

開水路断面変化部における流れの水力特性について (1)

——段上り部および段落ち部に関する実験的検討——

今本 博健・藤井 良啓

ON THE CHARACTERISTICS OF AN OPEN CHANNEL FLOW THROUGH PASSAGE OF CROSS-SECTIONAL VARIATION (1)

——Experimental Investigation of an Open Channel Flow through
Passage of an Abrupt Bed-Ascension or Depression——

By *Hirotake* IMAMOTO and *Yoshihira* FUJII

Synopsis

This paper deals with an open channel flow through an abrupt bed-ascension or depression. Characteristics of flow transition, separation region and velocity distribution near the position of bed-variation are investigated. The measurements of separation region were made by the technique of flow visualization with potassium permanganate tracer, and velocity measurements by a hot-film flowmeter of constant-temperature operation.

Experimental results obtained are as follows; 1) The transition of flow can not always be described by a simplified method of momentum analysis. 2) The length and the height of separation region formed near a bed-ascension or depression depend on many factors such as the height of bed-variation, up- and / or down-stream depth, Froude number and so on. 3) The vertical distribution of mean velocity near the bed-variation can not be approximated by the logarithmic law, and the energy and momentum coefficients are greater than unity. 4) The intensity of turbulence is high, and the maximum rate of turbulence energy dissipation in total energy loss reaches a few tens percent, which is several times of that of two-dimensional uniform flow.

1. は じ め に

一般に、河川には種々の断面変化部が存在するが、それらは流路の方向が変化するものと流水断面積が変化するものとに大別される。前者はさらに蛇行、弯曲などのように水平面内で流路方向が変化するものと路床勾配の変化などのように鉛直面内で変化するものとに分けられ、また後者は拡幅、縮幅部などのように水路幅方向に流水断面積が変化するものと路床面上昇、下降部などのように水深方向に変化するものとに分けられる。

このような断面変化部における流れのうち、管路については Gibson¹⁾, Archer²⁾, Shogenji et al³⁾ などにより、また開水路については、芦田^{4),5)}, 石原・志方^{6),7)} などにより研究が進められ、数多くの成果が挙げられているが、流れの内部構造など不明の点も多く、さらに詳細な検討が必要と考えられる。

開水路断面変化部における流れの水力特性を明らかにするには、一般に、つぎの事項についての検討が必要である。すなわち、1) 断面変化部における流れの遷移水面形、2) エネルギー損失の評価、3) 剥離域の特性、4) 平均速度分布特性、5) 乱れ速度の特性、などであって⁸⁾、これらのうち 1)～4) については従来の研究においても取り扱われているが、5) についてはほとんどふれられていない。

本研究は、開水路断面変化部における流れの水力特性を明らかにするための第一段階として、水路の路床面が急激に上昇あるいは下降するいわゆる段上りおよび段落ち部における流れを対象としたものであって、もっ

とも単純化された1次元運動量解析法により流れの遷移特性を明確に把握するとともに、断面変化部周辺に形成される剝離域の特性、平均および乱れ速度分布特性などについての実験的検討が行なわれている。なお、剝離域の計測には過マンガン酸カリウムをトレーサーとした flow visualization の手法が用いられ、また速度計測には定温度型のホットフィルム流速計が用いられている。

2. 開水路断面変化部における遷移の1次元解析

Fig. 1 に示されるような開水路段上り部および段落ち部の流れについての連続式および運動量式はつぎのように表わされる。すなわち、連続式は

$$q = h_1 u_1 = h_3 u_3 \dots\dots\dots (2.1)$$

また、断面Ⅰ～Ⅲ間の運動量式は

$$\begin{aligned} \rho \beta_3 h_3 u_3^2 - \rho \beta_1 h_1 u_1^2 &= \frac{1}{2} \rho g \lambda_1 h_1^2 \\ &- \frac{1}{2} \rho g \lambda_2 (2h_2 - \Delta h) \Delta h \\ &- \frac{1}{2} \rho g \lambda_3 h_3^2 + W \sin \theta - F_f \dots\dots\dots (2.2) \end{aligned}$$

となる。ここに、 β : 運動量補正係数、 λ : 圧力補正係数、 W : 断面Ⅰ～Ⅲ間の流体の重量、 F_f : 境界面に働く表面摩擦抵抗力、 ρ : 流体の密度、 g : 重力の加速度、 h : 水深、 Δh : 段上り部あるいは段落ち部の高さであって、段上り部については正、段落ち部については負とする、 q : 単位幅流量、 u : 流量速度、 θ : 路床勾配で、あり、添字は数字に示された断面における値を表わす。

(2.2) 式における重力項は緩勾配水路では無視され、また表面抵抗は形状抵抗に比し近似的に無視されるとして差し支えない。以下においては、簡単のため $\beta = \lambda = 1$ として開水路断面変化部における流れの遷移特性について検討する。

いま、断面Ⅰにおける水位が断面Ⅲでのそれより高い場合、断面変化部より上流側の路床面を基準とした断面Ⅱにおける水深 h_2 は

$$h_2 = h_1 \quad \text{for } h_1 \geq h_3 + \Delta h \dots\dots\dots (2.3)$$

と仮定され、逆に断面Ⅰにおける水位が断面Ⅲでのそれより低い場合、

$$h_2 = h_3 + \Delta h \quad \text{for } h_1 \leq h_3 + \Delta h \dots\dots\dots (2.4)$$

と仮定されるとすると、(2.1)～(2.4)式よりつぎの関係式が導かれる。

$$Fr_1^2 = \frac{h_3 \left\{ \left(1 - \frac{\Delta h}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{h_3}{h_1} \right)^2 \right\}}{2 \left(1 - \frac{h_3}{h_1} \right)} \quad \text{for } 0 < \frac{h_3}{h_1} \leq 1 - \frac{\Delta h}{h_1} \dots\dots\dots (2.5)$$

$$Fr_1^2 = \frac{h_3 \left\{ 1 - \left(\frac{h_3}{h_1} + \frac{\Delta h}{h_1} \right)^2 \right\}}{2 \left(1 - \frac{h_3}{h_1} \right)} \quad \text{for } \frac{h_3}{h_1} \geq 1 - \frac{\Delta h}{h_1} \dots\dots\dots (2.6)$$

あるいは

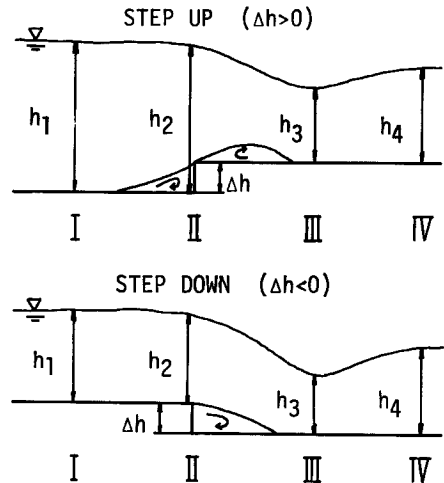


Fig. 1 Schematic illustration of flows around a step-up and a step-down of open channel.

$$Fr_3^2 = \frac{\frac{h_1}{h_3} \left\{ \left(\frac{h_1}{h_3} \right)^2 - \left(1 + \frac{\Delta h}{h_3} \right)^2 \right\}}{2 \left(\frac{h_1}{h_3} - 1 \right)} \quad \text{for } 0 < \frac{h_1}{h_3} \leq 1 + \frac{\Delta h}{h_3} \quad (2.7)$$

$$Fr_3^2 = \frac{\frac{h_1}{h_3} \left\{ \left(\frac{h_1}{h_3} - \frac{\Delta h}{h_3} \right)^2 - 1 \right\}}{2 \left(\frac{h_1}{h_3} - 1 \right)} \quad \text{for } \frac{h_1}{h_3} \geq 1 + \frac{\Delta h}{h_3} \quad (2.8)$$

ここに、 Fr は Froude 数を表わし、つぎのように定義されている。

$$Fr_1^2 = \frac{u_1^2}{gh_1}, \quad Fr_3^2 = \frac{u_3^2}{gh_3}$$

(2.5)~(2.8) 式の成立領域は $Fr^2 > 0$ の条件によりさらに限定され、 $1 - \Delta h/h_1 \leq h_3/h_1 \leq 1$ あるいは $1 \leq h_1/h_3 \leq 1 + \Delta h/h_3$ となるような段上り部の流れはきわめて不安定となり、また段落ち部については $1 < h_3/h_1 < 1 - \Delta h/h_1$ あるいは $1 + \Delta h/h_3 < h_1/h_3 < 1$ のとき不安定遷移となることが予想される。

Fig. 2 は段上り部を対象とし $\Delta h/h_3 = 0.5$ の場合について (2.5)~(2.8) 式より計算される h_1/h_3 と Fr_1 あるいは Fr_3 との関係を示したものであるが、この図よりつぎの事項が知れる。すなわち、 $0 < h_1/h_3 < 1$ の領域では h_1/h_3 が 0 から増加するにしたがって Fr_1 は減少し、 $h_1/h_3 = 0.7$ 付近において 1 より大なる極小値を示したのち逆に増加し、 h_1/h_3 が 1 に近づくとき無限に大きくなるのに対し、 Fr_3 は h_1/h_3 の増加とともに単調に増加し、 $h_1/h_3 = 0.5$ 付近で 1 となり、さらに h_1/h_3 が 1 に近づくとき無限に大きくなる。また $h_1/h_3 \geq 1 + \Delta h/h_3$ の領域での Fr_1 は、 h_1/h_3 の増加に伴って一旦増加し、 $h_1/h_3 = 2.4$ 付近において 1 より小なる極大値を示したのち減少し、 h_1/h_3 が十分大きくなると 0 に近づくのに対し、 Fr_3 は単調に増加し、 $h_1/h_3 = 1.9$ 付近で 1 を越え、さらに h_1/h_3 が大きくなるにしたがって無限に大きくなることが知れる。

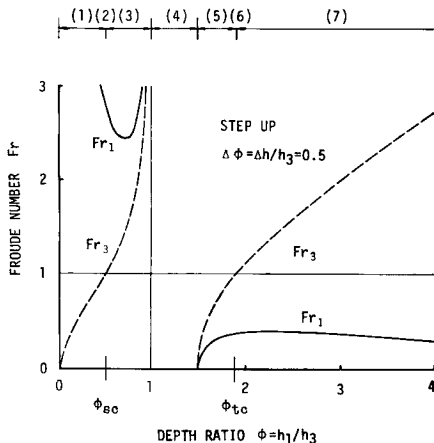


Fig. 2 Relation between depth ratio and Froude number of step-up flow.

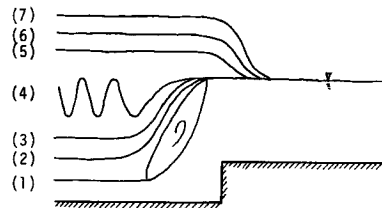


Fig. 3 Schematic illustration of flow transitions through a step-up section.

