

力学系の分岐

日大 理工 松元重則

まえがき

微分可能力学系 ことには *generic* な性質についての研究が創始されてからすでに久しい。いまや立派な成果が数多く積み重ねられてつづつある。そして問題は いまだ山積してゐる。何時まで続くのか。力学系の理論はつきあたる壁を持たぬのか。

力学系の分岐についての研究は、安定性について安定した結果が提出された時点から始まった。この方面の研究の重要性(とくに数学以外の諸分野への応用に関しての)については Thom [6] をみられたい。しかるに安定性についてすら限られた知識しか得られぬ現時点で、我々は分岐について何を知り得たのか。我々はその全体像について、骨子すら知り得たと主張することができない。今日お話しす

る内容も、局所的な分岐の generic な姿を描写したものにすぎず、力学系の理論の最大関心事である大域的様相についての将来の研究のための一つの布石にすぎないのである。
 (重要でないという意味ではないが。) 今日の講演は, Sotomayer [4] の抄録があるが, 他に Brunovsky [1] に類似の結果がある。また Sotomayer [5] には, 二次元多様体上の流れに限ったもの, より完全な記述がある。一方 Newhouse-Palis [3], [2] には, Morse-Smale 系を, 始点とある一径数族 (微分同相の) の最初の分岐点の状態についての大域的見地からの研究がある。彼等の議論は複雑至極であるが, この型の分岐点は恐らく一番簡単なものである。

§1. 双曲型特異点と擬双曲型特異点

M はコンパクト C^∞ 級多様体であり境界をもたない。
 f は M 上の C^r 級 ($1 \leq r < \infty$) 微分同相であり $p \in M$ は f の固定点である。 $T_p M$ は, p における M の接空間とし,
 $T_p f : T_p M \rightarrow T_p M$ は f の p における一階微分とする。
 一般に $T_p M$ は, $T_p f$ -不変な部分空間の直和 $E^c \oplus E^u \oplus E^s$ に分解され, $T_p f$ の E^c, E^u, E^s への制限の固有値は, すべて単位

円 $|z|=1$ の上, 外, 内にある。また M の f -不変部分多様体 W^c, W^{uu}, W^{ss} が存在し, x からは $p \in \Sigma$ とあり, $x = z^u E^c, E^u, E^s$ に接している。 $f|_{W^{uu}}, f|_{W^{ss}}$ は, $T_p f|_{E^u}, T_p f|_{E^s}$ に位相共役がある。 $\square$

(定義) $E^c = 0$ のとき, p は f の双曲型固定点と呼ばれる。

(定義) p が f の擬双曲型固定点であるとは, $f|_{W^c}$ が p の近く z 次式の11づれがで表わされることをとする。

- a) $x \mapsto x + ax^2 + O(|x|^3)$ ただし $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$
- b) $x \mapsto -x + ax^2 + bx^3 + O(|x|^3)$ ただし $a^2 + b \neq 0, x \in \mathbb{R}$
- c) $z \mapsto \lambda z + \beta |z|^2 z + O(|z|^3)$ ただし $|\lambda| = 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1, \operatorname{Re}(\beta/\lambda) \neq 0, z \in \mathbb{C}$

b) 中の条件 $b + a^2 \neq 0$ は, $f \circ f$ の式 $x \mapsto x - 2(a^2 + b)x^3 + O(|x|^3)$ 中の係数 (x^3 の) $\neq 0$ だと保証するためのものがある。 c) のとき, p の非常に近くで, f は $\arg \lambda$ で決定される一径数群の時間1写像となっているのであるが, この一径数群のPoincaré写像は式 $x \mapsto -x + \frac{\pi}{\arg \lambda} \operatorname{Re}(\beta/\lambda) x^3 + \dots$ で表わされる。従って条件 $\operatorname{Re}(\beta/\lambda) \neq 0$ は, 上式中の x^3 の係数 $\neq 0$ だと保証するためのものがある。

