

拡散過程の存在について

筑波大 数学系 平良和昭

$\mathbb{R}^n$ の有界領域 D で, 与えられた拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t} u = -A u$ (A は 2 階の楕円型微分作用素) によ, て支配される拡散過程をすべて決定せよ, という問題について考える. 詳細については近刊の [7] を参照せよ.

§ 1. 序

拡散過程 M の "Markov 性" は, その遷移確率系 $\{p(t, x, dy)\}$ に対しては, Chapman-Kolmogorov の等式:

$$p(t+s, x, B) = \int_{\bar{D}} p(t, x, dy) p(s, y, B)$$

(B は $\bar{D} = D \cup \partial D$ の Borel 集合) として遺伝し, さらに,

$p(t, x, dy)$ を積分核とする作用素 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を

$$T_t f(x) = \int_{\bar{D}} p(t, x, dy) f(y)$$

で定義すれば, 半群の性質: $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$ として遺伝す

る. このとき, $\{T_t\}_{t \geq 0}$ は,

$$0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq T_t f \leq 1$$

をみえす = と注意しよう.

逆に, 次の結果が知られている.

定理 A $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が $C(\bar{D})$ 上の non-negative, contraction な半群であ, $t=0$ で強連続ならば, Markov 過程 M が存在して, その遷移確率系 $\{p(t, x, dy)\}$ に対して

$$T_t f(x) = \int_{\bar{D}} p(t, x, dy) f(y)$$

が成立する.

定義 $C(\bar{D})$ 上の, $t=0$ で強連続, non-negative, contraction な半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を, $\bar{D}$ 上の Feller 半群 とする.

Hille-Yosida の半群の理論に依れば, 半群 $\{T_t\}$ はその生成作用素: $\mathcal{A}f = \lim_{t \downarrow 0} (T_t f - f)/t$ によって特徴付けられる. 実際, 次の結果が知られている.

定理 B i) $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が $\bar{D}$ 上の Feller 半群ならば, その生成作用素 $\mathcal{A}$ は次をみえす:

- a) 定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は $C(\bar{D})$ の dense な部分空間である.
- b) $\alpha > 0$ とする. 任意の $f \in C(\bar{D})$ に対して, $(\alpha - \mathcal{A})u = f$ をみえす一意的な解 $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が存在する.
- c) b) で $u = (\alpha - \mathcal{A})^{-1} f$ (Green 作用素) とおくと

$$\|(\alpha - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$
- d) $f \geq 0 \implies (\alpha - \mathcal{A})^{-1} f \geq 0$.

ii) 逆に, α が a) を満たす $C(\bar{D})$ 上の線型作用素であって, ある α_0 が存在して, $\alpha > \alpha_0$ なるすべての α に対して b) ~ d) が成立すれば, α は $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する.

ゆえにわれは拡散方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} - A$ を 固定 して考えるので, α の定義域 $\mathcal{D}(\alpha)$ を調べることに帰着される. このことをいう

で, より詳しくのべよう. 以下, $u \in \mathcal{D}(\alpha) \cap C^2(\bar{D})$ に対して

$$\alpha u(x) = Au(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x), \quad x \in D$$

を仮定しよう. ならし

$$\begin{cases} a^{ij} \in C^\infty(\bar{D}); \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0, \quad \forall x \in \bar{D}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus 0, \\ b^i \in C^\infty(\bar{D}), \\ c \in C^\infty(\bar{D}); \quad c(x) \leq 0 \quad \text{in } D. \end{cases}$$

このとき, Ventcel' は, u の満たす 境界条件 L の具体的な形を与えらる:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x)u(x) \\ &\quad + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)Au(x) + Tu(x) \\ &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

ここで, $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ は境界 ∂D の局所座標であって,

$$\begin{cases} a^{ij} = a^{ji}; \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall x \in \partial D, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \mu(x) \geq 0 \quad \text{on } \partial D; \quad \gamma(x) \leq 0 \quad \text{on } \partial D; \quad \delta(x) \geq 0 \quad \text{on } \partial D, \\ T \text{ は内部 } D \text{ から境界 } \partial D \text{ への積分作用素,} \end{cases}$$

さらに, n は (a^i) に付随した (内向き) 余法線ベクトルである.

注意 境界条件 L の各項の "確率論的意味" をのべる.

