

ノイズのある結合振動子系の位相スリップ

お茶の水女子大学・シミュレーション科学教育研究センター 小林 康明

Yasuaki Kobayashi

Center for Simulation Sciences

Ochanomizu University

1 はじめに

振動子集団がノイズに打ち勝って同期するには、振動子間の結合強度が十分大きい必要がある。その一方で結合が強すぎると同期状態が不安定化する場合があり、位相振動子の oscillation death やカオス振動子系の不安定化が知られている。本稿ではそのような不安定化の最も簡単なモデルとして、白色ノイズ下での位相振動子系で見られる非自明な位相スリップについての我々の研究を紹介し、その直感的な説明を与える。

2 ノイズとペースメーカーから影響を受ける位相振動子

次の位相振動子モデルを考えよう。

$$\dot{\phi} = \omega + KZ(\phi)\{h(\omega t) - h(\phi)\} + \xi. \quad (1)$$

ここで ξ はガウシアンノイズで $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D\delta(t-t')$ を満たす。第2項は位相 $\phi' = \omega t$ で振動するペースメーカーとの相互作用とみなすことができる。その具体形をここでは

$$Z(\phi) = \sin(\phi - \alpha), \quad h(\phi) = -\cos \phi \quad (2)$$

で与える。パラメータ α を $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ の範囲に選ぶと、ペースメーカーは振動子を同期させる方向に力を及ぼす。以下では簡単のために、特に断らない限り $\alpha = 0$ とする。したがってもしノイズ項がなければ $\phi = \omega t$ の同期解が存在するが、ノイズが同期を妨げる。

2.1 非自明な位相スリップ

一見するとこのモデルは自明なダイナミクスしか持たないように思われる。すなわちノイズ強度 D を一定とすると、 K が小さいときはノイズが優勢なので振動子とペースメーカーの位相差 $\psi \equiv \phi - \omega t$ はランダムウォーク的で、 K が大きくなると結合の効果がノイズを上回って同期するようになると予想される。しかし実際に数値計算すると、同期した後さらに K を大きくすると非自明な位相スリップが観察される (図1)。

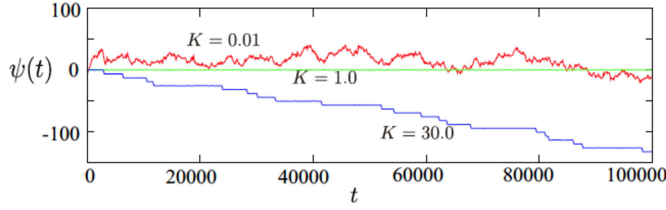


図1 位相モデル (1), (2) を異なる結合強度 K で数値計算した結果。[1] より転載。

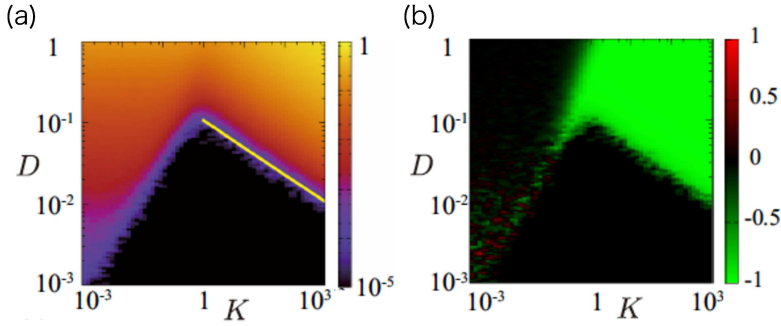


図2 (a) 位相スリップ率と (b) スリップの方向性。[1] より転載。直線は $D \sim K^{-1/3}$ 。

2つの振動子の位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ を $-2\pi \leq \psi \leq 2\pi$ の範囲で定義し、次のように位相スリップ率を定義する。ある時刻で $\psi = 0$ であったとして、そこから $\psi = \pm 2\pi$ に達するたびにスリップを1回カウントし、位相差を0にリセットする。単位時間あたりのスリップ回数をスリップ率とする。

図2(a) はノイズ強度 D と結合強度 K の相空間上にスリップ率をプロットしたもので、(b) は正負どちら向きのスリップの頻度が多いかを示したものである (常に正の向きのとき1)。 D を $D < 0.1$ のある値に固定したとき、 K の小さいところにノイズによる自明なスリップ領域が、 K の大きいところに非自明な位相スリップ領域が現れる。図2(b) から明らかなように、ノイズによるスリップには方向性がないが、非自明な位相スリップは方向性を持つ。平均化したモデルでは自明な位相スリップのみが生じ、その境界は $D = K$ で与えられるが、今の場合 $D = K$ の境界線は (b) にその名残が見られ、同期領域が非自明な位相スリップのために狭くなっているのがわかる。

