

補間多項式の収束についての 注意

富山大教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 有界区間 $[a, b]$ の中の k 個の点を, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b$ とし, データ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\dots,k}$ を補間する関数, つまり $f(x_i) = y_i$ ($i=1,2,\dots,k$) を満たす $f(x)$ を求める問題を考える. このような関数としては, Lagrange の補間多項式

$$l(x) := \sum_{i=1}^k y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega'_i(x_i)}$$

がよく知られている. ここで, $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$, $\omega_i(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_k)$ である.

補間関数を区分的多項式の中に求めることも考えられるが, これが補間 spline と呼ばれるものである. データ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\dots,m}$ に対して, $(-\infty, \infty)$ で定義された補間関数 ϕ が次の (1), (2) を満たすとき, m 次 ($m \geq 1$) の補間 spline と呼ばれる ([2]).

(1) 各区間 (x_i, x_{i+1}) ($i=0, 1, \dots, k$) で m 次以下の多項式, ($x_0 = -\infty, x_{k+1} = \infty$ とする.)

(2) $\Delta \in C^{m-1}(-\infty, \infty)$.

いま, $1 \leq n < k$ とし, 補間関数 $f \in C^n[a, b]$ を動かして,

$$\int_a^b \{f^{(m)}(x)\}^2 dx$$

を最小にする問題を考える。これは、ある意味で最も滑らかな補間関数を見つけることを意味する([2])。実はこのような最小二乗積分を与えるものはただ一つ存在し、それは $2n-1$ 次の自然補間 spline と呼ばれるもの (これを Δ_* と記す) である。次は Δ_* の定義である([2], [3])。

(1) Δ_* は $2n-1$ 次の補間 spline である。

(2) Δ_* は $(-\infty, x_1] \cup [x_k, \infty)$ では $n-1$ 次以下の多項式となる。

π_m で m 次以下の多項式全体の集合を表すこととし,

$$\Pi_m := \{p \in \pi_m; p(x_i) = y_i \ (i=1, 2, \dots, k)\}$$

とおく ($m \geq k$)。このとき, π_m から自然補間 spline Δ_* への近似に関して, Schoenberg [4] は次の定理を証明した。

定理 S (1) $\int_a^b \{p^{(m)}(x)\}^2 dx, \quad p \in \Pi_m$

を最小にする多項式 $p = p_m$ がただ一つ存在する。

(2) (1)より得られる多項式の列 $\{P_m\}_{m=k}^{\infty}$ は $2n-1$ 次の自然補間 spline s_k に一様収束する。

上の定理で示された多項式 P_m 及びその極限としての自然補間 spline s_k について作用素論的な見方を2,3試みようとしたのである。以下のように貧弱な結果しか得ていない。

2. P_m の一意性. $g \in \pi_m$ ($m \geq k$) を1つ固定すると, 任意の $p \in \pi_m$ は, $u \in \pi_{m-k}$ を適当に選んで

$$p = g - \omega u$$

と表される。ここで, ω は先に定義したものである。このとき, $L^2(a, b)$ のノルムを $\|\cdot\|$ として,

$$\int_a^b |p^{(n)}(x)|^2 dx = \|g^{(n)} - (\omega u)^{(n)}\|^2$$

とかける。いま

$$A_m u = (\omega u)^{(n)}, \quad u \in \pi_{m-k}$$

によって作用素 A_m を定義すると, $A_m \in \mathcal{L}(\pi_{m-k}, \pi_{m-n})$, つまり, π_{m-k} から π_{m-n} の中への有限次元の線形作用素となる。定理Sの(1)は,

$$\|g^{(n)} - A_m u\| = \text{minimum}, \quad u \in \pi_{m-k}$$

を満たす多項式 u を求めることと同値となる。有限次元作用素 A_m はその一般逆作用素 A_m^+ をもつ ([1]) ことから, これを用いて求める u は

$$u = A_m^+ g^{(n)} + v, \quad v \in \ker A_m$$

と表される。ところが, 実は

$$\ker A_m = \{0\}$$

となることが示される。実際, $A_m v = (\omega v)^{(n)} = 0$ とすると, $\omega v \in \pi_{n-1}$, もし $v \neq 0$ とすれば ωv は n 次以上の多項式となり矛盾が生ずる。したがって $v = 0$ 。このことから, $u = A_m^+ g^{(n)}$ とわかる。この u を用いると,

$$p^{(n)} = g^{(n)} - A_m A_m^+ g^{(n)} = (g - \omega A_m^+ g^{(n)})^{(n)}$$

が L^2 乗積分を最小にするものとわかる。上の等式の n 回不定積分をとれば

$$p = g - \omega A_m^+ g^{(n)} + r, \quad \exists r \in \pi_{n-1}$$

となる。ところが $p, g \in \pi_m$ ということ, 及び $\omega(x_i) = 0$ を考え合わせれば, $r = 0$ とわかる。よって

$$p = g - \omega A_m^+ g^{(n)}.$$

この p が先の定理 5 (1) の p_m ということになる。なほ念のため p の一意性も示したい。別の $r \in \pi_m$ から出発して,

$$\bar{p} = r - \omega A_m^+ r^{(n)}$$

を得たとして, $p = \bar{p}$ をいえばよい。

$$p - \bar{p} = (g - r) - \omega A^+(g - r)^{(n)}$$

となるが, $v \in \pi_{m-k}$ を適当にとり $g - r = \omega v$ とかける。
先を示したように $\ker A_m = \{0\}$ だから, $A_m^+ A_m v = v$
である。これから

$$\begin{aligned} A_m^+ (g - r)^{(n)} &= A_m^+ (\omega v)^{(n)} = A_m^+ A_m v = v \\ &= \frac{g - r}{\omega} \end{aligned}$$