$\mu \frac{\partial u}{\partial n}$ は n に沿った境界での反射; γu は境界での吸収;
 $\delta A u$ は (δu 比例する時間だけの) 境界での停留; $T u$ は
 境界から内部へのジャンプ; $\sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ は境界上の
 拡散をそれぞれ表わしている.

以上のことをまとめると, 粒子は, 領域の内部では与えられた拡散方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = A u$ に支配されて運動し, 境界では Ventcel' の境界条件 L に従って運動する, ことがわかる.

本稿の目的は, 逆に, (微分作用素 A を固定しておいて) どのような Ventcel' の境界条件 L に対して, 実際 D 上の拡散過程 M が存在するか, という問題を考えることである.
 いわゆる, 粒子の 境界での挙動 によって拡散過程を特徴付けることである.

§ 2. 問題の定式化

§ 1 の事情を踏まえて, 次の定義を導入しよう.

定義 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を Feller 半群とする. $\{T_t\}$ の生成作用素 A が, $0 u = A u$, $u \in \mathcal{D}(A)$ をみたすとき, 半群 $\{T_t\}$ を A -拡散過程 であるという. ここで, $A u$ は Distribution の

意味でとる.

ゆえに次の問題を考える.

問題 $\bar{D}$ 上の A -拡散過程 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ をすべて求めよ.

$N = 1$ のときは, Feller, Dynkin, Itô-McKean, Ray によ
り完全に解決されているので, 以下, $N \geq 2$ とする.

上の問題を次の形で考察しよう.

問題' $C(\bar{D})$ 上の線型作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{u \in C(\bar{D}); Au \in C(\bar{D}), Lu = 0\}$$

で定義する. このとき, Ventcel' の境界条件 L がどのような
条件をみたせば, 作用素 $\mathcal{L}$ が Feller 半群 (従って, A -拡
散過程) $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成するか.

注意 $u \in C(\bar{D})$ で $Au \in C(\bar{D})$ ならば, 境界条件 Lu は
Distribution の意味で存在する. 実際, $Lu \in H^{-5/2}(\partial D)$ である
ことが示せる.

§3. 一般的结果

簡単のため, 核合作用素 $T = 0$, すなわち, 境界から内
部へのジャンプはないとする. さらに, 境界条件 L の係数は
すべて C^∞ とする. より詳しくのべると,

$$Lu(x) = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x) u(x) \\ + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x),$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{ij} \in C^\infty(\partial D); \alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \forall x \in \partial D, \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \beta^i \in C^\infty(\partial D), \\ \mu \in C^\infty(\partial D); \mu(x) \geq 0 \text{ on } \partial D, \\ \gamma \in C^\infty(\partial D); \gamma(x) \leq 0 \text{ on } \partial D, \\ \delta \in C^\infty(\partial D); \delta(x) \geq 0 \text{ on } \partial D. \end{array} \right.$$

次の定義は本質的である。

定義 境界条件 L が, $\mu(x) + \delta(x) > 0$ on ∂D を満たすとき, L は Transversal であるという。

注意 境界条件 L が Transversal であるとは, 内部 D の拡散過程と境界 ∂D 上の拡散過程とが "無関係" であることを意味する。より具体的に, 偏微分方程式論の言葉でいえば, 次の定理に出てくる境界値問題(*)が境界上の積分方程式に帰着できることを意味する。

さて, 以下の主結果は次の定理であり, [6] の v と w の拡張を与えている。

定理 Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする。次を仮定する。

(I) [解の存在] ある $\lambda \geq 0$ と $\alpha \geq 0$ が存在して, $C(\partial D)$ のある dense な部分集合に属する任意の φ に対して, 境界値問題:

$$(*) \begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が $u \in C^2(\bar{D})$ なる解をもつ.

(II) [解の一意性] 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたせば, $u \equiv 0$ である.

をみたせば,

$$Du = Au, \quad u \in \mathcal{D}(A) = \{u \in C(\bar{D}); Au \in C(\bar{D}), Lu = 0\}$$

で定義される, $C(\bar{D})$ 上の線型作用素 A は A -拡散過程 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する.

注意 仮定 (II) は解の正則性と密接な関係がある. 実際, 次の結果を示すことができる.

系 Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする. 次に仮定する.