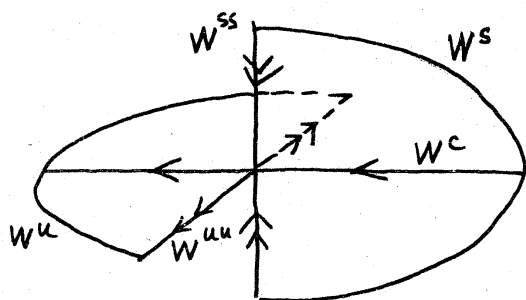
22, $X \in M$ 上のベクトル場とし, X の定義ある一
 径族群を X_t と表わし, $p \in M$ 上, X の特異点 (すなわち
 $X(p)=0$) とするとき

(定義) p は X の (擬) 双曲型特異点である。

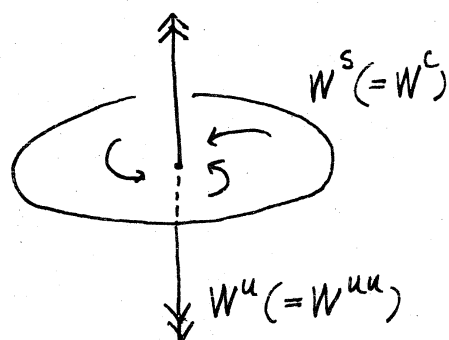
$\iff$ ある t に対し p は X_t の (擬) 双曲型固定点であ
 る。

この場合, b) は起らないことに注意しよう。不変
 多様体を図示すると,

a) 型



b) 型 ($R_0(\beta/H) < 0$)



したがって記中より $W^{u(s)} = \{x \in M \mid X_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty (0)} p\}$

最後にベクトル場 X の周期軌道 γ に対して

(定義) γ が (擬) 双曲型。

$\iff \gamma$ の Poincaré 写像が so 。

これは切断のとり方によらず定義される。

§2. 擬双曲型特異点の分岐

経数空間 Λ は C^∞ 級可微分多様体であるとし, C^r 級の
経数付流れ $\xi: \Lambda \times M \rightarrow TM$ を考える。 ξ の特異点の軌
跡 $\Theta = \xi^{-1}(M_0)$ ($\equiv M_0$ は TM の 0-切断) について

(仮定) ξ は M_0 に横断的であり従って Θ は余次元
 n の部分多様体である。

ε を設ける。 $(\lambda_0, p) \in \Theta$ をとり, この点のまわりで, 合成の
写像, $(\xi^c, \xi^u, \xi^s): \Lambda \times M \xrightarrow{\xi} TM \rightarrow T_{z_0} M \approx E^c \oplus E^u$
 $\oplus E^s$ を考える。 対応して, この独立変数を, (x, y, z, λ)
 $\in W^c \times W^u \times W^s \times \Lambda$ と表わしておこう。

1° a) 型の擬双曲型特異点の分岐

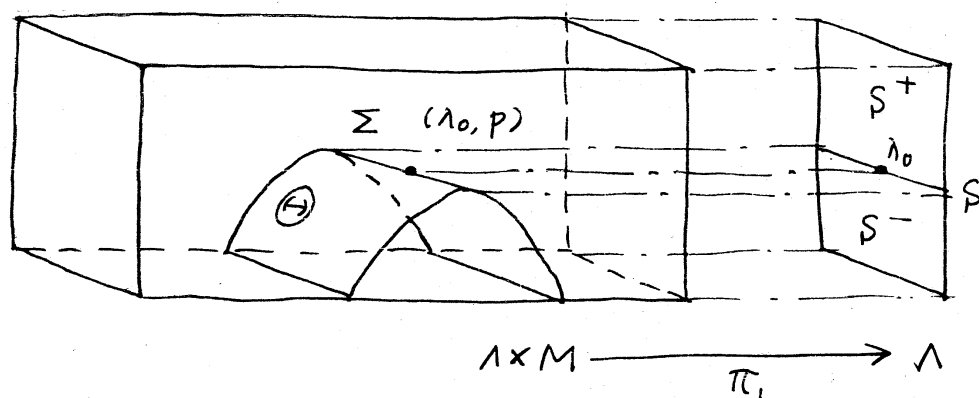
ここからは次の

$$\begin{aligned} \text{(仮定)} \quad \xi^c &= \alpha \cdot \lambda + \alpha x^2 + U \\ \xi^u &= A \cdot y + A_0 \cdot \lambda + V \\ \xi^s &= B \cdot z + B_0 \cdot \lambda + W \end{aligned}$$

ここには $\alpha > 0, x \in \mathbb{R}$, V, W は (λ_0, p) における一階微分ま
でが 0 の関数, U は更に $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ も 0.