Fig. 2 を用いると Fr_1 あるいは Fr_3 より h_1/h_3 が知れることになるが、 $\Delta h/h_3$ の値によって Fr_1 のとりえない領域が存在するとともに、一般に、一定の Fr_1 あるいは Fr_3 に対し 2 種の h_1/h_3 が存在することが知れる。**Fig. 3** は **Fig. 2** より推定される段上り部周辺における流れの遷移状況を示したものであって、流れの遷移が **Table 1** に示されるような 7 種に分類され、断面変化部より上流側の流れが限界流となる場合は存在しないことが知れる。ただし、 $\Delta \phi = \Delta h/h_3$ であり、 $Fr_3 = 1$ となる 2 種の h_1/h_3 の値のうち h_1/h_3 の小さい方の値を ϕ_{sc} 、大きい方の値を ϕ_{tc} としている。

Table 1. Classification of flow transition through a step-up section.

$\phi = h_1/h_3$	Flow Transition	
1) $0 < \phi < \phi_{sc}$	Shooting Flow	→ (Hydraulic Jump) → Ordinary Flow
2) $\phi = \phi_{sc}$	Shooting Flow	→ Critical Flow
3) $\phi_{sc} < \phi < 1$	Shooting Flow	→ Shooting Flow
4) $1 \leq \phi < 1 + \Delta\phi$	Unstable Transition	
5) $1 + \Delta\phi \leq \phi < \phi_{tc}$	Ordinary Flow	→ Ordinary Flow
6) $\phi = \phi_{tc}$	Ordinary Flow	→ Critical Flow
7) $\phi > \phi_{tc}$	Ordinary Flow → (Control Section) → Shooting Flow	

一方、段落ち部については上流側断面Ⅰにおける水深を基準にとり、 $\Delta h/h_1 = -0.5$ の場合について h_3/h_1 と Fr_1 あるいは Fr_3 との関係を、段上り部についてと同様に、(2.5)~(2.8) 式を用いて計算すると **Fig. 4** のようになり、段上り部での計算結果において Δh の符号をかえるとともに、 Fr_1 および横軸の h_1/h_3 をそれぞれ Fr_3 および h_3/h_1 にかえると、段落ち部の場合にそのまま適用されることが知れる。**Fig. 4** を用いて段落ち部における流れの遷移を分類すると、**Fig. 5** のようになり、段上り部の場合と同様に **Table 2** に示されるような7種の遷移に分類されることが知れる。ただし、 $\Delta\phi = \Delta h/h_1$ である。

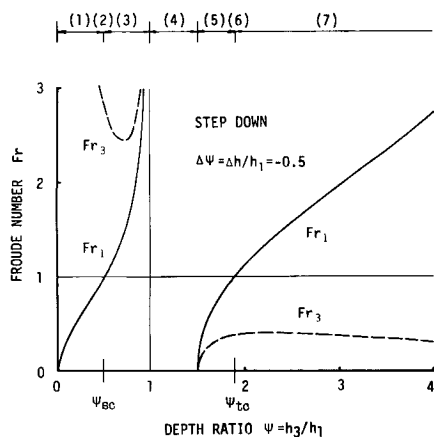


Fig. 4 Relation between depth ratio and Froude number of step-down flow.

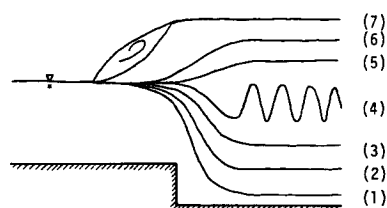


Fig. 5 Schematic illustration of Flow transitions through a step-down section.

Table 2. Classification of flow transition through a step-down section.

$\phi = h_3/h_1$	Flow Transition	
1) $0 < \phi < \psi_{sc}$	Ordinary Flow	→ (Control Section) → Shooting Flow
2) $\phi = \psi_{sc}$	Critical Flow	→ Shooting Flow
3) $\psi_{sc} < \phi < 1$	Shooting Flow	→ Shooting Flow
4) $1 \leq \phi < 1 - \Delta\phi$	Unstable Transition	
5) $1 - \Delta\phi \leq \phi < \psi_{tc}$	Ordinary Flow	→ Ordinary Flow
6) $\phi = \psi_{tc}$	Critical Flow	→ Ordinary Flow
7) $\phi > \psi_{tc}$	Shooting Flow → (Hydraulic Jump) → Ordinary Flow	

3. 開水路断面変化部における流れの局所機構に関する実験的検討

3.1 実験装置および方法

本実験に使用した水路は宇治川水利実験所に設置された幅 40cm, 深さ 20cm, 長さ 13m の合成樹脂製滑面直線水路で, その概略は Fig. 6 に示されるとおりである。路床勾配は水路の上下両端に設けられた油圧ジャ

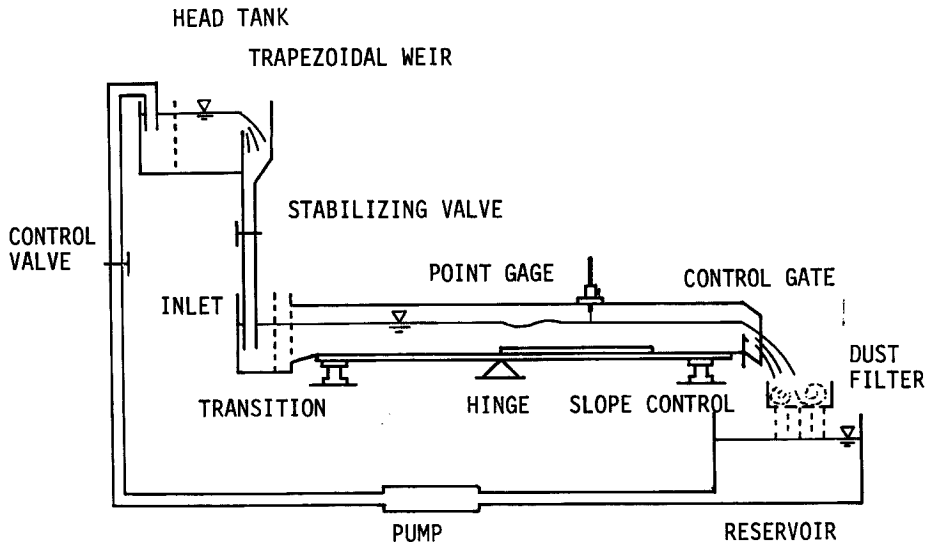


Fig. 6 Schematic illustration of experimental channel.

ッキにより $\pm 1/20$ の間で任意に設定できるようになっている。流水は, 低水槽, 送水ポンプ, 高水槽, 整流槽, 実験水路の間で循環されるようになっており, 流量は低水槽から高水槽に至る給水管途中に設けられた流量調節用バルブによって, 最大 20 l/sec まで調節することができる。また, 水深は実験水路下流端に設けられた水位調節用可動せきによって調節することができる。なお, 流量は高水槽内に設けられた流量測定用台形せきにより測定されるようになっている。

本実験水路は長方形断面の一樣水路であるが, 基準断面より上流側あるいは下流側の路床面上に種々の厚さの亚克力樹脂板を水路幅全体に敷きつめることにより, 段落ち部あるいは段上り部に関する実験が可能である。

水深の計測には $1/10\text{ mm}$ 読みのポイントゲージが用いられ, 水路の中心線に沿った計測が行なわれている。

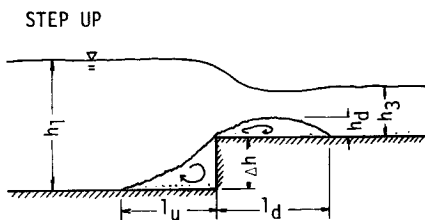


Fig. 7 (a) Schematic illustration of flow pattern around a step-up section.

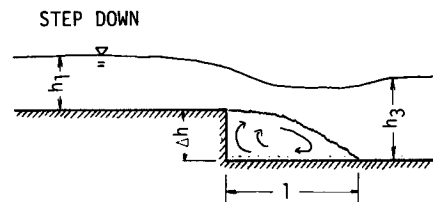


Fig. 7 (b) Schematic illustration of flow pattern around a step-down section.

また、断面変化部周辺に形成される剝離域の計測には過マンガン酸カリウムをトレーサーとした *flow visualization* の手法を採用し、顆粒状の過マンガン酸カリウムの溶解とともに現われる痕跡線を目視観測することにより剝離域の長さおよび高さの計測を行なった。すなわち、少量の顆粒状過マンガン酸カリウムを自由表面上にばらまくと、比重差により顆粒は沈降し路床面上に静止するが、時間の経過とともに溶解し、**Fig. 7** に例示されるように、線状となって流れ出し、いわゆる痕跡線が可視化されるようになる。したがって痕跡線の方を観測し、下流側を向くものと上流側を向くものとの境界位置より剝離域の長さが知れることになる。また、剝離域内に静止した顆粒からの痕跡線の鉛直上方への広がりより剝離域の高さが知れる。もちろん剝離域の広がりとは時間的に変動しているため、目視観測のみによって定量的な計測を行なうことは困難であるが、熟練によりかなり信頼性の高いデータを手軽に得ることができ、きわめて便利な方法である。なお、流速がかなり大きく、トレーサー源としての過マンガン酸カリウム顆粒が流失されやすい場合には路床面にうがった小孔に顆粒をつめ込み、トレーサーが確実に供給されるよう工夫されている。

一方、断面変化部周辺の平均および乱れ速度分布特性を明らかにするため速度計測器としてホットフィルム流速計を用いたが、この流速計の使用に際しては、流水の温度変化ならびに流水中に含まれる微細粒子のプロブへの付着に伴う応答特性の変化に留意しなければならない。本実験では、あらかじめ静水中でプロブを移動させる検定法により、種々のセンサー・流水間の温度差における流速計の出力電圧と流速との関係を求めておくこととともに、 $1/100^{\circ}\text{C}$ 読み水温計により計測された速度計測時の温度差に応じて、検定曲線より内挿された出力電圧・流速関係を用いることにより温度補正が行なわれている。また、微細粒子のプロブへの付着に伴う応答特性の変化を避けるため流水の清浄性が保持されるよう極力努力するとともに、微細粒子のもっとも付着しにくいコンカル型プロブが使用されている。

ホットフィルム流速計の出力電圧は一旦データレコーダに記録されたのち、A—D 変換器により数値化され、電子計算機で処理され、平均および乱れ速度、相関係数、スペクトルなどの統計量が解析されるようになっている。

3.2 遷移特性

断面変化部における遷移特性の解明には、すでに **2.** において述べたように、運動量解析法が通常用いられるが、運動量解析に現われる各項を適確に把握することが困難なため、近似的な解析結果がそのまま適用されるとは限らない。

Fig. 8 は段上り部および段落ち部における水面形の計測結果を示したもので、流量 $Q=8\ell/\text{sec}$ の一定とし、下流測水位を調節した場合が例示されている。図にみられるように、段上り部の流れでは僅かなせき上げにより最初はやや不連続的に (a) から (b) へと上・下流側の水位が上昇されるが、その後はせき上げ高に伴い (b) から (g) へと連続的な水位上昇がみられるのに対し、段落ち部では水位調節がなされない (a) の場

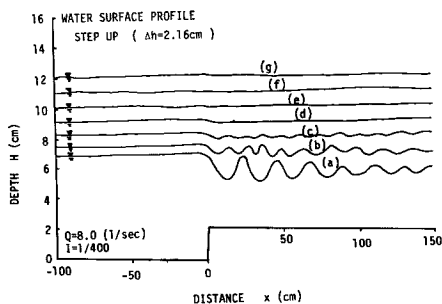


Fig. 8 (a) Water surface profile around a step-up section under several downstream conditions.