(I) 定理と同じとする.

(II)' [解の正則性] 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ Lu \in C^\infty(\partial D) \end{cases}$$

をみたせば, $u \in C^2(\bar{D})$ である.

をみたせば, 定理と同じ結論を得る. さらに, 作用素 A は

$A \Big|_{\{u \in C^2(\bar{D}); Lu=0\}}$ の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張と一致する。

§ 4. 具体的結果

仮定 (I), (II) の境界値問題に対して, 解の存在, 一意性, 正則性を調べることにより, 以下の結果を得る。

定理 1 Ventcel' の境界条件 $Lu(x) = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x) u(x) + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x)$ ($u \in C^2(\bar{D})$) が Transversal であるとき, 次のようにして置くとする。

(A) $\Sigma = \{(x, \xi) \in T^* \partial D \setminus 0; |\xi| = 1, \eta_2(x, \xi) \equiv \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \xi_i \xi_j = 0\}$ において $\tilde{\text{Tr}} H_{\eta_2}(x, \xi) + \mu(x) + \left(\sum_{i=1}^{N-1} (\beta^i(x) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x_j}(x) \xi_j) \sqrt{-1} \right) \sqrt{-1} \neq 0$.
 $\tilde{\text{Tr}} H_{\eta_2}(x, \xi)$ は, $\eta_2(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \xi_i \xi_j$ の (x, ξ) に関する Hessian $H_{\eta_2}(x, \xi)$ の Hamilton 写像の正の固有値の (重複度を二めく) 和である。

このとき, 作用素 $A \Big|_{\{u \in C^2(\bar{D}); Lu=0\}}$ の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張 Ω が存在して, Ω は A -拡散過程 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する。

注意 定理で, $\eta_2(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0, \forall x \in \partial D, \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0$ の場合は, [1] で扱われた。

境界条件 L が 1 階の場合, すなわち, $\alpha^{ij} \equiv 0$ on ∂D のときは, $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$ が ∂D 上の ベクトル場 であると

仮定して, より詳しく次の結果を得る.

定理 2 Ventcel' の境界条件 $Lu(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \gamma(x) u(x) + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x)$ ($u \in C^2(\bar{D})$) が Transversal であるとして, 次をみていくとする.

(B) 定数 $C_0 > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \xi_i \right| \leq C_0 \mu(x) |\xi| \quad \text{on } T^* \partial D.$$

となるとき, 定理 1 と同じ結論を得る.

仮定 (B) から, ベクトル場 $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$ は, $M = \{x \in \partial D; \mu(x) = 0\}$ 上 2 次で消える ことが従うが, $\beta \neq 0$ on M の場合には, 次の結果を得る.

定理 3 Ventcel' の境界条件 $Lu(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \gamma(x) u(x) + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x)$ ($u \in C^2(\bar{D})$) が Transversal であるとして, 次をみていくとする.

(C) ベクトル場 $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1}) \neq 0$ on $M = \{x \in \partial D; \mu(x) = 0\}$ で, β のかかる極大存続分曲線も M に 完全に含まれる 場合がある.

となるとき, 定理 1 と同じ結論を得る.

注意 定理 2, 定理 3 で, $\mu(x) > 0$ on ∂D の場合は, [1] で扱われる.

注意 条件 (A), (B), (C) の "確率論的" な意味付けを与えることは, (A), (B), (C) の必要性を調べるうえでも, 重要な

ことと思われろが、完全には解明できてゐない。

§5. 証明のスケッチ

§3 定理の証明 [6] と殆んど同じなので、要点のみをのべてよう。1° よく知られてゐるよう、任意の $\alpha \geq 0$ に対して、 $G_\alpha^0 : C(\bar{D}) \longrightarrow C(\bar{D})$, $H_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\bar{D})$ なる有界且非負な作用素が存在して、 α と α 次をみる。

$$\begin{cases} (\alpha - A) G_\alpha^0 f = f & \text{in } D \quad (f \in C(\bar{D})), \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - A) H_\alpha \varphi = 0 & \text{in } D \quad (\varphi \in C(\partial D)), \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

そこで、Ventcel' の境界条件 L に対して、線型作用素 $LG_\alpha^0 : C(\bar{D}) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LG_\alpha^0 f = L(G_\alpha^0 f), \quad f \in \mathcal{D}(LG_\alpha^0) = \{f \in C(\bar{D}); G_\alpha^0 f \in C^2(\bar{D})\}$$

