{Z}$ として
 Manin の 5.6 号 ([M1]) に. 高橋の証明を $\mathbb{Z}^2$ として.

Prop. $\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線 Γ, Γ' の $\mathbb{Z}$ による linear pencil
 π . 9 個の base points $\in S$. π の $\mathbb{Z}$ の member は
 $\mathbb{Z}$ として $\mathbb{Z}^2$ として $\mathbb{Z}^2$. $\mathbb{P}^2$ から 9 個の base points を blow up
 すると. rational elliptic surface $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ となる.

$$\begin{array}{ccc} E & S & \xrightarrow{\text{blow up}} \\ / & f \downarrow & \mathbb{P}^2 \\ K & \mathbb{P}^1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 9 \text{ 個の section } P_0, P_1, \dots, P_8 \in S. \\ P_0 = O \text{ とする.} \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$. $P_1, \dots, P_8$ は. $E(K)$ における $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ として.

index 3 の $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ として $\mathbb{Z}$ として. $\mathbb{Z}$ として. $Q = \frac{1}{3}(P_1 + \dots + P_8)$ は
 $E(K)$ に $\mathbb{Z}$ として. $E(K)$ は $P_1, \dots, P_8, Q$ として $\mathbb{Z}$ として.

証明 Th 1. $\mathbb{Z}$ として. $E(K) \cong E_8$. π の blow up の excep. curve
 (P_i) は. $\mathbb{Z}$ として $\mathbb{Z}$ として. $i \neq j$ の $\mathbb{Z}$ として

$$\langle P_i, P_j \rangle = \chi + (P_i, P_0) + (P_j, P_0) - (P_i, P_j) = 1$$

$$\langle P_i, P_i \rangle = 2\chi + 2(P_i, P_0) = 2. \quad (i \geq 1)$$

$$\therefore (\langle P_i, P_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 8} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \uparrow \\ 8 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\therefore \det = 9 = 3^2$$

$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$. $\{P_1, \dots, P_8\}$ は $E(K)$ の index 3 の ip 分 2 点 2 点.

$\exists Q \in E(K)$ n.s. $\exists \{P_i\} \cup \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. $3Q \in \{P_i\}$.

$$\text{Eq. 12 } 3Q = n_1 P_1 + \dots + n_8 P_8, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

と $n=1$ なる Q 1 点 P_i 2 点 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. $-1 \leq n_i \leq 1$ (*) と $\{P_i\} \cup \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

$\mathcal{Z}$. $\langle Q, P_i \rangle \in \mathbb{Z}$ ($E(K) = E(K)^0$ is integral lattice) 故

$$3\mathbb{Z} \ni 3\langle Q, P_i \rangle = \langle 3Q, P_i \rangle = \langle \sum_j n_j P_j, P_i \rangle$$

$$= 2n_i + \sum_{j \neq i} n_j$$

$$= n_i + N, \quad N = \sum_{j=1}^8 n_j$$

$$\therefore n_i \equiv -N \pmod{3}, \quad \forall i$$

(*) 8) $n_1 = \dots = n_8$, $n_i = 0$ or ± 1 , $n_i = 0$ なら $3Q = 0$

$\mathcal{Z}$: $E(K)$ is torsion free 故 $Q = 0$ 2 点 2 点 $\mathbb{Z}$. $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$

$$3Q = \pm (P_1 + \dots + P_8).$$

q.e.d.

Th 1. $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. ($R = \{v \mid f^{-1}(v): \text{pt}\}$)

Th 2. (i) $\# R = 1, m_v = 2 \Leftrightarrow r = 7 \Leftrightarrow E(K) \cong E_7^*$

$$\left[I_2 \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) \right]$$

$$E(K)^0 \cong E_7^* \quad] 2$$

(ii) $\# R = 2, m_v = m_{v'} = 2 \Rightarrow r = 6$,

$$E(K) \cong D_6^*$$

$$E(K)^0 \cong D_6 \quad] 4$$

(iii) $\# R = 1, m_v = 3 \Rightarrow r = 6$.

$$E(K) \cong E_6^*$$

$$E(K)^0 \cong E_6 \quad] 3$$

($r=6 \Rightarrow$ (ii) or (iii)) $\left[I_3 \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) \right]$

(cf. [1], ~~the~~ r and $\mathcal{Z}$ is [7] 等.)