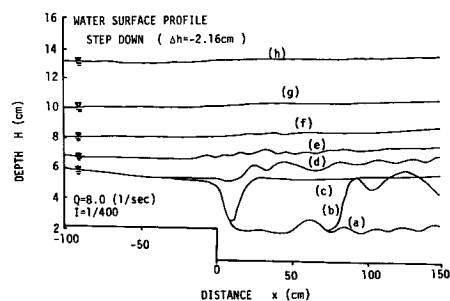


Fig. 8 (b) Water surface profile around a step-down section under several downstream conditions.

合の下流側の流れは射流となっているため、下流側水位の上昇の効果は水理跳水により段落ち部まで及ばず、さらに下流側水位を上昇させると (b) のように跳水位置が段落ち部に近づき、不安定な遷移を経て (c) から (d) の状態となり、その後は (d) から (h) へと連続的に水位が上昇する。

このような下流側水位調節に伴う流れの遷移特性を Table 1 あるいは Table 2 に示された運動量解析による結果と比較すると、段上り部における (a) は Table 1 の (7) の常流→(支配断面)→射流の場合に相当し、また (b) は (6) の常流→限界流に、(c)～(i) は (5) の常流→常流に相当することが知れる。一方、段落ち部における (a) は (3) の射流→射流に、(b)～(c) は (4) の不安定遷移に、(d)～(h) は (5) の常流→常流に相当することになる。

Fig. 9 は Fig. 8 に示した遷移特性が断面変化部に種々のアプローチをつけた場合にどのように変化するか

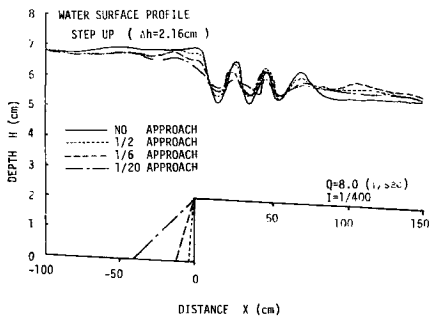


Fig. 9(a) Effect of transitional shape of step-up on water surface profile.

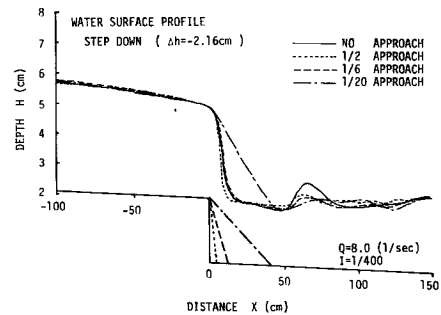


Fig. 9(b) Effect of transitional shape of step-down on water surface profile.

を示したものであって、アプローチとしては高さと基底長との比が 1:2, 1:6, 1:20 の 3 種が用いられている。図より知れるように、アプローチをつけることにより断面変化部近傍の流れには若干の変化がみられるが、全体的な変化は微小で、この程度のアプローチの敷設はそれほど効果的でないことが知れる。

一方、上・下流側の水深比と Froude 数との関係についての実験結果を示すと Fig. 10 のようになり、Fig. 10(a) の段上り部については 2.

に述べた近似的な運動量解析による結果と比較的よく一致しているが、Fig. 10(b) の段落ち部についてみると、 $\phi = h_3/h_1$ が 1 より小さな領域に示された下流側水位調節のない場合の実験値については $\Delta\phi = \Delta h/h_1$ の小さな場合を除いて適合性が悪く、また ϕ が 1 より大きな領域に示された下流側水位調節のある場合の実験値についても Fr_1 が小さく水面形が静水面に近づく場合を除いて適合性が悪くなっている。

このように、きわめて単純化された運動量解析法は、上・下流側の水深比と Froude 数との関係に関する限り、

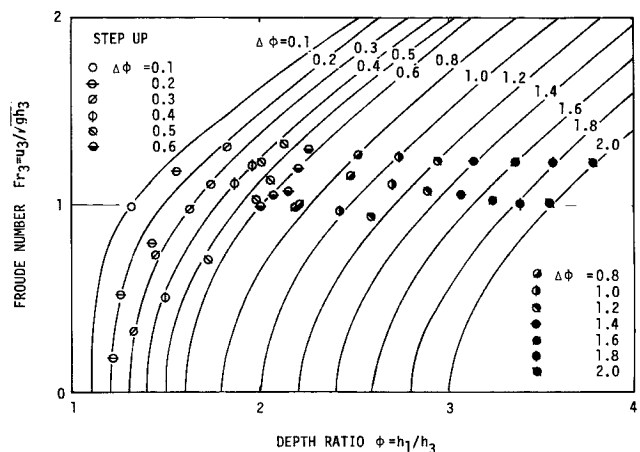


Fig. 10(a) Relation between depth ratio and Froude number of step-up flow.

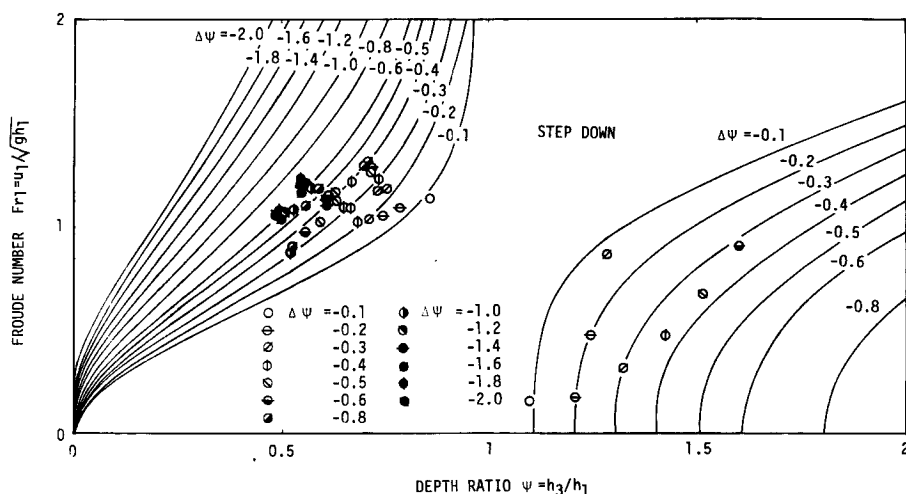


Fig. 10(b) Relation between depth ratio and Froude number of step-down flow

段上り部については比較的よく適用されるが、段落ち部にはほとんど適用されないことが知れる。

3.3 剥離域の特性

開水路断面急変部における流れをもっとも特徴づけるものとして、水路境界面からの流れの剥離現象が挙げられる。剥離境界面を定義するものとして instant stop boundary と separation boundary とがあるが⁴⁾、前者は瞬間的に流れが止まる境界を連ねたもので、この境界面より壁面側の領域では瞬間的な逆流の発生がみられる。また、後者は時間的な平均速度が0となる境界を連ねたもので、この境界面では瞬間的な逆流と順流とが同程度に生じている。

本実験においては、後者の separation boundary を対象とし、過マンガン酸カリウムをトレーサーとした flow visualization 手法により剥離域の大きさを目視観測により求めたが、目視観測のみによって剥離域の大きさを正確に知ることはかなり困難であって、本実験結果の定性的特性にはかなり信頼性があると思われるものの定量性についてはさらに検討の余地が残されている。

3.3.1 段上り部周辺の剥離域

Fig. 7 に示したように、一般に、開水路段上り部の流れでは上流側および下流側の2種の剥離域の発生がみられる。いま、上流側の剥離域の長さを l_u 、下流側の剥離域の長さを l_d 、高さを h_d とし、下流側水位調節のなされない場合におけるこれらの計測結果を示すと Fig. 11 のようになり、つぎの事項が知れる。

すなわち、Fig. 11(a) は種々の段上り高さ Δh および流量 Q のもとでの上流側剥離長 l_u の計測結果を $l_u/\Delta h$ と上・下流側水深比 h_3/h_1 との関係として示したものであるが、 Q を一定に保ち Δh を変化させた場合には Δh が増加するにしたがって h_3/h_1 が減少するとともに $l_u/\Delta h$ も減少し、 Δh を一定に保ち Q を変化させた場合には Q が増加するにしたがって h_3/h_1 は増加するが $l_u/\Delta h$ は逆に減少する傾向がみられる。また、一定の Q のもとでの Δh の増加に伴う $l_u/\Delta h$ の減少の度合いは Q の大きなものほど著しく、一定の Δh のもとでの Q の増加に伴う $l_u/\Delta h$ の減少の度合いは Δh の大きなものほど著しくなっている。さらに、 l_d および h_d を Δh で無次元化したものと h_3/h_1 との関係は、Fig. 11(b) および (c) にみられるように、 Q あるいは Δh に関係なく h_3/h_1 が増加するにしたがって $l_d/\Delta h$ および $h_d/\Delta h$ も増加することが知れる。また、 h_3/h_1 の増加に伴うそれぞれの増加の度合いは異なり、前者が h_3/h_1 のほぼ1乗に比例するのに対し後者はほぼ2乗に比例する傾向がみられる。

一方、下流側水位をせき上げた場合について検討するとつぎのようである。Fig. 12 は $\Delta h=2.16\text{cm}$ のも

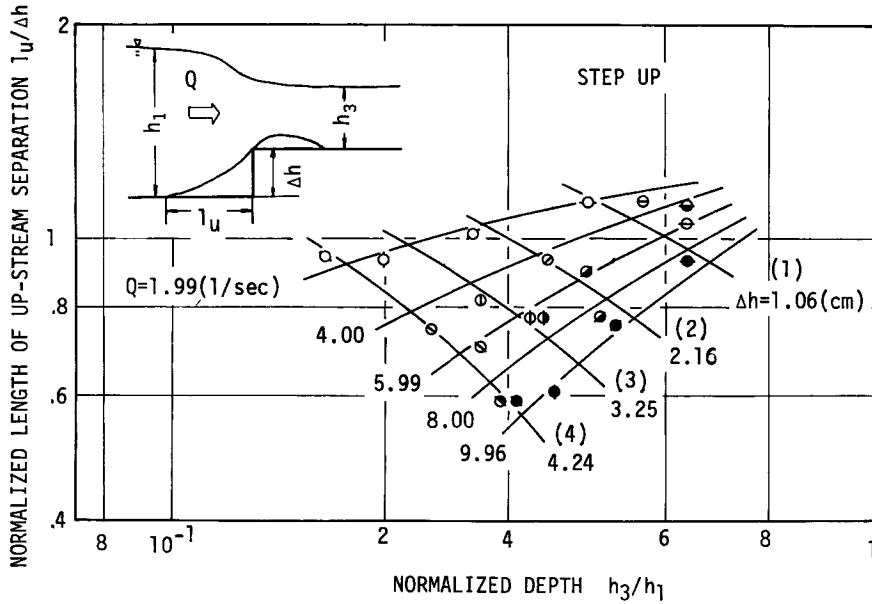


Fig. 11(a) Relation between normalized depth and normalized upstream separation length of step-up flow.