で定義すると、 LG_α^0 は非負且有界な作用素

$$\overline{LG_\alpha^0} : C(\bar{D}) \longrightarrow C(\partial D)$$

に (一意的に) 拡張される。同様に、線型作用素 $LH_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LH_\alpha \varphi = L(H_\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(LH_\alpha) = \{\varphi \in C(\partial D); H_\alpha \varphi \in C^2(\bar{D})\}$$

で定義すると、 LH_α の最小閉拡張

$$\overline{LH_\alpha} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

が存在する。

2° まず, 仮定(I) が成り立ち, 2° ならば, 任意の $\alpha \geq 0$ に対して, 作用素 $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Helly 系群を生成することはわかり, さらに, 境界系群 L が Transversal であるならば, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 逆作用素 $-\overline{LH_\alpha}^{-1}$ が存在して, 非負且有界である。従って, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 作用素

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \overline{LH_\alpha}^{-1} (\overline{LG_\alpha^0} f), \quad f \in C(\overline{D})$$

を定義することはできる。このとき, $u = G_\alpha f$ は,

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を満たす。すなわち, $u \in \mathcal{D}(\alpha) = \{u \in C(\overline{D}); Au \in C(\overline{D}), Lu = 0\}$ であり, $(\alpha - \alpha)u = f$ 。仮定(II) から, 一意性も従うので, $G_\alpha = (\alpha - \alpha)^{-1}$ ($\alpha > 0$) を得る。この G_α を使うと, [6] と殆んど同様にして, 定理 B の系群 a) ~ d) がすべて満たされていくことはわかり, 作用素 G_α は, $\overline{D}$ 上の Helly 系群 α の生成作用素となる。

§ 3 系の証明 1° まず, [仮定(I) + 仮定(II)'] $\Rightarrow$ [仮定(I) + 仮定(II)] を示そう。任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\overline{D})$ で

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

なるは、仮定 (II)' から、 $u \in C^2(\bar{D})$ が従う。よって、 $\psi = u|_{\partial D}$ とおけば、Dirichlet 問題の解の一意的から、 $u = H_\alpha \psi$ とおけば、 $\psi \in \mathcal{D}(LH_\alpha)$, $LH_\alpha \psi = Lu = 0$ が従う。仮定 (I) が成り立ち、よって、境界条件 L が Transversal なるは、 $\overline{LH_\alpha}$ は 1 対 1 なるので、 $\psi = 0$, すなわち、 $u \equiv 0$ を得る。仮定 (II) がみなさぬといふことがあからぬので、定理から、作用素 G_α は、 $\bar{D}$ 上の Heller 半群の生成作用素である。

2° 次に、 $\{G_\alpha f; f \in C^\infty(\bar{D})\} \subset \{u \in C^2(\bar{D}); Lu = 0\}$ を示す。 $f \in C^\infty(\bar{D})$ なるは、 $G_\alpha^0 f \in C^\infty(\bar{D})$, よって、 $LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D)$ が従う。また、仮定 (II)' から、 $w = H_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f))$ とおくと、

$$\begin{cases} (\alpha - A)w = 0 & \text{in } D, \\ Lw = LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D) \end{cases}$$

より、 $w \in C^2(\bar{D})$ である。従って、

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)) \in C^2(\bar{D}).$$

3° 最後に、作用素 G_α が、 $A|_{\{u \in C^2(\bar{D}); Lu=0\}}$ の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張と一致するを示す。 $u \in \mathcal{D}(A)$ とする。 $f = (\alpha - A)u$ とおくと、 $u = G_\alpha f$ である。故に $\{f_j\} \subset C^\infty(\bar{D})$ を選んで、 $f_j \rightarrow f$ in $C(\bar{D})$ とできる。よって、 $u_j = G_\alpha f_j$ とおくと、2° の結果から、 $u_j \in C^2(\bar{D})$, $Lu_j = 0$ 。作用素 $G_\alpha: C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$ は有界なから、 $u_j \rightarrow u$

in $C(\bar{D})$, よって, $Au_j = \alpha u_j - f_j \rightarrow \alpha u - f = Au$
in $C(\bar{D})$. 以上をまとめると,

$$\begin{aligned} & \{(u, Au); u \in \mathcal{D}(A)\} \\ &= \{(u, Au); u \in C^2(\bar{D}), Lu=0\} \text{ の } C(\bar{D}) \oplus C(\bar{D}) \text{ における} \\ & \text{閉包} \end{aligned}$$

が示される.