のもとで議論を進める。

次の絵をみよう。



こゝに $\pi: \Lambda \times M \rightarrow \Lambda$ は等成分への射影であり, Σ は, $\pi|_{\Theta}$ の臨界点の軌跡を, S は Σ の π による像を表わす。また S^+ , S^- は領域であり, 一次形式 $d\lambda$ により定まる。(詳しくは次の命題の証明を見られたい。) 以上あべまは, 点 (λ_0, p) 又は点 p_0 の近くでの定義されてゐるのである。

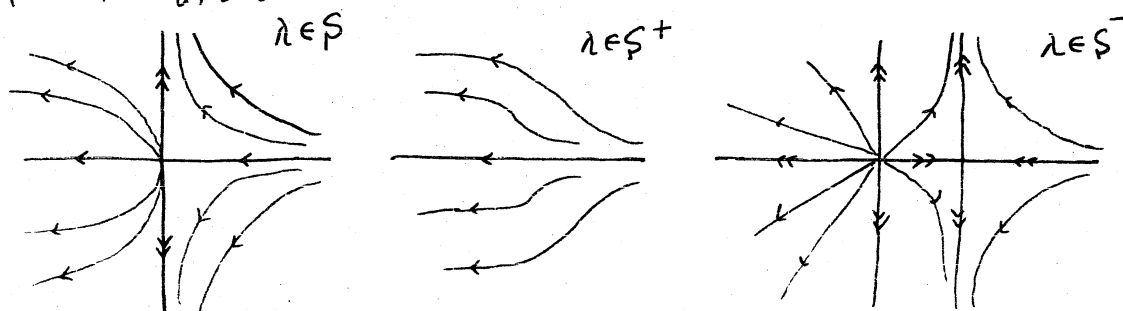
(命題1) (i) S は余次元1の部分多様体である。

(ii) $\lambda \in S$ に対し, 流れ $\varphi_\lambda: M \rightarrow TM$ は, φ_{λ_0} と (局所的に)

位相共役である。 (iii) $\lambda \in S^+$ に対し, φ_λ は p の近くに特異

点をもたない。 (iv) $\lambda \in S^-$ に対し, φ_λ は p の近くに二つの双曲型特異点を持ち, それらの指数は1だけ違つてゐる。

次図は ii) ~ iv) の各 λ の λ につら φ_λ の様子を描写したものである。



証明: $\xi^u = \xi^s = 0$ を, y, z について解いて,

$y = y(\lambda, x)$, $z = z(\lambda, x)$ を得る. 二に $y(0,0) =$

$z(0,0) = y_x(0,0) = z_x(0,0) = 0$. 一方, 適当に $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ とおくことにより $\alpha \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \lambda_1$ ($\alpha_1 > 0$) とすることが出来る. 上の y, z を代入して,

$$\xi^c = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha x^2 + U'(x, \lambda) = 0$$

という方程式を得る. 二に $U'(0,0) = U'_x(0,0) = U'_\lambda(0,0) =$

$U'_{xx}(0,0) = 0$. 上式を λ_1 についてといて, $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{\alpha_1} x^2 + \varphi(x, \lambda_2)$.

④は上の三つの関係式で定義され, 従って前頁の絵の様な形をして

いるのである. さらに $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = -\frac{2\alpha}{\alpha_1} x + \varphi_x(x, \lambda_2) = 0$ を,

x についてといて, 上の λ_1 の式に代入することにより関数

$\lambda_1 = s(\lambda_2)$ を得るが, このグラフが $\mathcal{S}$ に他ならない.