(1) は強結合領域で位相スリップを起こす最も簡単なモデルということができる。ノイズ強度 D と結合強度 K が振動数 ω に比べて十分小さい場合、このモデルは時間平均化によりさらに簡単化することができて、

$$\dot{\psi} = K\Gamma(\psi) + \xi. \quad (3)$$

ここで $\Gamma(\psi) = -\frac{1}{2} \{\sin(\psi - \alpha) + \sin \alpha\}$ 。これは一次元周期ポテンシャル中の粒子の拡散問題であるから、 D が一定のもとで K を大きくするとポテンシャルが深くなって位相差は $\psi = 0$ にますます束縛されるようになり、位相スリップは起こらない。位相スリップは時間平均化した描像では捉えき

れない現象である。

またこの位相スリップは線形の範囲では起こらない。実際 $\psi = 0$ の周りで線形化すると

$$\dot{\psi} = -K \sin^2(\omega t) \psi + \xi(t) \quad (4)$$

となり、 $t = n\pi/\omega$ ($n \in \mathbb{Z}$) の点でのみ非線形性によって不安定化する。

2.2 位相スリップの直感的理解

非自明な位相スリップ領域への転移の境界がどのように与えられるかを考える。ノイズのない場合を考えると、自明な同期解 $\phi = \omega t$ が存在するほか、結合強度 K が大きい場合には別の解も存在する。実際、 $K \rightarrow \infty$ で $D = 0$ のときは $\psi = -2\omega t$ の解も存在する。この解をスリップ解と呼ぶことにすると、有限の K と $D \neq 0$ の場合にもこのスリップ解の近くを通して位相スリップが起きていることが予想される。したがって問題は同期状態からどのようにしてこのスリップ解近傍の解へと状態が移行するかである。

位相差 ψ に関してモデル (1) を書き直すとつぎのようになる。

$$\dot{\psi} = KZ(\psi + \omega t) \{h(\omega t) - h(\psi + \omega t)\} + \xi. \quad (5)$$

これを周期的に時間変化するポテンシャル中の粒子の拡散とみなすと、同期解とスリップ解がポテンシャルの極小に対応し、それらを隔てるポテンシャル障壁が $Z(\psi + \omega t)$ のゼロ点 $\psi = -\omega t$ で与えられる。ポテンシャルの時間変化のため、 $T = \pi/\omega$ ごとにポテンシャル障壁が消えて同期解とスリップ解が $\psi = 0$ で一致する。したがってはじめに同期解 $\psi = 0$ にそって時間発展していたとすると、時刻 $t_n = nT$ ($n \in \mathbb{Z}$) ごとにこの衝突が起こり、この近傍では K がどんなに大きくともノイズのみに駆動されることになる。 $t > t_n$ で結合の影響が徐々に効いてくるが、ポテンシャルが有効になる時刻 t^* まではノイズにより位相差の確率分布は広がっていく。もし $t = t^*$ でポテンシャルが有効となって同期解とスリップ解が隔てられたときに、スリップ解の側に ψ があれば、そのままスリップを起こすことが予想される。

結合強度 K が大きいほど位相差の拡散は抑えられるのでスリップは起きにくくなるように思われるが、直感に反して K が大きい場合ほどスリップは起こりやすい。なぜなら K が大きいとポテンシャル障壁の立ち上がるのが早いので、状態がスリップ側に取り残されやすくなり、この効果のほうがり位相差の拡散が小さくなる効果を上回るからである。ポテンシャル障壁は t に比例して移動するのにたいし、拡散は $\sqrt{t}$ に比例するため、障壁が立ち上がる時間 t_c が短いほど拡散が優勢になる (図 3)。

以上の考察から次元解析を行うと、非自明な位相スリップの転移線が得られる。以下簡単のため $\omega = 1$ とする。まず t が十分小さいとして、ポテンシャル F を用いて相互作用項を $-K \frac{\partial F(\psi, t)}{\partial \psi}$ と書く。(2) を代入して $t = 0$ の近くで F を展開するとポテンシャル障壁の位置で $F(\psi = -t, t) \sim t^4$ とかける。したがって相互作用項とノイズ項のつりあいから $Kt^4 \sim D$ を得る。つぎに上で述べた障壁の位置と拡散長 $\sqrt{Dt}$ のつりあいから、 $t \sim \sqrt{Dt}$ を得る。以上より