したがって $p - \bar{p} = 0$ とわかる。

3. $\{p_m\}$ の収束。記述の便宜上, $D^n u = u^{(n)}$, $L_\omega u = \omega u$ とし, 作用素 T_m ($m \geq k$) を

$$T_m u := u - \omega A_m^+ u^{(n)} = (1 - L_\omega A_m^+ D^n) u$$

と定義する。($u \in \pi_m$)。 $T_m \in \mathcal{L}(\pi_m, \pi_m)$ 。 ($u \in C^n[a, b]$ として T_m の定義域を拓くこともできる。) $F_m := A_m A_m^+$ は直交射影で増加列, ことで $F_m \rightarrow F$ (強収束) とあると。

$$D^n T_m = (1 - F_m) D^n \rightarrow F^\perp D^n$$

$g \in \pi_{m_0}$ を1つ固定したとき, $p_m^{(n)} = D^n T_m g \rightarrow F^\perp D^n g$ 。

これは, $\{p_m^{(n)}\}$ が $L^2(a, a)$ で収束あることを示している。

実は

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_m^{(n)} = s_+^{(n)} \quad (\text{in } L^2(a, a))$$

である。(s_+ は先に述べた自然補間 spline.)

(*) を示すには, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, m を十分大きくとると, $g \in \Pi_m$ で $\|g^{(n)} - \Delta^{(n)}\| < \varepsilon$ (< 1) となるものが見つかること, また, Δ_* の特性として, $C^n[a, b]$ の中の任意の補間関数 f に対して

$$(**) \quad \|f^{(n)} - \Delta_*^{(n)}\|^2 = \|f^{(n)}\|^2 - \|\Delta_*^{(n)}\|^2$$

が成り立つことを用いる ([3], p. 115)。すなわち, (**) で $f = p_m$ とおき, $\|p_m^{(n)}\|$ の最小性を用いて,

$$\begin{aligned} \|p_m^{(n)} - \Delta_*^{(n)}\|^2 &= \|p_m^{(n)}\|^2 - \|\Delta_*^{(n)}\|^2 \\ &\leq \|g^{(n)}\|^2 - \|\Delta_*^{(n)}\|^2 \\ &= (\|g^{(n)}\| + \|\Delta_*^{(n)}\|)(\|g^{(n)}\| - \|\Delta_*^{(n)}\|) \\ &\leq (2\|\Delta_*^{(n)}\| + 1)\|g^{(n)} - \Delta_*^{(n)}\| \\ &< \varepsilon K_1 \quad (K_1 = 2\|\Delta_*^{(n)}\| + 1). \end{aligned}$$

これから $p_m^{(n)} \rightarrow \Delta_*^{(n)}$ がわかる。更に $\{p_m\}$ が Δ_* に一様収束することは, 一般に, $f \in C^n[a, b]$ が

$$(***) \quad f(x) = l(x) + \frac{\omega(x)}{n!} \int_a^b M(t; x_0, x_1, \dots, x_n, x) f^{(n)}(t) dt$$

と表されることを利用して示される。ここで $l(x)$ は先に述べた Lagrange の多項式, $M(t; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\nu(x_i - t)_+^{n-1}}{\omega'(x_i)}$ ($x_0, x_1, \dots, x_n$ を結節点とする B-spline と呼ばれるもの) である。

(***) を p_m と Δ_* に適用し, Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned}
|p_m(x) - s_*(x)| &= \left| \frac{\omega(x)}{n!} \int_a^b M(t; x_1, x_2, \dots, x_n, x) (p_m^{(n)}(t) - s_*^{(n)}(t)) dt \right| \\
&\leq K_2 \|p_m^{(n)} - s_*^{(n)}\|. \\
(K_2 &= \frac{1}{n!} \max_{a \leq x \leq b} \left\{ \omega(x) \cdot \left[\int_a^b \{M(t; x_1, x_2, \dots, x_n, x)\}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.)
\end{aligned}$$

となる。

References

- [1] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, New York, 1981.
- [2] 桜井 明, スプライン関数入門, 東京電気大学出版, 1981.
- [3] I. J. Schoenberg, On interpolation by spline functions and its minimal properties, On Approximation Theory 5, ISNM (1964), 109-128.
- [4] _____, Interpolating splines as limits of polynomials, Linear Alg. and its Appl. 52 (1983), 617-628.