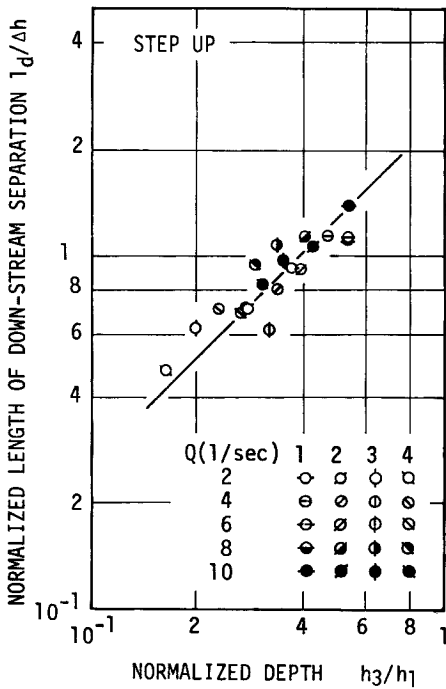


Fig. 11(b) Relation between normalized depth and normalized downstream separation length of step-up flow.

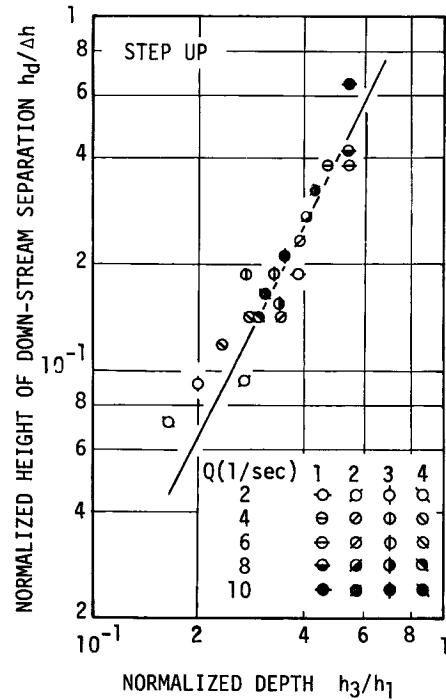


Fig. 11(c) Relation between normalized depth and normalized downstream separation height of step-up flow.

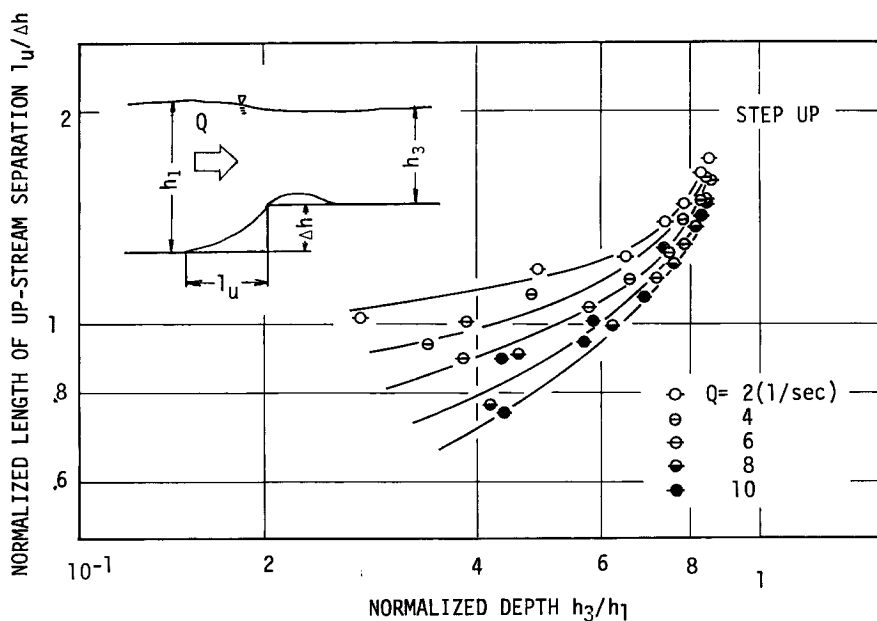


Fig. 12(a) Relation between normalized depth and normalized length of upstream separation.

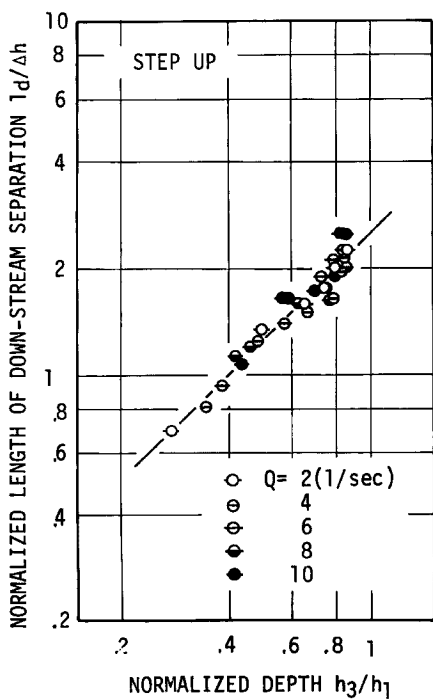


Fig. 12(b) Relation between normalized depth and normalized length of downstream separation.

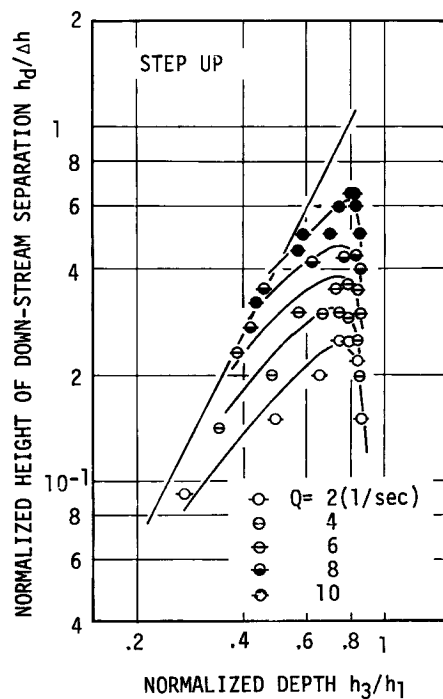


Fig. 12(c) Relation between normalized depth and normalized height of downstream separation.

のについて Q を一定に保ち下流側水位を増加させた場合の $\ell_u/\Delta h$, $\ell_d/\Delta h$ および $h_d/\Delta h$ と h_3/h_1 との関係を示したものであって, Q は $Q=2, 4, 6, 8$ および $10\ell/\text{sec}$ の5種類について調べられている。Fig. 12 (a) に示されるように, h_3/h_1 が増加するにしたがい $\ell_u/\Delta h$ も増加し, 増加の度合いは Q の大きなものほど著しいことが知れる。また, Fig. 12(b) によると $\ell_d/\Delta h$ は h_3/h_1 のほぼ1乗に比例して増加し, 下流側水位調節のなされない場合と同様の特性を示す。 $h_d/\Delta h$ については Fig. 12(c) に示されるように, h_3/h_1 が0.8より小さな領域では h_3/h_1 の増加にしたがって $h_d/\Delta h$ も増加するが, 増加の度合いは下流側水位調節のなされない場合に比しかなり小さく, h_3/h_1 が0.8より大きな領域では h_3/h_1 の増加に伴い $h_d/\Delta h$ は減少する傾向がみられる。

以上より知れるように, 開水路段上り部周辺に形成される剝離域のうち上流側の剝離長は水理条件によりかなり複雑に変化するが, 下流側の剝離長は主として下流側水深と段上り高との比によって定められ, また, 剝離高は下流側水位調節のない場合には下流水深と段上り高との比によって定まるが, 下流側水位調節のある場合にはかなり複雑な性状を示す。

3.3.2 段落ち部周辺の剝離域

断面急拡大部周辺に形成される剝離域の大きさについては従来より多くの研究がなされているが, 種々の構造物下流側に形成される剝離域の長さを示すと Fig. 13 のようであり^{8)~15)}, 接近流の特性により剝離長はかなり大幅に変化することが知れる。また芦田⁴⁾は開水路段落ち部における流れのうち常流→常流へと遷移する場合を対象とし, 段落ち高 $\Delta h (<0)$ と剝離域の長さ ℓ との比 $\Delta h/\ell$ は下流側圧力上昇率 $\Delta p/p_m = \{h_4 - (h_2 - \Delta h)\} / \{h_4 + (h_2 - \Delta h)\} / 2$ によって定まり, $\Delta h/\ell$ は $\Delta p/p_m$ が増加するにしたがって減少し, $\Delta p/p_m=0$ のとき $\Delta h/\ell=0.20$, $\Delta p/p_m=0.2$ のとき $\Delta h/\ell=0.07$ となることを実験的に明らかにしている。

本研究では段落ち部での遷移として常流→常流のほか射流→射流なども対象としたため, $\Delta p/p_m$ がつねに正の値を示すとは限らず, 芦田の整理法は採用されない。したがって, いま剝離長 ℓ と段落ち高 $\Delta h (<0)$ の絶対値との比 $\ell/|\Delta h|$ と下流側水深 h_3 と $|\Delta h|$ との比 $h_3/|\Delta h|$ との関係として下流側水位調節のなされない場合の実験値を整理すると

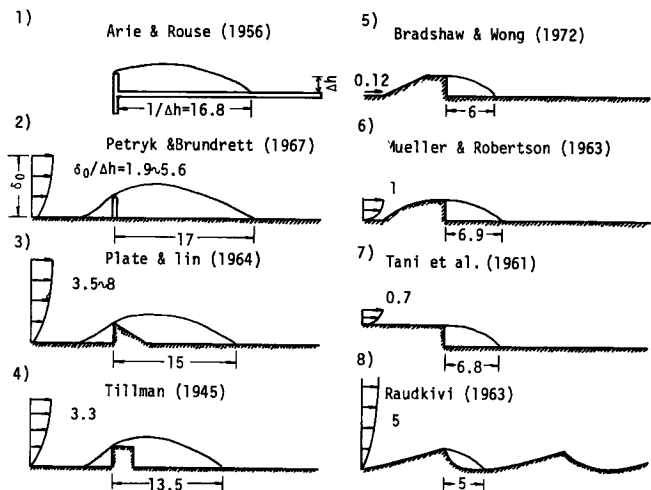


Fig. 13 Separation length formed in downstream of various kinds of structures.