§4 定理1の証明 1° 次の境界値問題の一意的可解性について,
"Sobolev空間"の枠内で考えよう.

$$(+) \quad \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで, $\alpha \geq 0$. このために, Agmon-Nirenberg の示唆を受けて,
単位円 S を 補助的 に導入して, (+) に付随して次の
境界値問題を考える.

$$(\tilde{+}) \quad \begin{cases} (A + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2})\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S' \quad (y \in S'), \\ L\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S'. \end{cases}$$

つまり, パラメータ α を, 単位円 S 上の2階の微分
作用素に置き換えた. $\alpha > 0$ とし, 粗くいって, 次のことを示
すことができる ([8]):

『問題 (+) が, 十分大の $\alpha > 0$ に対して, 一意可解的であ
るための必要十分条件は, 問題 ($\tilde{+}$) の Index が有限であるこ
とである』

さる n , n のとき, 任意の $\alpha \geq 0$ に対して, 問題 (十) の Index がゼロであることも従う.

2° 境界条件 L が Transversal で, 仮定 (A) が成り立っているれば, [2] の結果を使って, 問題 (十) の Index が有限であることが示せる. 従って, 1° の結果から, 問題 (十) の Index は ゼロ である. さる n , n のとき, $\alpha \geq 0$ に対して,

$$(\alpha - A)u = 0 \text{ in } D, Lu \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow u \in C^\infty(\bar{D})$$

も示せるので, 条件 (II)' がみたされてゐることがわかる.

一方, 境界条件 L が Transversal ならば, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 次の最大値の原理を得る:

$$u \in C^2(\bar{D}), (A - \alpha)u \geq 0 \text{ in } D, Lu \geq 0 \text{ on } \partial D \Rightarrow u \leq 0 \text{ on } \bar{D}.$$

よって, $\alpha > 0$ に対する問題 (十) の 一意性 が従う.

以上をまとめると, 境界条件 L が Transversal で, 仮定 (A) が成り立っているならば, 任意の $f \in C^\infty(\bar{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して, 問題 (十) が一意的に解 $u \in C^\infty(\bar{D})$ をもつことが従い, 条件 (I) が $\lambda = 0$ でみたされてゐることがわかる. §1 の系から, 定理 1 を得る.

§4 定理 2, 定理 3 の証明 定理 1 の場合と同様にし, 以下に [2] と [5] の結果を使って, 境界条件 L が Transversal であって, 仮定 (B) あるいは仮定 (C) が成り立っているならば, 条件 (II)' がみたされてゐることがわかる. さる n ,

仮定 (B) あるいは仮定 (C) が成り立ち、 $2 \leq n < \infty$, 任意の $f \in C^\infty(\bar{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して, $\delta \equiv 0$ とした境界値問題

$$\begin{cases} (\lambda - A)u = f & \text{in } D, \\ -\sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u - \mu \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が, 定数 $\lambda > 0$ に対して, 一意の正解 $u \in C^\infty(\bar{D})$ があることが従い, "perturbation" によつて, 一般の $\delta \geq 0$ に対しても, 同じことがいえる。つまり, 命題 (I) が $\lambda > 0$ に対して成り立つことが得られる。

REFERENCES

- [1] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégrro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 (1968), 369-521.
- [2] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann., 217 (1975), 165-188.
- [3] 池田信行, 上野正, 田中洋, 佐藤健一, 多次元拡散過程の境界問題 (上), (下), 確率論セミナー, Vol. 5 (1960); Vol. 6 (1961).
- [4] 国田寛, 多次元拡散過程の境界問題, 函数解析的方法

よる解析学の諸問題の研究, 報告集, 1969年3月, 東京.

- [5] A. Melin and J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, Comm. in P. D. E., 1 (1976), 313-400.
- [6] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1965), 529-605.
- [7] K. Taira, Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29 (1979). To appear.
- [8] K. Taira, Un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes aux limites généraux. To appear.

以上