2. "E型"代数方程式論 (cf. [2])

$r = 8, 7, 6$ に対して, E_r 型の基本方程式 (cf. [2])

E_r を定義した. 次のように

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{一般 } n \text{ 次方程式} : E_r \text{ 型の基本方程式} \\ = A_{n-1} : E_r \end{array}}$$

が成立つ. これは [2] よりも明確に述べてやる.

一般 n 次方程式とは. 周知のように. n 次方程式

$$(1) f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

で. 係数 $a_1, \dots, a_n$ が基礎体 k , 上では. $k = \mathbb{Q}$ 上代数的独立なるものをいう. 根を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると.

$$(2) \quad \pm a_i = \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ の } i \text{ 次基本対称式.}$$

(根と係数の関係). 今 $X \rightarrow X + a_1/n$ ととりかえて.

$$a_1 = 0, \quad a_2, \dots, a_n \text{ は代数的独立}$$

とすると, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$, α_i のうち $(n-1)$ は代数的独立.

かつ. 次の3つの著しい事実が成立つ. $k_0 = \mathbb{Q}(a_2, \dots, a_n)$ とおく.

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \mathcal{R} := f(X) \text{ の分裂体 } / k_0 \\ \quad \quad = k_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ \quad \quad \text{は } \mathbb{Q} \text{ 上の純粋超越拡大} \\ (2) \quad \mathcal{R}/k_0 \text{ は Galois 拡大, } \text{Gal}(\mathcal{R}/k_0) = \mathbb{S}_n = W(A_{n-1}) \\ (3) \quad \mathbb{Q}[\alpha_2, \dots, \alpha_n]^{W(A_{n-1})} = \mathbb{Q}[a_2, \dots, a_n] \quad (\text{対称式の基本定理}) \\ (W(A_{n-1}) \text{ は } A_{n-1} \text{ の Weyl 群.}) \end{array} \right.$$

はじめに Φ と Ψ の対比は、このと全く平行なことから、

$E_8, \dots$ 成立するよう $\bar{\alpha}$ の式

$$(3) \quad \Phi_{E_r}(X) = X^N + I_1 X^{N-1} + \dots + I_N = 0$$

が定義で与えられている。

定義は $\bar{\alpha}$ の Φ と Ψ とは、

$$N = \deg_X \Phi_{E_r}(X) = \begin{cases} 27 & r=6 \\ 56 & r=7 \\ 240 & r=8 \end{cases}$$

$k_0 = \mathbb{Q}(\overbrace{p_i, q_j}^{r=7})$, $\mathbb{Q}$ 上の r 次之純粋超越拡大

$u_1, \dots, u_N : \Phi_{E_r}(X)$ の根

とすると

Th (E_r) $\Phi_{E_r}(X) \in k_0[X]$, かつ、 E_r は

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \mathbb{R} \in \Phi_{E_r} \text{ の分解域 } (\mathbb{R}/k_0) \\ \quad = k_0(u_1, \dots, u_N) = \mathbb{Q}(\overbrace{u_1, \dots, u_N}^{r=7}) \\ \quad \text{と } \mathbb{R}/\mathbb{Q} \text{, 純粋超越拡大} \\ \textcircled{2} \mathbb{R}/k_0 \text{ は Galois 拡大, かつ } \text{Gal}(\mathbb{R}/k_0) = W(E_r). \\ \textcircled{3} \mathbb{Q}[u_1, \dots, u_r]^{W(E_r)} = \mathbb{Q}[p_i, q_j], \end{array} \right.$$

と $\mathbb{R}$ "根と係数の関係" の性質から成立する。

(4) p_i と $q_j = W(E_r)$ -不変な $u_1, \dots, u_r$ の多項式。

Φ の定義は $\bar{\alpha}$ の Φ 。 M.W. Lattice $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ とは、