$\mathcal{S}^{\pm} = \{ \lambda_1 \gtrless s(\lambda_2) \}$ とおけば, iii) ~ iv) は, 困難なく

証明される. ■

2° 周期軌道と微分同相

引きつづき径数付流れ $\lambda: \Lambda \times M \rightarrow TM$ を考える.

$\lambda_0 \in \Lambda$ に対し流れ λ_{λ_0} は周期軌道 γ をもつものとしよう.

Γ を γ の切断とし, $\{\Gamma\} = \Gamma \cap \gamma$ とおく. γ の Γ における近傍 V と λ_0 の Λ における近傍 N とを十分小さく選べば, $\forall \lambda \in N$

に対し λ の Poincaré 写像 $f_\lambda: V \rightarrow U$ が定義される。
 (または $f: N \times V \rightarrow U$). $\mathcal{F} = \{(\lambda, x) \in N \times V \mid$
 $f(\lambda, x) = x\}$ とおき, $d: N \times V \rightarrow U$ に $d(\lambda, x) = x$
 として定義する。次の

(仮定) 写像 f と d は横断的である。

のもとで, $\mathcal{F}$ は多様体となり, その余次元は U の次元と一致し $n-1$ である。

また γ の近くでの軌道状態の位相型を調べるには,
 経数付微分同相 f の位相型がわかればよいのである。(Smale
 [] をみよ。)

3° 微分同相の b) 型固定点の分岐

前段に述べたことにより Σ は微分同相の固定点
 の分岐について述べる。a) 型擬双曲型固定点については
 1° と平行に論ずればよいので Σ は省略し, b) 型について
 論ずる。引きつづき $f: N \times V \rightarrow U$ (経数付の局所
 微分同相) を扱うのであるが, 記号の便のため $N \in \Lambda$ で,
 $V \in U$ で表わしておく。 $(\lambda_0, p) \in N \times V$ に対し, p は,
 f_{λ_0} の b) 型固定点とするのであるが, このとき前段の横断性の
 仮定は, $T_p f_{\lambda_0}$ が固有値 1 をもたないことから, 自動的に満

足され、固定点の軌跡 $\mathcal{F}$ は、部分多様体となる。さらに $\pi_1: \Lambda \times U \rightarrow \Lambda$ を、 λ -成分への射影とすると、 $\pi_1|_{\mathcal{F}}$ は、 (p, λ_0) に正則である。従って点 (λ_0, p) の近傍で $\mathcal{F}$ はある写像 $\Lambda \rightarrow U$ のグラフとなつてゐるのであるが、 $\Lambda \times U$ の局所座標 $(\lambda, x, y, z)^{*})$ を、次のようにとつておく。

(i) $\mathcal{F} = \{x=y=z=0\}$ (ii) 各 λ に対し、 λ の λ の level での x, y, z -平面は、各々、 $W^c(f_\lambda), W^u(f_\lambda), W^s(f_\lambda)$ に一致する。また、 $v: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ を、次の条件をみたす関数とする。 (i) $v(\lambda)$ は、 $T_{(\lambda, 0, 0, 0)} f_\lambda$ の固有値である。 (ii) v は C^{r-1} 級である。 (iii) $v(\lambda_0) = -1$ である。(このような関数 v の存在と一意性は明白である。) これより、 λ_0 の近くで、 $\lambda \mapsto E^\sigma(f_\lambda), \sigma = c, u, s$ は C^{r-1} 級であることがわかり、従つて上記の λ と x, y, z の局所座標が実際に存在することが示されるのである。