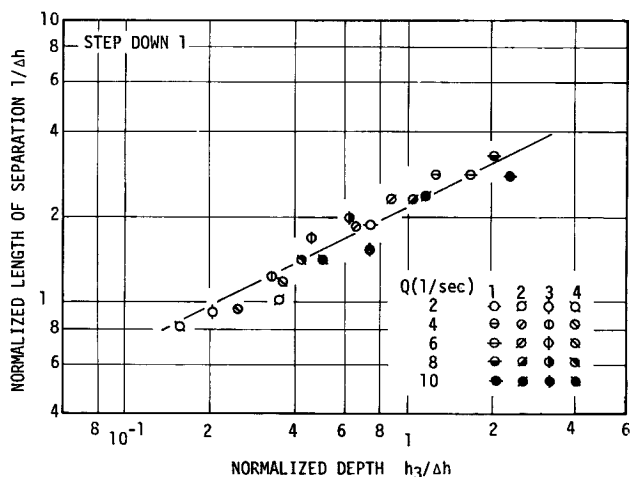


Fig. 14 Relation between normalized depth and normalized separation length of step-down flow.

Fig. 14 のようになる。図より知れるように、データにかなりのばらつきがみられるが、流量 Q あるいは $|\Delta h|$ にほとんど関係なく $l/|\Delta h|$ は $h_3/|\Delta h|$ の増加とともにほぼ $1/2$ 乗に比例して増加する傾向がみられる。

また、 $\Delta h=2.16\text{cm}$ の場合について Q を一定に保ち下流側水位をせき上げた場合の $l/|\Delta h|$ と $h_3/|\Delta h|$ との関係は、Fig. 15 に示されるように、せき上げ水位が小さい場合にはせき上げによって $l/|\Delta h|$ は増加するが、せき上げ水位が十分大きくなると $l/|\Delta h|$ は減少する傾向がみられ、 $l/|\Delta h| \approx 6$ となる。

以上より知れるように、開水路段落ち部下流側に形成される剝離域の大きさは下流側水深が増加するにしたがって増大するが、下流側水深と段落ち高との比が5以上では段落ち高のほぼ6倍程度となることが知れる。下流側水深の大きな場合の剝離長の特性は、Fig. 8 に示した谷¹⁰⁾の結果と類似しており、ほぼ妥当な結果と考えられる。

3.4 速度場の特性

開水路断面変化部では周辺に剝離域が形成されるとともに、剝離域からの渦の離脱に伴う大きな乱れ速度の発生がみられ、きわめて複雑な水理性状を呈している。以下においてはホットフィルム流速計による速度計測にもとづき、段上り部および段落ち部における流れの局所機構について検討する。

なお、速度計測は流量を $Q=3.45\text{l/sec}$ に保ち、段上り高 $\Delta h=2.16\text{cm}$ については下流側水位調節を行わない場合 (STEP UP 1) と、下流側水位を調節した場合 (STEP UP 2) との2種、段落ち高 $\Delta h=-2.16\text{cm}$ についても下流水位調節のない場合 (STEP DOWN 1) とある場合 (STEP DOWN 2) との2種、合計4種の流れを対象として行なわれている。

3.4.1 平均および乱れ速度分布

Fig. 3—11 は4種の流れについて断面変化部を基準に上・下流側 30cm にわたり 10cm ごとの断面で計測された平均速度 U 、乱れ速度 u' 、およびエネルギー逸散率 ϵ を表わしたものである。エネルギー逸散率については 3.4.3 において後述することとし、ここでは U および u' の分布特性についての検討を行なう。

まず、Fig. 16(a) に示された段上り部についてみると、STEP UP 1 のケースでの U の鉛直分布形状は段上り部上流側では路床面から自由表面に向かって単調に増加しているが、段上り部では路床面側ほど U が大きくなっており、下流側に進むにしたがい路床面近傍の U は減少するとともに、自由表面近傍の U は増加するため、 $x=10\sim 20\text{cm}$ 付近では最大流速点が自由表面よりかなり下った位置に現われることになる。 u' については全般的に路床面近傍ほど大きくなっているが段上り部より下流側では若干複雑な分布形状を示している。また、STEP UP 2 では下流側水位調節の効果により段上り部の影響が自由表面近傍にまで伝わらず、段上り部としての特性が半水深以下の領域で顕著となることが知れる。

一方、Fig. 16(b) に示された段落ち部については、STEP DOWN 1 の U の鉛直分布形状が段落ち部では路床面側ほど大きくなっているが、段落ち部より下流側では速やかに2次元流れの速度分布にもどっている。しかしながら、STEP DOWN 2 では剝離域がかなり下流まで広がり、路床面近傍では遷移に伴う諸特性

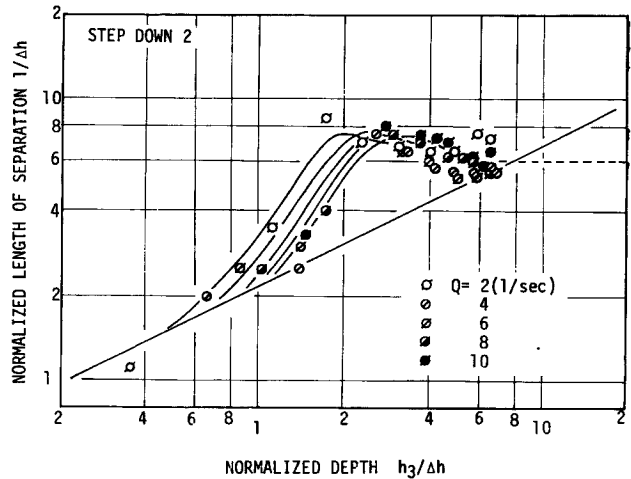


Fig. 15 Characteristics of separation region formed around step-down section under several downstream conditions.

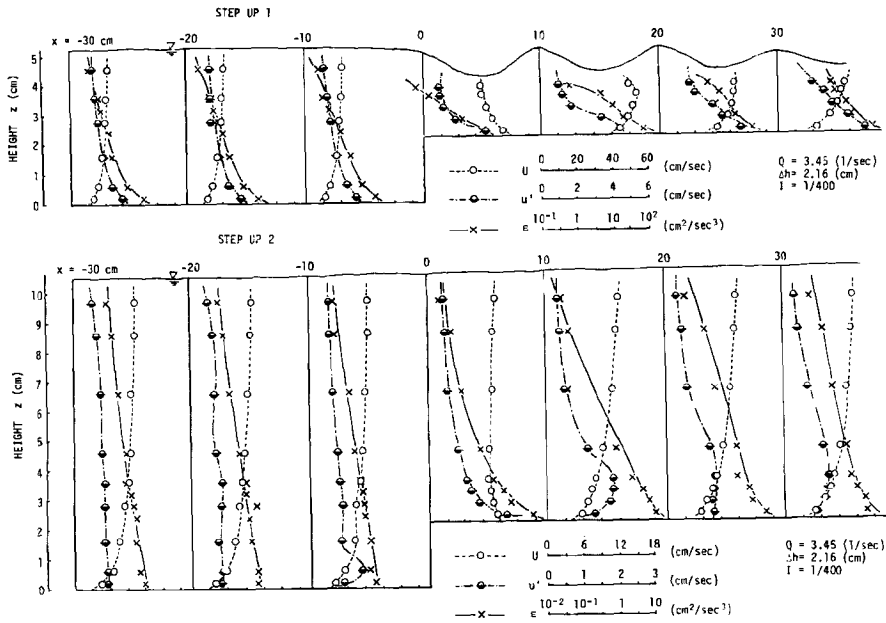


Fig. 16(a) Vertical distribution of mean velocity, turbulence velocity and energy dissipation ratio around step-up section.

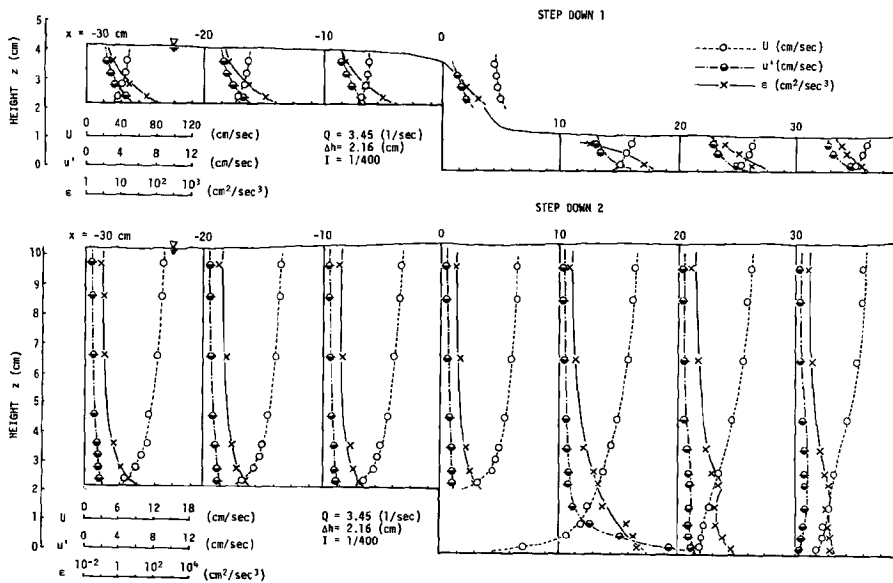


Fig. 16(b) Vertical distribution of mean velocity, turbulence velocity and energy dissipation ratio around step-down section.

が STEP DOWN 1 についてほど速やかに消えないことが知れる。

U の鉛直分布への対数則の適用性を検討するため各計測断面での路床面からの高さ z と U との関係を片対数表示すると Fig. 17 のようになり、 $x=0$ 以外の断面では下流側水位せき上げ時の路床近傍を除きかなりよく適用されることが知れる。ただし、 U 分布に対数則を適用して定められる摩擦速度 U_f は断面位置によって変化し、変化部より上流側ではほぼ一定値が保たれるが、変化部より下流側では一旦大きくなり極大値を示したのち減少する傾向が段上り、段落ち部のいずれについても認められる。

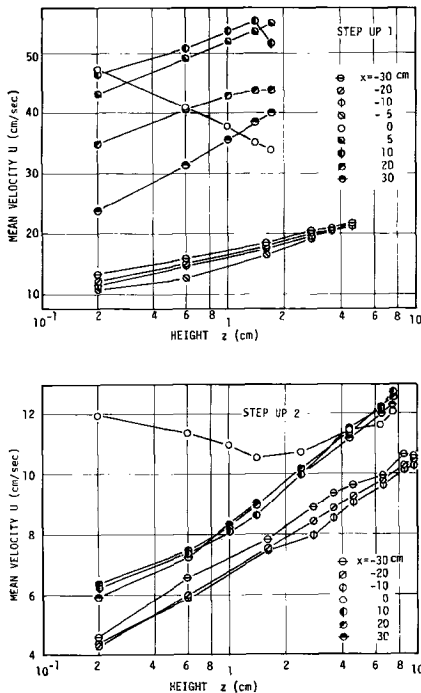


Fig. 17(a) Vertical distribution of mean velocity around step-up section.