また、次の楕円曲線 $E/k_0(t)$ を与える。

$$(E_6) \quad \underline{y}^2 = \underline{x}^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + t^4),$$

$$(E_7) \quad \underline{y}^2 = \underline{x}^3 + x(p_0 + p_1 t + t^3) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + q_4 t^4),$$

$$(E_8) \quad \underline{y}^2 = \underline{x}^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + t^5).$$

$k_0 = \mathbb{Q}(p_i, q_j)$, $p_i, q_j \in \mathbb{Z}$ は、①上の如く。

$k = \overline{k_0}$, (k_0 の代数的閉包)。

$$K = k(t)$$

とすると、 E/K の Mordell-Weil lattice は、次の如く。

$$E(K) \cong E_6^*, E_7^* \text{ または } E_8. \quad (r=6, 7, 8 \text{ に対応})$$

とすると、(証明: ①上の如く、次の如く楕円曲線

$$f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$$

は、 $t=\infty$ 以外では、可約な fibre E を与え、 $f^{-1}(\infty)$ は

$$\begin{array}{ccc} \text{type IV} & \text{type III} & \text{type II} \\ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ (r=6) & (r=7) & (r=8) \end{array}$$

と対応する。この状況を、Th. 1, 2 の (17) として、qed)

②より、 $E(K)$ の minimal vectors の個数は、 $r=6$ のときは、54、

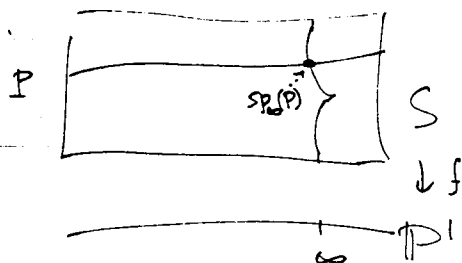
$r=7$ のときは、56、 $r=8$ のときは、240 (④の如く [CS])

と、上の $f^{-1}(\infty)$ から得られる $\mathbb{P}^1$ 上の $f^{-1}(\infty)^\#$ は、③の如く、
alg. group になる。この群は、 $(k \text{ 上})$ $r=6, 7, 8$ の如く、

$$f^{-1}(\infty)^\# = \mathbb{G}_a \times \mathbb{Z}/3, \quad \mathbb{G}_a \times \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{G}_a \quad \text{と表す。}$$

今. $sp'_\infty : E(K) \rightarrow \mathbb{G}_a(K)$ は specialization map である.

P.P.S.



$P \in E(K)$ のとき

Section (P) は $f^{-1}(\infty)$ のなす区間

$$sp'_\infty(P) \in f^{-1}(\infty)^\#$$

と

↓ projection

$$sp'_\infty(P) \in \mathbb{G}_a$$

である.

Def. $\Phi_{E_r}(X) = \prod_{P: E(K) \simeq E_r^*} (X - sp'_\infty(P)) \in k_0[X]$
 の min. vectors.

上より. $r=6$ のとき. 54 個の Φ_{E_6} は. $\Phi(X) \cdot \Phi(-X)$,
 $\deg \Phi = 27$. とわかるから. Φ_{E_6} は Φ に等しい.

以上より. 定理は成立する. 上の $\mathbb{I}_h(E_r)$ の
 証明は. M.W. lattice $E(K)$ の min. vectors の Φ は
 を用い. 証明をしよう. Φ の別の表現を導くことに
 する. その過程で. (4) の Φ の '公式' も得られる.

min. vectors P は.

$$P = (x, y), \quad \begin{cases} x = gt^2 + at + b & (2\text{次式}) \\ y = ht^3 + ct^2 + dt + e & (3\text{次式}) \end{cases}$$

よりわかること. $r=6$ のとき. $r=6$ のとき.