また、 v は λ_0 に正則であるとするれば、 Λ の局所座標として (v, λ_2) をとることが出来る。これを仮定する。 $f = (f^c, f^u, f^s)$ とおいて次の表現を得る。

$$f^c = vx + \alpha x^2 + \gamma x^3 + X$$

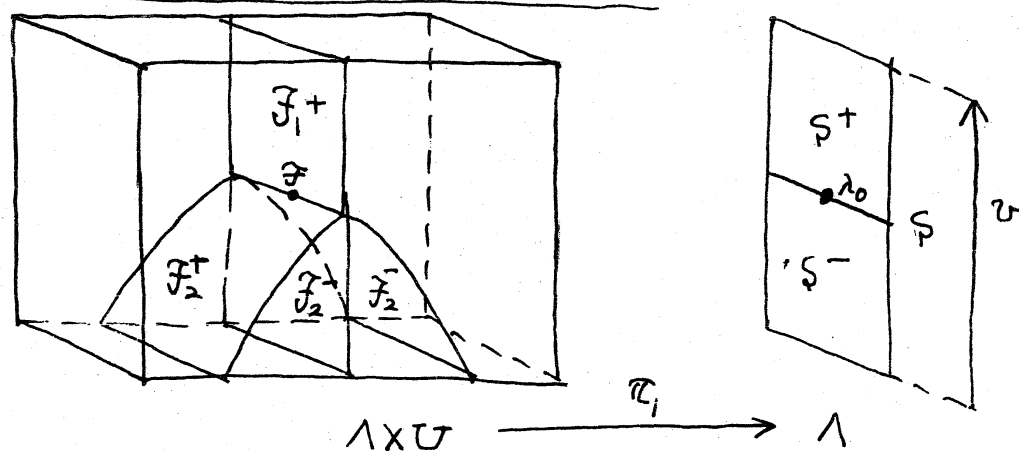
$$f^u = A \cdot y + Y, \quad f^s = B \cdot z + Z$$

*) x, y, z は、 λ に従局してゐる。

たゞし, α, γ は, $\lambda = (v, \lambda_2)$ の関数. A, B は, λ の行列値関数. λ して, X, Y, Z は (λ, x, y, z) の関数であり $(\lambda_0, 0, 0, 0)$ にて, 一階微分まで 0. X は, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^3}$ まで消えてゐる. さらに, 話をきめるため $\alpha^2 + \lambda$ はつねに正であるとしてよう.

Λ の部分集合を, $S := \{v = -1\}$, $S^+ = \{v \geq -1\}$ と定め, これらの $\pi|_S$ による像を, 各 $R, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1^+$ とかく. このとき,

(命題 2) (1) $\lambda \in S$ ならば, f_λ の位相型は, f_{λ_0} のそれと等しい. $\lambda \in S^+$ ならば, f_λ は, 双曲型の固定点を P の近くに, たゞ二つ有し, これらの指数は, S^+ と S^- で二つだけ異なる. (2) 次図のような部分多様体 $\mathcal{F}_2^+, \mathcal{F}_2^-$ が存在し, これらは周期 2 の周期軌の軌跡である. 各周期軌は双曲型であり, その指数は, f_{λ_0} の指数から定まる. f は $\mathcal{F}_2^+$ を $\mathcal{F}_2^-$ に移すのである.



証明 (1)は明白であろう。(2)のために, 方程式 $f \circ f = id$ を解こう。 y, z -成分の方程式は, 変数 y, z について解けるので, その解を x -成分の方程式に代入して,

$$x = v^2 x + (dv + dv^2)x^2 + (v\gamma + 2d^2v + v^2\gamma)x^3 + \text{高次項}$$
を得る。 $x \neq 0$ として両辺から x をはらったのち, 左辺を v につ
り, $(\lambda_0, 0, 0, 0)$ で微分して -2 を得るので, これを v につ
いて解くことができて, $v = v(x, \lambda_2)$ を得る。簡単な計算
により $v_x = 0, v_{xx} = -2(\gamma + d^2) < 0$ 。 以上より,
 $\mathcal{F}_2^+ \cup \mathcal{F}_2^- \cup \mathcal{F}_1 = \{y = y(v, \lambda_2, x), z = z(v, \lambda_2, x), v =$
 $v(x, \lambda_2)\}$ を得る。従って $\mathcal{F}_2^\pm$ は, 前頁の絵のようになっ
ていることがわかる。双曲性の証明は困難ではないので省略す
る。 ▣

