

概均値 vector 空間に付随する, Dirichlet 級数の一例.
東大 理数 新谷 卓郎

§0 導入

まず Riemann の zeta 函数の函数等式の証明を復習しよう。 $\varphi(x)$ を実軸上の急減少函数, $s \in \mathbb{C}$ とし

$$Z_{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z} \\ x \neq 0}} \varphi(tx) t^s dx$$

とおく。 $\text{Re } s > 1$ なるとき, 上記積分は絶対収束して

$$Z_{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx \quad \text{に等しい。}$$

一方 Poisson の $-\infty$ 和公式によれば,

$$Z_{\varphi}(s) = \int_1^{\infty} \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}} \varphi(tx) t^s dx - \frac{1}{s} \varphi(0) + \int_1^{\infty} \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(tx) t^{1-s} dx + \frac{1}{s-1} \hat{\varphi}(0)$$

$$(\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{2\pi i \sqrt{-1} xy} dy)$$

なる等式が $\text{Re } s > 1$ において成立する。従って $Z_{\varphi}(s)$

は $s=0$, $s=1$ に高々一位の極をもつ有理型函数に解析接続され, かつ函数等式

$$Z_{\varphi}(1-s) = Z_{\varphi}(s) \quad \text{を満足することになる。}$$

一方 $\text{Re } s > 0$ において積分

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx$$

は絶対 $-\infty$ 収束するが, これを s の函数として全平面で有理形な函数に解析接続され, 函数等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) |x|^{-s} dx \quad (\#)$$

を満足する。従、 $\zeta(s)$ を全平面で有理形な函数へ接続され、函数等式

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

を満足することがわかる。

すなわち $\zeta(s)$ の函数等式の根拠は Poisson の和公式と変換則(＃)であるといふことができる。

佐藤幹夫氏は 概均質 vector 空間の理論を建設して “正則概均質 vector 空間” V の相対不変式の複素中が(＃)と類似の変換則を満足することを示し、 V 内の格子と相対不変式に対応する ζ 函数に類似の “distribution valued meromorphic function” を作、その函数等式を証明された。筆者は以下的小文において 特別な場合について 概均質 vector 空間と其中的格子に普通の $\mathbb{C}$ -valued Dirichlet 級数を対応させることを試みた。すなわち §1. において 最も簡単な状況における 概均質 vector 空間 V の理論の主結果を要約し、ついで V と其中的格子に付随す

る "Tate 型 積分" を考察し、極めて強い仮定のもとに、それから函数等式を満足する Dirichlet 級数をとりにだしうることを示した。§2 においては、実 Hermite 行列のなす vector space と、Gauss 整数を行列要素とする Hermite 行列のなす格子とについては §1 の仮定が満足されることを示し次の結果を得た。

定理

$L^{(n)}$ を Gauss の整数を行列要素とする n 次 Hermite 行列の作る格子とし、 $L^{(n)*}$ を、対角元がすべて偶数なるものよりなる $L^{(n)}$ の部分格子とする。

$m_i(l)$ を、Sylvester index が $(i, n-i)$ 行列式が $(-1)^{n-i} l$ なる L の元達のなす種達の "種の測度" の和であるとする。さすれば Dirichlet 級数

$$\Sigma_i^{(n)}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m_i(l)}{l^s}$$

$$\Sigma_i^{(n)*}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m_i^*(l)}{l^s}$$

($m_i^*(l)$ は $L^{(n)*}$ について $m_i(l)$ と同様に定義される) はともに $\text{Re } s > n$ で絶対収束し、 $s = 1, 2, \dots, n$ に高々一位の極をもつ

有理型函数に解析接続され、函数等式

$$\begin{aligned} & \xi_i^{(n)}(n-s) \\ &= \pi^{-s} n + \frac{n(n-1)}{2} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \cdots \Gamma(s-n+1) \times \\ & \times \sum_{j=0}^n (-1)^{(n-j)(n-1)} e^{\pi i \sqrt{s}(\frac{n}{2}-i-j)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \binom{n-i}{j-k} e^{2\pi i k j} \times \\ & \times \xi_j^{(n)*}(s) \end{aligned}$$

を満足する。 $\prod_{k=1}^n (1-k) \xi_i^{(n)}(s)$ は位数高々 n の整函数である。 なお $\xi_i^{(n)}(s)$ の極における residue を explicit に計算できる。

§1 V を実数体上の vector 空間, G を $GL(n)$ 内の連結実線型代数群とする。 V 内に代数的集合 S があつて, $V-S$ 内の点を通る G の任意の orbit が V 内の開集合となつているとき, 対 (G, V) を概均質 vector 空間とよび, S をその特異点集合という。以下 G の V への作用を

$$(g, x) \longrightarrow g \cdot x \quad (g \in G, x \in V)$$

と書く。 V の双対を V^* とし, G は V^* に反傾的に作用するとして, その作用を

$$(g, y) \longrightarrow {}^t g^{-1} \cdot y \quad (g \in G, y \in V^*)$$

と書く。定義より,

$$\langle g \cdot x, {}^t g^{-1} \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x \in V, y \in V^*)$$