$g=h=0$ のとき. $r=8$ のとき. $g \cdot h \neq 0$, かつ. g/h は

$$sp'_\infty(P) = g/h \quad \text{である.}$$

上の証明の詳細は略し、応用についてのみ。

まず、arithmetic への応用 が 2 つある。一般 n 次方程式に於て 示さうと。次のことは、よく知られた

(1). 係数 $a_2, \dots, a_n$ を特殊化して、有理数値を与えれば、

これを "一般" にすると、 $f(X)$ は、既約で、その分解体

$$\mathbb{R}_0/\mathbb{Q} \text{ は、Galois 拡大で } \mathcal{G}(\mathbb{R}_0/\mathbb{Q}) = \mathcal{S}_n = W(A_{n-1}).$$

一方、次のことは、さらに、自明である：

(2). 根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を特殊化して、 $\forall$ 有理数値を与えれば、

それら根を含む方程式 $f(X) \in$ (根と係数 α の係数より)

書き下すことができる。

E 型方程式の類似の結果は、

Th. (2) の類似). $\mathbb{Q}(t)$ 上の楕円曲線 $\mathcal{C}$ 、 $\gamma=8$ (or 7, 6)

と γ の $\mathcal{C}$ 上の基底とともに構成することができる。

(cf. [1], Th. 7.2, [4], [5])

Th. (1) の類似) $p_i, q_j \in \mathbb{Q}$ を、一般にすると、

$E_r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ は、既約で、その分解体 $\mathbb{R}_0/\mathbb{Q}$ は

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_0/\mathbb{Q}) = W(E_r).$$

(cf. [1] Th. 7.1.) 具体例も (5) 示さうとある。

3. 特殊点の変形理論への応用

前節の方程式 (E_8) , etc. は、この型の有理 2 重線の

semi-universal deformation とは $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ の
 である。(以下 [DBT], [SL], [O], ... 参照)

例えば, $\mathbb{I}h(E_g)$ は, 初等的, 代数的に証明する
 ことが出来る。特異点の理論により $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ の結果
 (Brieskorn, Tjurina, ... 等々の数学者の寄与がある) に
 簡単な証明を与えることが可能である。さらに, $\mathbb{P}^3$ の
 内部の, 特異点の多様体の stratification を, 以下に
 記述することが出来る。(又, 正標数での sing. も論じよう。)

以下, E_g の場合に限る。まず, 方程式 (E_g) によって定義された
 $\mathbb{C}^3$ の affine surface X_λ , ($\lambda = (p_0, p_1, \dots, p_3) \in \mathbb{C}^8$),
 $\mathbb{C}(t)$ 上の elliptic curve E_λ , 対応する elliptic surface
 (smooth projective) S_λ , ell. fibration $f: S_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ とおく。

$$D = \{ \lambda \in \mathbb{C}^8 \mid X_\lambda \text{ not smooth.} \} \quad (\text{discriminant})$$

とおく。

Lemma. 次の同値が成立する。

$$(i) \quad \lambda \notin D \iff X_\lambda \text{ smooth} \iff \begin{array}{l} f \text{ is not a fibre to } L. \\ \iff \text{M.W. lattice} = E_8 \end{array}$$

$$\iff \lambda \in D \text{ とする。}$$

$$(ii) \quad X_\lambda \text{ has } A_1\text{-sing. at } t \iff \text{M.W. lattice} = E_7^*$$

$$(iii) \quad X_\lambda \text{ has } 2A_1\text{-sing. at } t \iff \text{ " } = D_6^*$$

$$(iv) \quad X_\lambda \text{ has } A_2\text{-sing. at } t \iff \text{ " } = E_6^*$$

$$(v) \quad X_\lambda \text{ has } 3A_1\text{-sing. at } t \iff \text{ " } = D_4^* \oplus A_1^*$$

→. E_8 型の基本多項式 ε (X^2 の多項式) として

$$\Phi_{E_8}(X) = X^{240} + I_2 \cdot X^{238} + \dots + I_{238} \cdot X^2 + I_{240}.$$

$$I_2, \dots, I_{240} \in \mathbb{Q}[u_1, \dots, u_8]^{W(E_8)} = \mathbb{Q}[p_0, \dots, p_3]$$

$\uparrow$
Th. ③

となく. 以下

$$D = \{I_{240} = 0\}.$$

次に. $\text{Th}(E_8) \text{ ③} \text{ より } (\bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}^{2^{i+1}}).$

$$\mathbb{C}[u_1, \dots, u_8]$$

$\cup$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \mathbb{C}^8 \\ \pi \downarrow \text{quotient map} \end{matrix}$$

$$\mathbb{C}[u_1, \dots, u_8]^{W(E_8)} = \mathbb{Q}[p_0, \dots, p_3]$$

$$\mathbb{C}^8 / W(E_8) \cong \mathbb{C}^8 \supset D$$

よって. $\pi|_D: \mathbb{C}^8 - D \rightarrow \mathbb{C}^8 - D$ の不変 Galois 群は $W(E_8)$ である.