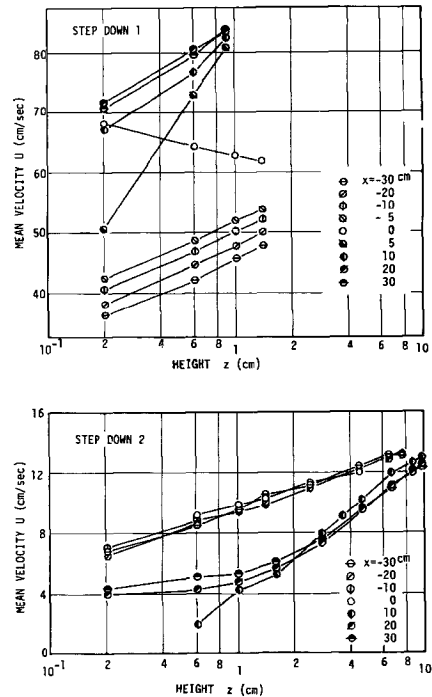


Fig. 17(b) Vertical distribution of mean velocity around step-down section.

一方、 U 分布より定められるエネルギー補正係数 α および運動量補正係数 β の断面位置による変化状況を調べると、Fig. 20 のようであり、断面変化部の直下流側で 1 よりかなり大きくなる傾向がみられ、とくに下流側水位をせき上げた STEP DOWN 2 については $x=10\text{cm}$ において $\alpha=1.44$, $\beta=1.20$ という大きな値を示すが、この断面での路床面近傍は剝離域内に含まれると考えられるため、これらの値の定量性については若干疑問であるといえる。ただし、断面変化部近傍において α および β の値が大きくなるということは Formica¹⁸⁾、芦田⁴⁾、石原・志方¹⁹⁾らによっても確かめられており、断面変化部の流れの普遍的特性と考えられる。

つぎに、 u' の鉛直分布について検討するとつぎのようである。2次元開水路流れにおける u' の分布則として今本¹⁷⁾はつぎのような普遍関数表示、すなわち、

$$\frac{u'}{U_f(U/U_f)^+} = 0.36 \left(\frac{z}{H} \right)^{-+} \dots\dots\dots (3.1)$$

を提案しており、(3.1) 式は路床面および自由表面近傍において実測値と若干のずれがみられるが、それ以

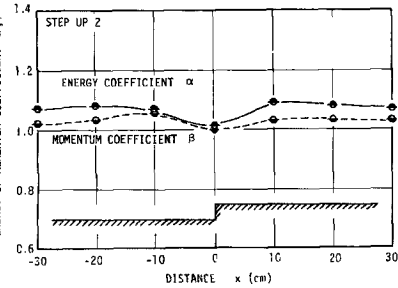
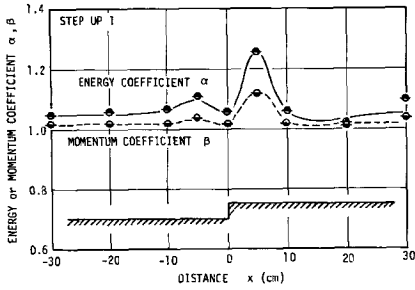


Fig. 18(a) Longitudinal distribution of energy correction coefficient and momentum correction coefficient around step-up section.

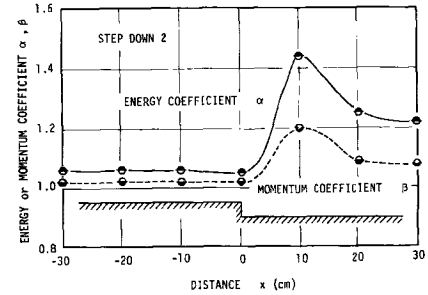
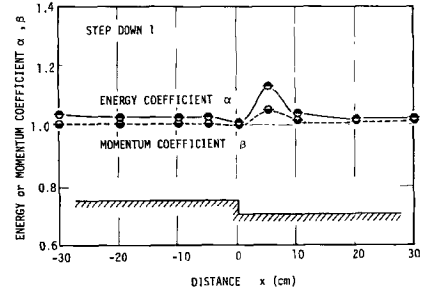


Fig. 18(b) Longitudinal distribution of energy correction coefficient and momentum correction coefficient around step-down section.

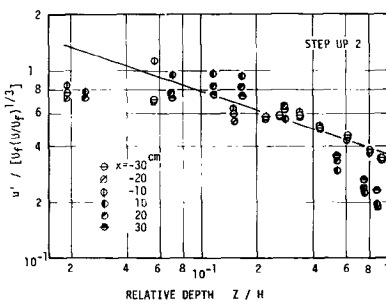
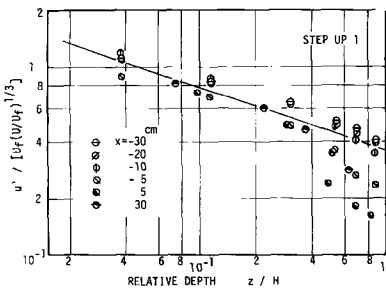


Fig. 19(a) Characteristics of vertical distribution of turbulence velocity around step-up section.

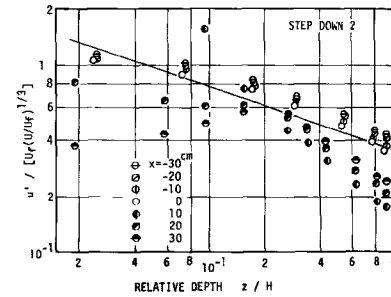
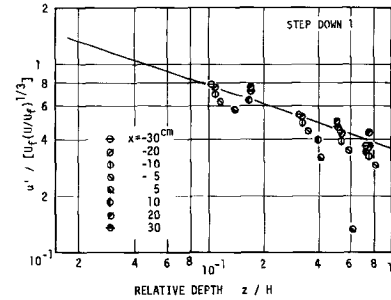


Fig. 19(b) Characteristics of vertical distribution of turbulence velocity around step-down section.

外の領域ではかなり広範囲の水利条件のもとで成立することが実験的にも明らかにされている¹⁸⁾。本実験結果を (3.1) 式と比較するには摩擦速度 U_f が必要であるが、 U_f として先に述べた U 分布への対数則の適用により得られる値を用いて整理すると Fig. 19 のようになる。 U 分布に対数則が適用されない場合には U_f が定まらないため、このような断面での計測結果は Fig. 19 では省略されている。この図より知れるように、計測値はかなりのちらばりをみせるが、全体的に断面変化部より下流側では自由表面に近づくにしたがって (3.1) 式より著しく $u'/U_f(U/U_f)^+$ は減少し、とくに下流側水位がせき上げられた STEP UP 2 および STEP DOWN 2 では路床面近傍において (3.1) 式より小さくなる傾向が認められる。

以上のように、 U および u' 分布を 2 次元流れの場合と比較すると、断面変化部の近傍を除いてかなり一致する傾向が認められ、これらの分布特性から判断すると、断面変化部の流れとしての特性は変化部近傍のみにいて顕著となるといえる。

3.4.2 乱れ速度のスペクトル特性

乱れ速度の周波数成分ごとの特性をみるため、サンプリング周波数 f_s として $f_s=20\text{Hz}$ および 160Hz の 2 種のものを用いて計算されたスペクトル $S(f)$ の一例を示すと Fig. 20 のようである。Fig. 20 の (a)~(d) の比較より知れるように、(d) の STEP DOWN 2 を除いて $x=-20, 0$ から 20cm の断面へとスペクトル密度は大きくなる傾向が見られる。また、低周波数領域での $fS(f)$ は f の増加とともに 1 あるいは 1 よりやや小さな勾配で増加するが、周波数が高くなるにしたがい $-2/3$ の勾配で減少し、さらに周波数の高い領域では減少の度合いを増し -2 の勾配となる傾向が認められる。なお、場合によっては -2 の勾配で減少する領域より高周波数の領域で -6 の勾配で減少する傾向のみられることがある。このようなスペクトル特性は Kolmogorov^{19)~21)} の相似則として知られる慣性領域の $-5/3$ 乗則 (図では縦軸に $fS(f)$ がとられているため勾配 $-2/3$ の領域が対応する、以下同じ) ならびに粘性領域の -3 乗則あるいは -7 乗則の成立性を示すものであって、断面変化部の流れでも中間周波数以上の周波数領域の乱れについては局所的等方性乱れとして

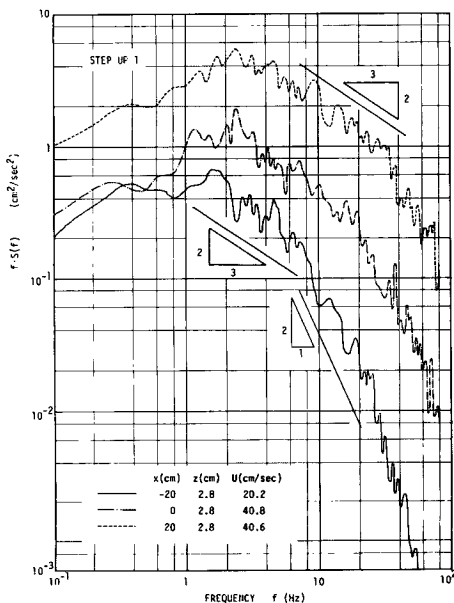


Fig. 20(a) Spectrum of turbulence velocity around step-up section.

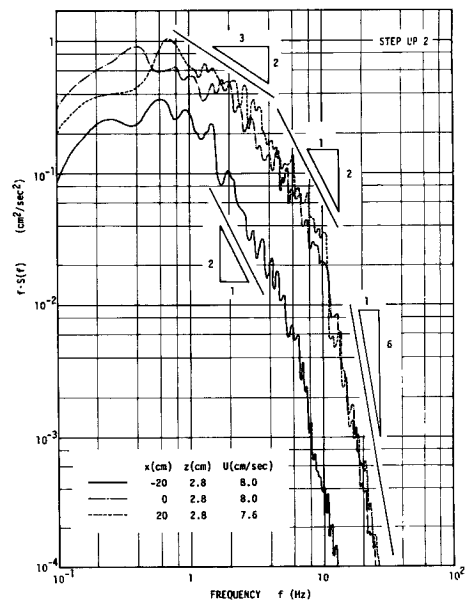


Fig. 20(b) Spectrum of turbulence velocity around step-up section.

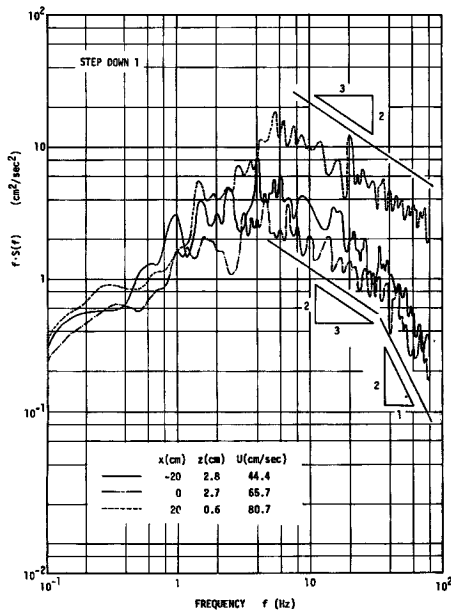


Fig. 20(c) Spectrum of turbulence velocity around step-down section.