である。 V 上の多項式 P は, G の適当な有理指標 χ が存在して, $P(gx) = \chi(g) P(x)$ ($\forall g \in G, x \in V$) が成立するとき, (G, V) の指標 χ の相対不変式とよばれる。以下 (G, V^*) も根元均質として, その特異点集合を S^* とする。 V^* の相対不変式も同様に定義される。

以下 V, V^* の相対不変式 P, Q が存在して

$$P(gx) = \chi(g) P(x), \quad Q({}^t g^{-1} \cdot y) = \chi^{-1}(g) Q(y)$$

であり, $x \in V - S, y \in V^* - S^*$ なるとき, x, y の等方群を H_x, H_y とかけば, χ は一次元 torus $G/H_x [G, G], G/H_y [G, G]$ の指標群の有限 index の部分群を生成し, さらに P の jacobian は $V - S$ で非退化であると仮定する。このとき

$V - S, V^* - S^*$ は同数個の連結成分の和となり, 各々の連結成分は G の1つの orbit となっている。それらを $V - S = \bigcup_{i=1}^l V_i, V^* - S^* = \bigcup_{i=1}^l V_i^*$ とかく。

P, Q の次数は等しい。それを d とする。いま d 次の多項式 $b(s), b^*(s)$ を

$$Q(\text{grad}_x) P^d(x) = b(s) P^{d-1}(x)$$

$$P(\text{grad}_y) Q^d(y) = b^*(s) Q^{d-1}(y)$$

として定義する。 V, V^* の Euclid measure dx, dx^* を互いに dual であるように定める。すなわち $\varphi \in \mathcal{S}(V)$

(以下 V における急減少函数の空間を $\mathcal{S}(V)$, V^* におけるそれを $\mathcal{S}(V^*)$ とかく) とするとき

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi i V^{-1} \langle x, y \rangle} dx$$

$$\iff \varphi(x) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi i V^{-1} \langle x, y \rangle} dy^*$$

であるとしよう。さすれば $\operatorname{Re} s > 0$ で定義される s

の解析函数 $\int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^s dx$, $\int_{V_i^*} \varphi^*(y) |Q(y)|^s dy^*$ は, $\operatorname{Re} s$ が十分大になるとき成立する等式

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} Q(\operatorname{grad}_x) \varphi(x) |P(x)|^s dx \\ &= (-1)^d (\operatorname{sgn}_i P) b(s) \int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^{s-1} dx \\ & \quad \int_{V_i^*} P(\operatorname{grad}_y) \varphi^*(y) |Q(y)|^s dy^* \\ &= (-1)^d (\operatorname{sgn}_i Q) b^*(s) \int_{V_i^*} \varphi^*(y) |Q(y)|^{s-1} dy^* \\ & \quad (\varphi \in \mathcal{S}(V), \quad \varphi^* \in \mathcal{S}(V^*) \text{ とし} \end{aligned}$$

$\operatorname{sgn}_i P$ は V_i における P の符号を意味する) を用いて全平面で有理型なる解析函数に接続される。(以上を通じて, P, Q は V, V^* で実数値をとると仮定されている)。以上の状況のもとで次の定理が成立する。

定理 A (M. Sato)

φ を $\mathcal{S}(V)$ の元とする時, 次の変換公式が成立す。

$$\begin{aligned}
 b(s) &= b_0 \prod_{i=1}^d (1 - s_i) & d(gx) &= |X(g)|^{-1} dx \\
 \text{とすれば} & \quad (n = \frac{n}{d} \text{ である}) \\
 & \int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-n} \hat{\varphi}(y) dy^* \\
 &= b_0^{-1} (2\pi)^{-ds} (V^{-1})^{ds} \prod_{k=1}^d \Gamma(1 + s_k) \times \\
 & \times \sum C_{ij}(s) (\operatorname{sgn}_i Q \operatorname{sgn}_j P)^{-s} \int_{V_j} |P(x)|^{-s} \varphi(x) dx \\
 & \quad (C_{ij}(s) \text{ は } e^{2\pi i V^{-1} s}, e^{-2\pi i V s} \text{ のある多項式}).
 \end{aligned}$$

以下 L を V 内の格子とし, L^* を L の双対格子とする。

すなわち

$$L^* = \{ y \in V^*, \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall x \in L \}.$$

$$\text{いま } L' = L - (L \cap S), \quad L'^* = L^* - (L^* \cap S^*)$$

と置き, Γ を L を不変にする G の離散的部分群として

次の "Tate 型積分" を考える。すなわち $\varphi \in \mathcal{S}(V)$,

$$\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*), \quad s \in \mathbb{C} \text{ なるとき}$$

$$Z_{\varphi}^L(s) = \int_{G/\Gamma} |X(g)|^{-s} \sum_{x \in L} \varphi(gx) dg$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \int_{G/\Gamma} |X'(g)|^{-s} \sum_{y \in L^*} \varphi^*(g^{-1}y) dg$$

ただし dg は G (unimodular とする) の不変測度である。 L あるいは L^* の二元 x_1, x_2 が Γ の作用でたがいにうつり得るとき, 両者は同値であるといひ,