Galois 群 $= W(E_8)$ となる ε がある. となく

Prop. $\pi|_D: \mathbb{C}^8 - D \rightarrow W(E_8)$ 全射.

次に. D の stratification (の $\neq$ 部分) は

次の通り

Th. (i) X_λ smooth $\iff I_{240}(\lambda) \neq 0$

(ii) $X_\lambda: A_1\text{-sing}$ $\iff I_{240}(\lambda) = 0, I_{238}(\lambda) \neq 0$

(iii) $X_\lambda: 2A_1\text{-sing}$ $\iff I_{240} = I_{238} = 0, I_{236} \neq 0$

(iv) $X_\lambda: A_2\text{-sing.}$ $\iff I_{240} = I_{238} = I_{236} = 0, I_{234} \neq 0.$

(v) $\text{or } 3A_1\text{-sing}$

...

となく.

とたゞ様子を表わしている。(iii), (iv), ... のついても、
同様の解釈からできる。これから、Singularity の理論
で、既に定まらしているところから、私は定まらぬ。

最後に、M.W. lattice の E_8, E_7^*, E_6^* の場合の
ell. surface は、unique to ± 1 だけ。degree = 1, 2 又は 3 の
del Pezzo surface $(\mathbb{P}^2 / \langle M_2 \rangle)$ に blow down され、min. vectors は、
 $\Sigma = 2$ の 1 種例外曲線 (この数は 240, 56, 27) に
うつされる。とくに、我々の (E_6) 型の基本方程式は、
3 次曲面の 27 本の lines の定める方程式となり、また
 (E_7) 型のこれは、4 次曲面の 28 本の double tangent の
方程式と対応する ($56 = 28 \times 2$)。これから、 $\Sigma = 2$ は、
① 上の 3 次曲面で、 Σ の上の 27 本の lines が全て、① 上
定義されることや、② 上の 4 次曲面で、28 本の double tangent
が全て ② 上定義されるものと、構成できることを付言して
おく。
(1990. 2. 10 記)

参考文献: ([1] or [1]' の文献表を参照)。

[B]. Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie. Ch. 4, 5, 6.

[CS] Conway-Sloane: Sphere Packings, Lattices and
Groups, Springer (1988)

[DPT]. Demazure, Pinkham, Teissier : Sém. sur les
Singularités des Surfaces. SLN. 777 (1980)

[M1] Manin, The Tate height of points on an
abelian var., Izv. Akad. Nauk. SSSR, ^{28(1964);} AMS. Tn. (2) 59.
(1966)

[M2] " : Cubic Forms. North-Holland (1986)

[SL] Slodowy, : Simple singularities and simple alg. gr.
SLN. 815 (1980)

[O] Oda, T. : Introduction to Algebraic singularities.
(to appear)

Shioda. T:

[1] Mordell-Weil lattices and Galois representation
Proc. Japan Acad. 65A (1989), I, II, IV

[1]' 同題. (+ E_6 -定例). 代数学シンポジウム報告集
(北大, 1989年8月).

[2] M.W. lattices と 素数 p の p -adic 代数学方程式の新しい解法.
代数学の整数論シンポジウム, (京都 1989年12月)

[3] M.W. lattices and sphere packings. preprint.

[4] Construction of elliptic curves over $\mathbb{Q}(t)$ with
high rank : a preview, Proc. Japan Acad. (to
appear)

[5] Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups.

(in preparation)

[6] M.W. lattices of type E_8 and deformation of singularities (in preparation.)

[7] (with K. Oguiso). The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface (in prep.)