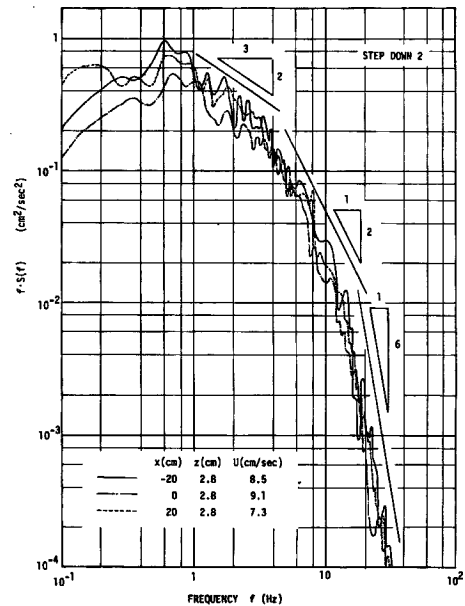


Fig. 20(d) Spectrum of turbulence velocity around step-down section.

取り扱えることが知れる。ただし、中間周波数以上の領域とみなされる周波数領域は各ケース、断面位置ごとに異なっている。

3.4.3 乱れエネルギー逸散率

いま、中間周波数領域のスペクトルに凍結乱流の仮定を用いて書き直された慣性領域の $-5/3$ 乗則、すなわち、

$$S(f) = S_\epsilon \left(\frac{U_\epsilon}{2\pi} \right)^4 f^{-5/3} \quad (3.2)$$

を適用し、エネルギー逸散率 ϵ を算定することにする。ただし、(3.2) 式におけるスペクトル定数 S_ϵ は普遍定数であって、 $S_\epsilon = 0.47$ 程度である。

Fig. 21 は (3.2) 式に基づいて算定された ϵ を、 u' についてと同様に、 H と、 U 分布への対数則の適用より得られた Uf を用いて基準化し、路床面からの高さとの関係を示したものであるが、2次元開水路流れについて導かれた普遍関数表示¹⁸⁾、すなわち、

$$\frac{\epsilon}{Uf^3/H} = 0.35 \left(\frac{z}{H} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

と比較すると、路床面近傍では (3.3) 式より大きな値を示し、自由表面近傍では逆に小さくなっている。ただし、断面変化部の上流側での実験値は路床面近傍から自由表面近傍まで全体的に (3.3) 式より大きくなっており、断面変化部に近づくにしたがって減速状態にある流れでは乱れエネルギーの逸散もまた大きくなることが知れる。

このような乱れエネルギーの逸散が流れ全体のエネルギー損失に占める割合をみるためにつぎのような算定を試みる。

Fig. 22 に示されるように L だけ離れた断面 I、II 間で逸散されるエネルギーのうち面積要素 dA ($=dy \cdot$

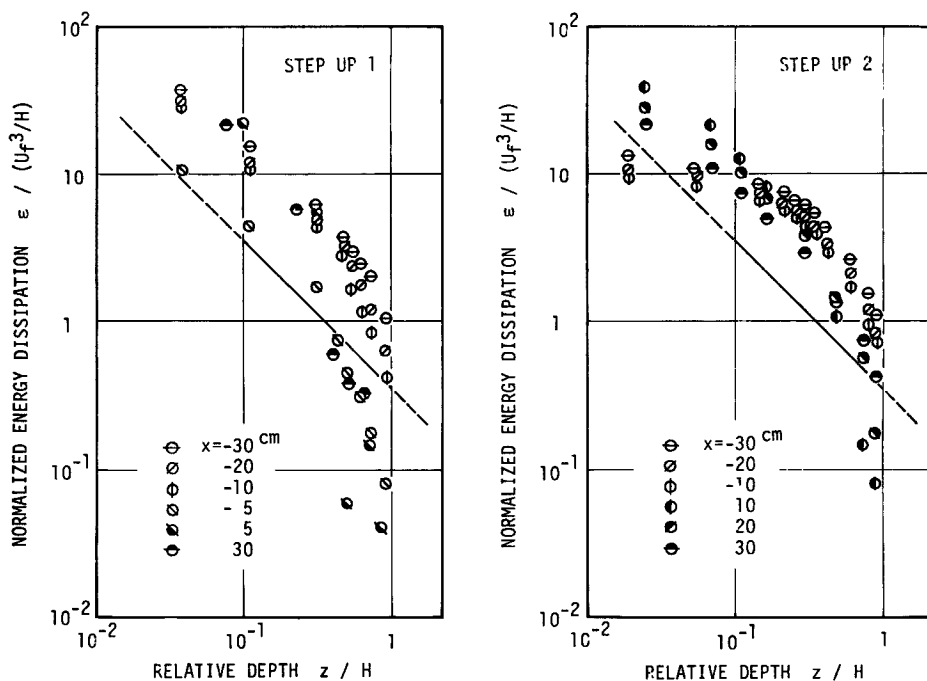


Fig. 21(a) Characteristics of vertical distribution of energy dissipation rate around step-up section.

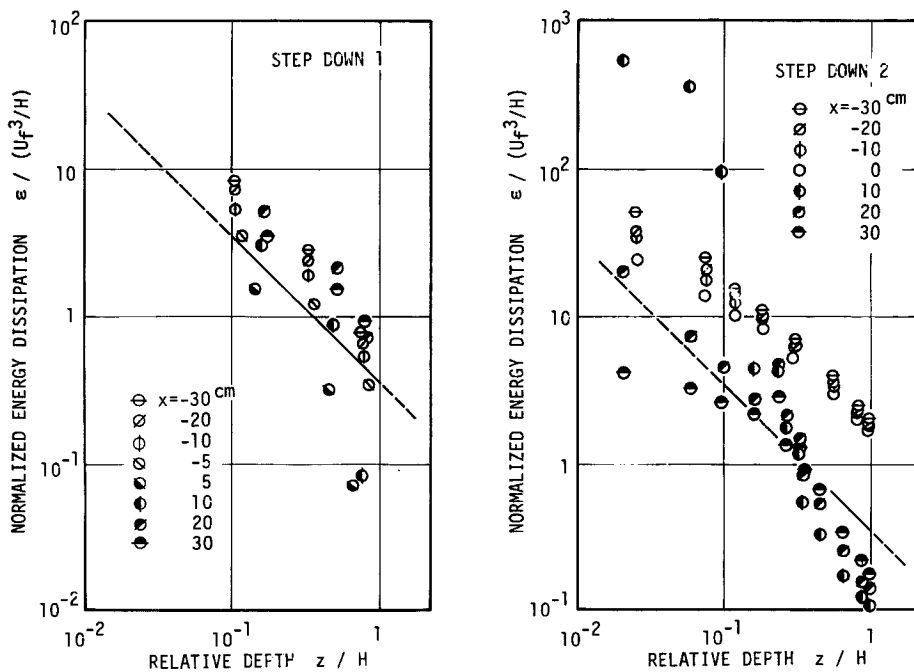


Fig. 21(b) Characteristics of vertical distribution of energy dissipation rate around step-down section.

dz を通るもの dE_d はつぎのように表わされる。

$$dE_d = (\rho \cdot L \cdot dA) \left(\frac{L}{U} \right) \epsilon \dots \dots \dots (3.4)$$

ここに、 ρ は流体の密度を表わす。(3.4) 式を z について路床面から自由表面まで積分し、断面 I、II 間に含まれる流体の総重量との比をとると乱れエネルギー逸散水頭 h_d が得られ、 h_d を L で割ると単位距離当りの逸散水頭すなわち乱れエネルギー逸散勾配 I_d となり、つぎようになる。

$$I_d = \frac{h_d}{L} = \frac{1}{gH} \int_0^H \frac{\epsilon}{U} dz \dots \dots \dots (3.5)$$

一方、流れ全体のエネルギー損失勾配 I_e は $I_e = U_f^2 / gH$ と表わされるから、結局、乱れエネルギーの逸散が占める割合 I_d / I_e はつぎようになる。

$$\frac{I_d}{I_e} = \int_0^1 \left(\frac{\epsilon}{U_f^3 / H} \right) / \left(\frac{U}{U_f} \right) \cdot d \left(\frac{z}{H} \right) \dots \dots \dots (3.6)$$

2次元開水路流れについて(3.6)式の ϵ には(3.3)式を用い、 U 分布にはBlasiusの1/7乗則を用いると、つぎの結果が得られる。

$$\frac{I_d}{I_e} = \frac{0.280}{(U_f H / \nu)^+} \left\{ \frac{1}{(z_0 / H)^+} - 1 \right\} \dots \dots \dots (3.7)$$

ここに、 z_0 は粘性底層の厚さを表わす。(3.7)式には主として $z/H > 0.1$ の領域を対象に導かれた(3.3)式を拡張適用しているなどの問題があるが、 $U_f H / \nu = 10 \sim 10^3$ 、 $z_0 / H = 10^{-2} \sim 10^{-1}$ として(3.7)式より I_d / I_e を

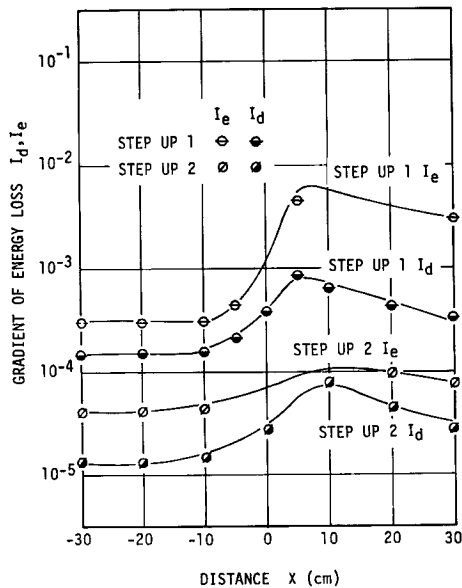


Fig. 23(a) Longitudinal distribution of a gradient of energy loss due to turbulence and of total loss around step-up section.

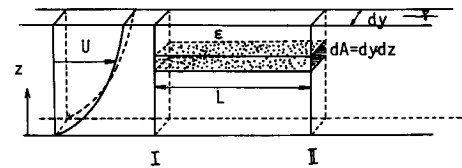


Fig. 22 A method of evaluation of turbulence energy dissipation.

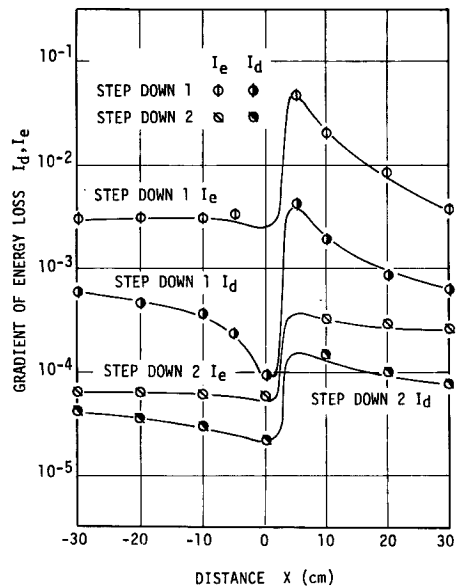


Fig. 23(b) Longitudinal distribution of a gradient of energy loss due to turbulence and of total loss around step-down section.