$$D \sim K^{-\frac{1}{3}} \quad (6)$$

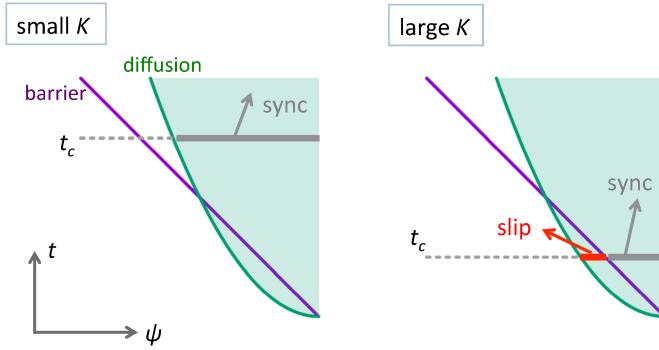


図3 ペースメーカーと一方向結合した振動子の位相スリップの概念図。

を得る。これは数値計算結果と非常によく一致する (図 2(a))。

$\alpha \neq 0$ の場合には上で述べたような同期解, スリップ解, ポテンシャル障壁の 3 つが同時に交わるようなことは起こらず, α の符号によってそれらの交わる順番が変わる。このとき同様の考察により $\alpha > 0$ のときはスリップが起きやすく, $\alpha < 0$ のときは起きにくいことを示せる [1]。さらに一般の unimodal な周期関数 Z と h の場合にも, 関数 $H(\psi, \omega t) = h(\omega t) - h(\omega t + \psi)$ が ψ に関する 2 つのゼロ点 $\psi = 0$ と $\psi = \beta(t)$ をもちかつ $\frac{d\beta(t)}{dt} < -\omega$ であることがすぐに確認できる。したがって前者が同期解, 後者がスリップ解に対応し, もし Z がゼロ点 ψ_0 を持つ場合には上と (定数を除いて) 全く同じポテンシャル障壁 $\psi = -\omega t + \psi_0$ が出てくる。したがってやはり 3 つの曲線 $\psi = 0$, $\psi = -\omega t + \psi_0$, $\psi = \beta(t)$ が上で述べた $\alpha > 0$ に対応する順番で交わる場合には位相スリップが起きやすく, $\alpha < 0$ に対応する場合にはスリップが起きにくいことが言える。

実際に Brusselator の結合系を用いてこのシナリオを検証することができる。2 つのノイズを加えた Brusselator 振動子を一方向結合すると, Brusselator のどの変数を通して結合するかによって非自明な位相スリップが起きるかどうかが変わるが, この系を位相縮約して (2) に対応する関数を数値的に求めると, 位相スリップが起きている場合には $\alpha > 0$ に対応し, 起きない場合には $\alpha < 0$ に対応した形で同期解とスリップが交わっているのを確かめることができる [1]。

3 N 振動子系

振動数の等しい N 個の振動子の結合系として, 以下のモデルを考える。

$$\dot{\phi}_i = \omega + KZ(\phi_i) \sum_{j=1}^N A_{ij} \{h(\phi_j) - h(\phi_i)\} + \xi_i \quad (7)$$

A_{ij} は対称行列で 0 または 1 の値をとる。各振動子には独立なガウシアンノイズがかかっており, $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = D \delta_{ij} \delta(t - t')$ である。また Z と h には (2) を採用する。

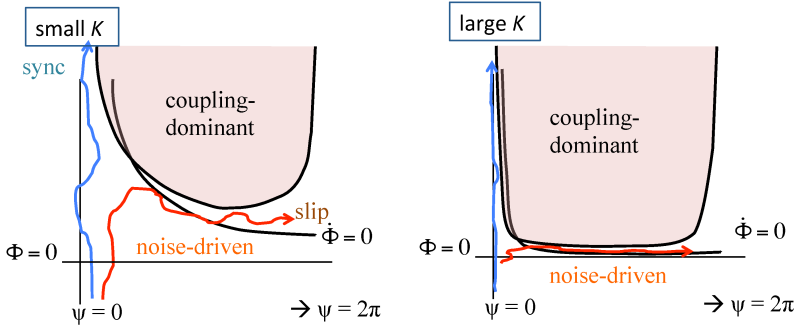


図 4 2 振動子の双方向結合系における位相スリップの概念図。

3.1 双方向結合する 2 振動子系

はじめに $N = 2$ の双方向結合系 ($A_{12} = A_{21} = 1$, $\alpha = 0$) の場合を確認しておく。 $K - D$ 空間でのスリップ率の相図を求めると、ペースメーカーとの一方向結合系と同様に双方向結合の場合も同様の 2 段階の転移が見られるが、非自明なスリップ領域の境界線は前者では $D = K^{-\frac{1}{2}}$ であったのに対して後者では $D = K^{-\frac{1}{3}}$ [2] である。これは一方向結合に比べてスリップが起きにくいことを意味するが、その理由は直感的には前者はペースメーカーの存在によりスリップが ballistic に起こるのに対し、後者は拡散的に起こるからである [2]。また当然ながら一方向結合の場合と異なりスリップ方向は正負どちらの向きにも起こる。