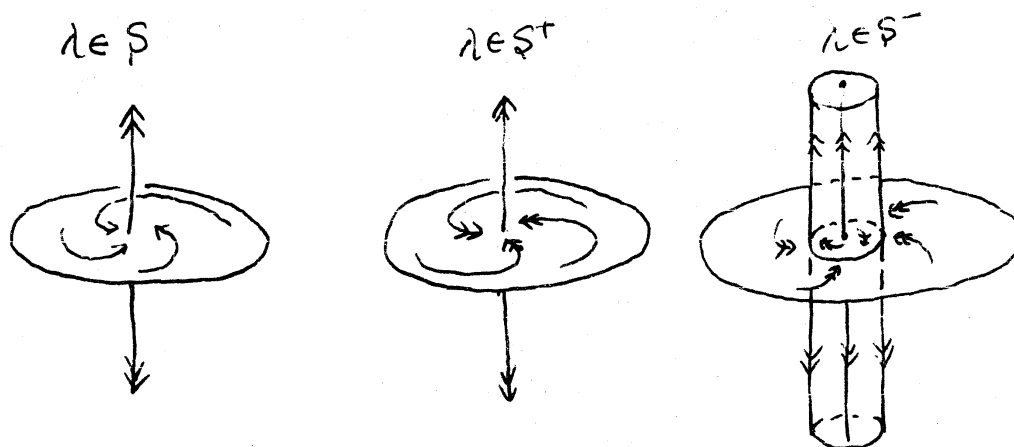
4° C型固定点の分岐

ひきつづき $f: \Lambda \times M \rightarrow M$ を, 径数付きの微分
同相とし, 固定点の軌跡上の点 (λ_0, x) をとる。

ここからは, 適当な局所座標系 (λ, x, y, z) に対して
 f は次のように表わされるものと仮定する。

$$f^C = v(\lambda)x + \gamma(\lambda)x|x|^2 + \text{高次項}$$

$$f^U = A(\lambda) \cdot y + \text{高次項}, \quad f^S = B(\lambda) \cdot y + \text{高次項}$$



命題3の証明の概略

(1) はなんでもない。(2) のために, 切断面 $\{g_m x = 0\}$ を考え, 微分同相 f_λ を拡張した 1 径数群の, この切断面における Poincaré 写像を考えれば, b) 型の擬双曲型固定点の分岐になっているので, 前段の結果を利用する。 ▢

§3. Genericity 定理.

こゝでは $\dim \Lambda = 1$ とし, $\Phi^r(\Lambda) = \{\xi: \Lambda \times M \rightarrow TM, C^r\text{-級}\}$ に C^r 位相を与えておく。 $r \geq 5$ とする。

(定理4) $\Phi^r(\Lambda)$ において, 次の性質は, generic である。

(1) ξ の特異点, 周期軌道はおべて双曲型もしくは擬双曲型であり, 擬双曲型のところで, a) 型か b) 型か c) 型かを問わず, 前節に用いた横断性の仮定が満たされ, 従って S は Λ の部

分多様体となっている。

(2) 各擬双曲型軌道に対する S は ($\dim \Lambda = 1$ の)
点であるが, 互いに交わらない。

(3) $\Lambda \times M_i$ 中を, (不安定多様体の軌跡は, *stratified*
set となっているが, さらには, 互に *stratified set* として
横断的である。

参考文献

[1] P. Brunovsky, On one parametre families of diffeomorphisms,
 Comment. Math. Univ. Carolinae 11 (1970), 3.

[2] S. Newhouse and J. Palis, Bifurcation of Morse-Smale dynamical systems, Dynamical Systems, ed. Peixoto, Academic press, N.Y., 1973, 303-366.

[3] ———, Cycles and Bifurcation Theorems, To appear.

[4] Sotomayer, Generic Bifurcations of Dynamical Systems, [2]と同じ本, 561-581.

[5] ———, Generic one parametre families of vector fields in two-dimensional manifolds, Publ. Math.

I. H. E. S.

[6] R. Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*,