推定すると数%~10数%となり、2次元開水路流れについては乱れエネルギー逸散が全体のエネルギー損失に占める割合はそれほど大きくないことが知れる。

これに対し、本実験で得られた ϵ および U を用いて (3.5) 式の数値積分を行ない、 I_d を求めると Fig. 23 に示されるようになる。同図には U 分布に対数則を適用して得られる U_f より推定される I_e も併示されているが、これらの図よりつぎの事項が知れる。まず、段上り部については I_d および I_e のいずれも、下流側水位調節の有無に関係なく、上流側から段上り部に近づくにしたがって若干増加し、段上り部よりやや下流側の断面で極大値を示したのち下流側ほど減少する傾向がみられる。これに対し、段落ち部の I_d および I_e については、やはり下流側水位調節の有無に関係なく、上流側から段落ち部に近づくにしたがって段上り部の場合とは逆に若干減少し、段落ち部近傍で急激に上昇し極大値を示したのち下流側ほど減少する傾向がみられる。また、下流側水位調節のなされない場合の I_e についてみると、段上り部については下流側で路床勾配 1/400 に近づく傾向がみられるのに対し、段落ち部については上流側でこの値に近づく傾向があることが知れる。さらに下流側水位をせき上げた場合、速度が小さくなり、流れ全体の失うエネルギー量は著しく減少され、 I_e が急減することになる。

以上の I_d および I_e の計測値を用い、両者の比をとり全エネルギー損失に占める乱れエネルギー逸散の割合を示す I_d/I_e という量を計算すると Fig. 24 のようになる。この図より明らかなように、下流水位調節

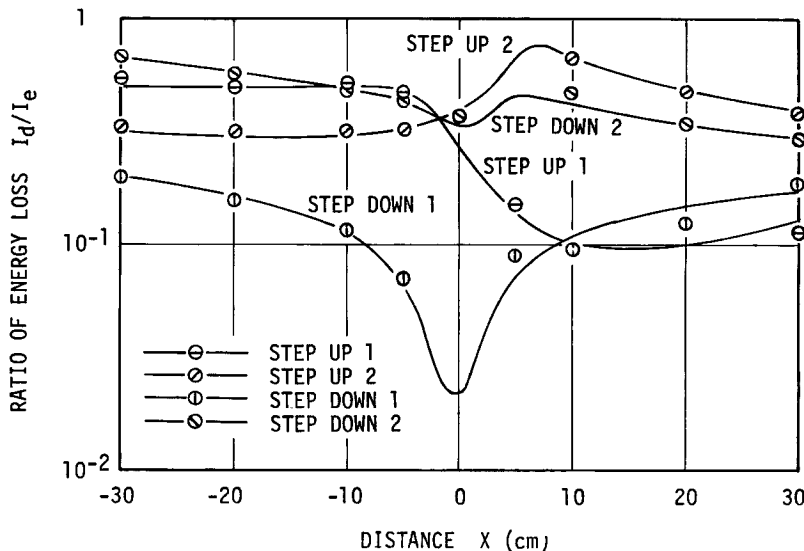


Fig. 24 Ratio of energy loss due to turbulence dissipation to total energy loss around step-up and step-down section.

がなされない場合には段上り部のいずれについても変化部に近づくにしたがって I_d/I_e は一定値を保つかやや減少する傾向があり、変化部より下流側で極小値を示す。ただし、段落ち部の場合の I_d/I_e の変化は段上り部のそれに比しかなり顕著であり、また極小値となる位置も変化部近傍となっている。また、下流側水位をせき上げた場合には断面位置に伴う I_d/I_e の変化は小さくなり、変化部下流側で極大値を示している。

このように I_d/I_e は段落ち、段上りの区別あるいは下流側水位調節の有無によりかなり複雑に変化するが、下流側水位調節がなされない場合、断面変化部近傍におけるエネルギー損失は形状抵抗が支配的となるのに対し、下流側水位がせき上げられた場合、形状抵抗の大きさが急減するため相対的に乱れエネルギー逸散の占める割合が大きくなり、とくに変化部近傍の下流側では剥離域からの渦の離脱効果により I_d/I_e が極大値を

示すことになるものと思われる。

なお、Fig. 24 に示された I_d/I_e の値を 2 次元流れについて導かれた (3.7) 式の結果と比較すると、後者の数%~10数%という値に対し、前者は本実験ケースでも最大70%に達しており、断面変化部における流れの水理特性を解明するためには乱流現象の解明が重要であるといえる。

4. 結 論

本研究は、開水路断面変化部における流れの水理特性を解明するための基礎として、段上り部および段落ち部の 2 種の断面変化部を対象とし、運動量解析法により断面変化部周辺の流れの遷移特性について若干の検討を加えるとともに、断面変化部周辺における流れの局所機構を明らかにするため、過マンガン酸カリウムをトレーサーとした flow visualization 手法により変化部周辺に形成される剝離域の特性について実験的検討を加え、また、ホットフィルム流速計による速度計測を行ない平均および乱れ特性を明らかにしようとしたものである。

本研究により明らかとなった事項を列挙するとつぎの通りである。

- 1) 断面変化部における流れの遷移の運動量解析において、運動量項および圧力項のみを取り上げ、重力項、表面摩擦抵抗項などを無視するとともに運動量補正係数、圧力補正係数を 1 とした取扱いでは、断面変化部における圧力項をいかに評価するかということが問題となる。
- 2) 本研究では断面変化部における水位として、上・下流側の水位差が正の場合は上流側の水位に、負の場合には下流側の水位に等しいと仮定したが、この仮定はかなり過大評価であり、段上り部における上・下流側水深比と Forude 数の記述にはかなりの精度で適用されるが、段落ち部についてはほとんど適用されない。
- 3) 段上り部周辺に形成される剝離域のうち、上流側剝離域の長さは水理条件によってかなり複雑に変化するが、下流側剝離域の長さおよび高さは主として上・下流側の水深比に支配される。ただし、下流側水位のせき上げがある場合、剝離高は極大値を示したのち減少するが、剝離長についてはせき上げのない場合と同じ関係によって記述される。
- 4) 段落ち部下流側に形成される剝離域の長さは下流側水深と段落ち高との比に支配され、剝離長と段落ち高との比は下流側水深と段落ち高との比のほぼ $1/2$ 乗に比例する。ただし、下流側水位をせき上げると剝離長は段落ち高のほぼ 6 倍となり、剝離長の増加には限界がある。
- 5) 断面変化部の流れにおける平均速度の鉛直分布は断面変化部近傍を除くと対数則の適用が近似的に許され、2 次元流れの結果を利用して水深、摩擦速度などの基本的水理量より乱れ特性量を推定することもある程度可能である。ただし、摩擦速度は断面位置によってかなり変化し、対数則より定義されないこともあり、このような推定がつねに可能であるとはいえない。
- 6) 断面変化部における流れのスペクトルには慣性領域および粘性領域とみなされる周波数領域が存在し、このような周波数領域では局所的等方性乱れの概念の適用が可能である。
- 7) 乱れ速度のスペクトルより得られるエネルギー逸散率を用いて、流れ全体のエネルギー損失に占める乱れエネルギー逸散の割合を推定すると、水理条件により大きく変化するが、全般的に 2 次元流れでの割合、すなわち、数%から10数%という値に比しかなり大きく、断面変化部の流れの水理特性の解明における乱流構造解明の重要性が理解される。

以上は本研究で行なわれた限られた実験結果より類推される事項について述べたものであるが、今後さらに広範囲の水理条件についての検討を行ない。開水路断面変化部における流れの普遍的な水理特性の解明に努めたい。

最後に、本研究の遂行に際し、実験およびデータ整理に終始熱心な協力をいただいた大学院生久下俊夫氏ならびに池野秀嗣氏に深く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Gibson, A. H.: The conversion of kinetic energy in the flow of water through passage having divergent boundaries, Engineering, Vol. 93, 1912.
- 2) Archer, W. H.: Experimental determination of loss of head due to sudden enlargement in circular pipes, Trans. ASCE, 1913.
- 3) Shogenji, K., K. Tanaka, T. Omori and I. Naramoto: Experiments on the flow of water through diverging passage of rectangular cross section, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol. 4, 1926.
- 4) 芦田和男・荒木民哉: 開水路断面急拡部における水理に関する研究(1), 建設省土木研究所報告, 101号, 1964, pp. 99~112.
- 5) 芦田和男: 開水路断面急拡部の水理に関する研究(2), 建設省土木研究所報告, 1960, pp. 133~155.
- 6) 石原藤次郎・志方俊之: 開水路急拡部の水理学的性状に関する研究, 土木学会論文集, 第128号, 1966, pp. 12~28.
- 7) 石原藤次郎・志方俊之: 開水路急縮部の水理学的性状に関する研究, 土木学会論文集, 第138号, 1967, pp. 30~38.
- 8) Arie, M. and H. Rouse: Experiments on two-dimensional flow over a normal wall, Jour. Fluid Mech., Vol. 1, 1956, pp. 129~141.
- 9) Petryk, S. and E. Brundrett: Department of Mechanical Engineering, University of Waterloo, Res. Rep. No. 4, 1967.
- 10) Plate, E. and C. W. Lin: Colorado State University Rept. CER-65-EJP-14, AD-614067, 1964.
- 11) Tillman, W.: British Min. of Aircraft Prod. Völknerode Translation MAP-VG34-45T, 1945.
- 12) Bradshaw, P. and Y. F. Wong: The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer, Jour. Fluid Mech., Vol. 52, 1972, pp. 113~135.
- 13) Müller, T. J. and Robertson, J. M.: Modern Developments in Theor. Appl. Mech. 1, 1963.
- 14) Tani, I., M. Iuchi and H. Komoda: Aero. Res. Inst. University of Tokyo, Rep. No. 364, 1961.
- 15) Raudkivi, A. J.: Study of sediment ripple formation, Proc. ASCE, Vol. 89, HY6, 1963, pp. 15~33.
- 16) Formica, G.: Esperienze preliminari sulle perdite di carico nei canali, devute a cambiamenti di sezione, l'Energia Electrica, Vol. 32, 1955.
- 17) 今本博健: 開水路流れにおける乱れの基本的特性について, 土木学会論文報告集, 第197号, 1972, pp. 83~91.
- 18) 今本博健・浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの基本的特性について, 第19回土木学会水理講演会論文集, 1975, pp. 161~166.
- 19) Kolmogorov, A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U. R. S. S., 30, 1941, pp. 301~305.
- 20) Kolmogorov, A. N.: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Science de l'U. R. S. S. 31, 1941, pp. 538~540.
- 21) Kolmogorov, A. N.: Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U. R. S. S., 32, 1941, pp. 16~18.