位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ と重心 $\Phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ の相空間での軌道は図 4 のようになる。一方向結合系と同様に、平均化していない (7) のモデルでは同期解 $\psi = 0$ だけでなく、 $\Phi = 0$ 付近にも結合の影響が及ばない領域ができる。完全同期状態に十分近い場合、重心は $\Phi = \omega t$ に従って時間発展するが、たまたま摂動により ($D = 0$ における) $\dot{\Phi} = 0$ の曲線に近づくと、重心の運動がこの曲線にトラップされる。もし図にあるように、結合の影響範囲の外でこのトラップが起これば、ノイズによる拡散によって $\psi = \pm 2\pi$ まで拡散していく場合がありうる。双方向結合系での位相スリップはこのようにして起こる。

上記のシナリオはやはり結合強度 K が大きいほど起こりやすくなる。なぜなら K が大きくなるほど結合の影響領域は広がる一方、上記のトラップに要する拡散距離が短くなり、後者の影響がよりきいてくるからである (図 4)。実際、このシナリオに沿って次元解析すると、 $D = K^{-\frac{1}{3}}$ という位相スリップの境界線を得ることができて、これは数値計算結果とよく一致する [2]。

3.2 ネットワーク結合系

最後に幾つかの複雑ネットワークにおける位相スリップを考える。 A_{ij} として (i) スケールフリーネットワーク (Barabási-Albert モデル), (ii) ランダムネットワーク (Erdős-Rényi モデル), (iii) 全結合モデルを選び、位相差 $\psi_j \equiv \phi_j - \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j} \phi_i$ にたいするスリップ率の平均を計算すると、(i) において最も位相スリップの効果が顕著で、スリップ率の極小値が 0 にならない (図 5)。

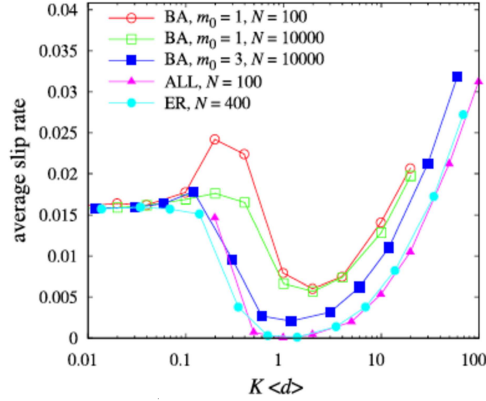


図5 複雑ネットワーク系の位相スリップ率。BA: Barabási-Albert ネットワーク, ALL: 全結合ネットワーク, ER: Erdős-Rényi ランダムネットワーク。 m_0 はネットワークの最小次数。 $\alpha = 0$, $D = 0.1$. [2] より転載。

この結果はは2振動子の相図からわかる。完全同期状態の近くで、振動子 i の方程式は実効的に次のように書ける。

$$\dot{\phi}_i = \omega + K d_i Z(\phi_i) \{h(\langle \Phi \rangle) - h(\phi_i)\} + \xi_i \quad (8)$$

ここで d_i は i の結合次数、 $\langle \Phi \rangle \sim \omega t$ は全振動子の位相の平均値である。したがってこの場合には各振動子は実効的な結合強度 $K_{\text{eff}} = K d_i$ をもってペースメーカーと結合する2振動子系とみなすことができる。このため d_i が広く分布するスケールフリーネットワークの場合 K_{eff} も幅をもつことになる。したがってある与えられた D にたいして十分大きなスケールフリーネットワークを考えると、 K をどのように選んでも相図2において d_i の小さい振動子は左側の自明なスリップ領域、大きい振動子は右側の非自明なスリップ領域にはみ出すようになり、スリップが避けられなくなる。実際 K の大きいところでの数値計算で非自明なスリップを起こすのは次数の高い振動子である。

4 結論

結合強度が強く平均化が成り立たないような領域において生じる非自明な位相スリップについて、その最も簡単な位相モデルを提案した。系がリミットサイクル振動子であったり、複雑ネットワークの結合系であっても、位相スリップは本質的には2つの位相振動子系の相図から理解することができることを示した。カオス振動子系やフィードバック系などで見られる強結合領域の不安定性の理解にもつながると考えられる。

参考文献

- [1] Y. Kobayashi and H. Kori, Phys. Rev. E **91**, 012901 (2015).
- [2] Y. Kobayashi and H. Kori, Chaos **26**, 094805 (2016).