

Intertwining operator の超局所性について

広大 理学部 岡本 清郷

木幡 篤考

田中 誠

G を連結半単純リー群とし, $G = \bigcup_{w \in W} MANwMAN$ を Σ の Bruhat 分解とする。 A のリー環を σ とし, Σ の dual space を σ^* と表わす。 任意の $\lambda \in \sigma^*$ に対し $\chi_\lambda(man) = e^{(-i\lambda + \rho)(\log a)}$ により MAN の指標 χ_λ を定義する。 Bruhat の理論から $B(L_\lambda)$ から $B(L_\mu)$ への任意の Intertwining operator は

$$(*) \quad f \in B(G), \quad f(mangm'a'n') = e^{(i\lambda + \rho)(\log a)} e^{(i\mu - \rho)(\log a')} f(g)$$

なる hyperfunction f を核函数とする Integral operator であることが分る。 今, $B(L_\lambda) \ni \varphi \leftrightarrow (\varphi_w)_w$

$\varphi_w \in B(\bar{N})$ という同一視を, $\varphi(\omega x man) = \chi_\lambda(man) \bar{\varphi}_w(x)$,

$x \in \bar{N}$ によって行う。 最近, 柏原氏によって Intertwining operator を超局所的に研究する program が作られた。 ここ

では次の様な群について, Σ のアイデアを述べる。 $G = SL(2, \mathbb{R})$
 $SL(3, \mathbb{R}), SO_0(n, 1), SU(n, 1), Sp(2, \mathbb{R})$ 。

$G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき; $G = \bar{N}MAN \cup \omega_0 \bar{N}MAN$,

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\varphi \in B(L_{-\lambda, \varphi})$ に対し $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$ であるから, $\varphi_0(x) = |x|^{\lambda-1} \varphi_\infty(y)$, $y = -1/x$. 次に, (*) を満たす f に対し, N と A の作用によって微分方程式を作る.

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x}{1+tx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+tx & t \\ 0 & 1+tx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{\frac{t}{2}}x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{bmatrix}$$

$$f_0(x) = (1+tx)^{\mu-1} f_0\left(\frac{x}{1+tx}\right), \quad f_0(e^t x) = e^{(\mu-\lambda-\frac{3}{2})t} f_0(x)$$

$t=0$ における微係数を取ると,

$$\begin{cases} (x \frac{d}{dx} + \frac{\lambda-\mu+2}{2}) f_0(x) = 0 \\ (x^2 \frac{d}{dx} - (\mu-1)x) f_0(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-t & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}}y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$f_\infty(y) = f_\infty(y-t)$, $f_\infty(e^t y) = e^{\frac{\lambda+\mu}{2}t} f_\infty(y)$ $t=0$ における微係数を取ると,

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} f_\infty(y) = 0 \\ (y \frac{d}{dy} - \frac{\lambda+\mu}{2}) f_\infty(y) = 0 \end{cases}$$

上の微分方程式系から $f_\infty(y) = \text{const.}$

1) $\lambda + \mu \neq 0$ のとき $f_\infty(y) = 0$

i) $\lambda \neq \mu$ のとき $f = 0$ ii) $\lambda = \mu$ のとき $f_0(x) = c \delta(x)$

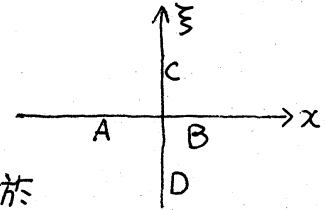
2) $\lambda + \mu = 0$ のとき

i) $\lambda \neq 0, 1, 2, \dots$ のとき $f_0(x) = c |x|^{-\lambda-1}$

ii) $\lambda = 0$ のとき $f_0(x) = c_1 P(\frac{1}{x}) + c_2 \delta(x)$ - 方 transition

function から $f_0(x) = c_2 \delta(x)$ iii) $\lambda = 1$ のとき $f_0(x) = c_1 P(\frac{1}{x^2}) + c_2 \delta'(x) \dots$

上の微分方程式系の characteristic variety の各既約成分上、方程式系が multiplicity 1 であるから解は 1 次元である。更に、ここで最も重要なのは『 λ が整数でないときは上の微分方程式系の点 $(x, \xi) = (0, 0)$ の近傍に於ける解は A, B に於ける値を与えれば C, D に於ける値がそれぞれ一意的に決定される。』ということである。



次に、Intertwining operator が micro-local operator であるかどうか調べる。

1) $G = SL(2, \mathbb{R})$

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $|x|^\lambda$ の convolution すなわち $|x-y|^\lambda$ が Intertwining operator の核函数である。従って micro-local operator である。

2) $G = SL(3, \mathbb{R})$

$\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $|z|^\lambda |z-xy|^\mu$ の convolution, すなわち $|w-z-y(u-x)|^\lambda |w-z-v(u-x)|^\mu$ が Intertwining operator の核函数であるが、これの Singular support は anti-diagonal Δ^a に含まれない。従って, micro-local operator ではない。

3) $G = SO_0(n, 1)$ $\omega_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, $(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^\lambda$

Intertwining operator の核函数は $((u_1 - x_1)^2 + \dots + (u_{n-1} - x_{n-1})^2)^\lambda$ である。 $(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^\lambda$ の満たす微分方程式を作ると,

$$\begin{cases} (x_1 D_{x_1} + \dots + x_{n-1} D_{x_{n-1}} - 2\lambda) u = 0 \\ (x_j D_{x_i} - x_i D_{x_j}) u = 0 & i < j \end{cases}$$

従って, Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal Δ^a に含まれているから, micro-local operator である。

$$4) G = SU(n, 1)$$

$$\omega_0 = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad (|y|^2 + s^2)^\lambda, \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1})$$

$y_i : \text{complex}, \quad s : \text{real}$

Intertwining operator の核函数は $f^\lambda = (|z - y|^2 + 4(u - s + \text{Im}(z, y))^2)^\lambda$

$z = (z_1, \dots, z_{n-1}), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1}), \quad z_i, y_i : \text{complex}$

$u, s : \text{real}$ である。 f^λ の満たす微分方程式を作ると,

$$\left\{ \begin{array}{l} (f \frac{\partial}{\partial(\text{Re} z_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Re} z_j)}) f^\lambda = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Im} z_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Im} z_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Re} y_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Re} y_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial(\text{Im} y_j)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial(\text{Im} y_j)}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u}) f^\lambda = 0 \\ (f \frac{\partial}{\partial s} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s}) f^\lambda = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial(\text{Re} z_j)} + \frac{\partial}{\partial(\text{Re} y_j)} - \frac{1}{2}(-\bar{y}_j + y_j + \bar{z}_j - z_j) \frac{\partial}{\partial u}) f^\lambda = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial(\text{Im} z_j)} + \frac{\partial}{\partial(\text{Im} y_j)} + (-\bar{y}_j - y_j + \bar{z}_j + z_j) \frac{\partial}{\partial u}) f^\lambda = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial s}) f^\lambda = 0$$

従って, Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal Δ^a に含まれるから, f^λ は micro-local operator である。

$$5) G = Sp(2, \mathbb{R})$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Intertwining operator は,}$$

$$|y|^\lambda \begin{vmatrix} y & z \\ z+xw & w \end{vmatrix}^\mu \text{ である。}$$

この場合も, $SL(3, \mathbb{R})$ の場合と同様に micro-local operator ではない。

終