$x_1 \sim x_2$ とかく。 $L \cap V_i$ の諸元の同値類の代表系を $\{x_i(l) \quad l=1, 2, \dots\}$,

$L^* \cap V_i^*$ の同値類の代表系を

$$\{y_i^*(l) \quad l=1, 2, \dots\}$$

とかく。 G, Γ の部分群 $H_{i,l}, \Gamma_{i,l}$ を次の如く定義する。

$$H_{i,l} = \{g \in G, \quad g \cdot x_i(l) = x_i(l)\}$$

$$\Gamma_{i,l} = \Gamma \cap H_{i,l}$$

$G/H_{i,l}$ は写像 $g \in G/H_{i,l} \rightarrow g \cdot x_i(l)$ によって V_i と同一視される。測度 $|P(x)|^{-2} dx$ が、(これは定理 A で定義された) V_i の G 不変測度であることに注意して、 $H_{i,l}$ の左不変測度 $dh_{i,l}$ を、 $dg = |P(g \cdot x_i(l))|^{-2} d(g \cdot x_i(l)) dh_{i,l}$

なるように定め、

$$m(x_i(l)) = \int_{H_{i,l}/\Gamma_{i,l}} dh_{i,l} \quad \text{と定義する。}$$

$H_{i,l}^*, \Gamma_{i,l}^*$ $m(y_i^*(l))$ を同様に定義される。いま次の仮定を“仮定 I”とよぼう。

仮定 I Dirichlet 級数

$$\xi_i(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m(x_i(l))}{|P(x_i(l))|^s}$$

$$\xi_i^*(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m(y_i^*(l))}{|Q(y_i^*(l))|^s}$$

は $\operatorname{Re} s$ が十分大なるとき絶対収束する。

命題 1. 仮定 I が成立するならば, $Z_\varphi(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ を定義する積分は $\operatorname{Re} s$ が十分大なるとき絶対収束し, 等式

$$Z_\varphi(s) = \sum_{i=1}^p \xi_i(s) \int_{V_i} |P(x)|^{s-2} \varphi(x) dx$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \sum_{i=1}^p \xi_i^*(s) \int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-2} \varphi^*(y) dy^*$$

が成立する。

一方 Poisson の和公式によつて Z_φ , $Z_{\varphi^*}^{L^*}$ は次の如く変形される。

$$\begin{aligned} Z_\varphi(s) &= \int_{\substack{|X(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |X(g)|^s \sum_{x \in L'} \varphi(gx) dg \\ &\quad + c_L \int_{\substack{|X^*(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |X^*(g)|^{2-s} \sum_{y \in L'^*} \hat{\varphi}(g^{-1} \cdot y) dg \\ &\quad - \int_{\substack{|X(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |X(g)|^s \left\{ \sum_{x \in L \cap S} \varphi(gx) \right. \\ &\quad \left. - c_L \sum_{y \in L' \cap S^*} \hat{\varphi}(g^{-1} \cdot y) |X(g)|^{-2} \right\} dg \end{aligned}$$

$$L \cap L' = L \quad \frac{1}{c_L} = \int_{V/L} dx$$

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi i \sqrt{-1} \langle y, x \rangle} dx$$

$$\begin{aligned}
& Z_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) \\
&= \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \sum_{y \in L^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) dg \\
&+ C_{L^*} \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{2-\lambda} \sum_{x \in L'} \hat{\varphi}^*(g, x) dg \\
&- \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \left\{ \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) - C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g, x) |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \right\} dg \\
&\text{ただし } \frac{1}{C_{L^*}} = \int_{V^*/L^*} dx^* \quad \hat{\varphi}^*(x) = \int_{V^*} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \varphi^*(y) dy
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
W_{\varphi}^L(\lambda) &= \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^\lambda \sum_{x \in L'} \varphi(g, x) dg \\
&+ C_L \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^{2-\lambda} \sum_{y \in L^*} \hat{\varphi}(\tau \tilde{g}^{-1}, y) dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\varphi}^L(\lambda) &= \int_{\substack{|\chi(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^\lambda \left(C_L \sum_{y \in L^* \cap S^*} \hat{\varphi}(\tau \tilde{g}^{-1}, y) |\chi(g)|^{2-\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{x \in L \cap S} \varphi(g, x) \right) dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) &= \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \left(C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g, x) |\tilde{\chi}'(g)|^{2-\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) \right) dg
\end{aligned}$$

とおけば、仮定 I が成立するとき、 $W_{\varphi}^L(\lambda)$ は λ の整函数であり、 $X_{\varphi}^L(\lambda)$ 、 $X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda)$ は $\text{Re } \lambda$ が十分大なるとき、 λ の正則函数で、

$$\text{等式 } Z_{\varphi}^L(s) = W_{\varphi}^L(s) + X_{\varphi}^L(s)$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* W_{\varphi^*}^L(1-s) + X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$$

が成立する。いま次の仮定を“仮定 II”とよぶことにしよう。

仮定 II $X_{\varphi}^L(s)$, $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに s の全平面で有理型な解析函数に接続され、等式 $X_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* X_{\varphi^*}^L(1-s)$ が成立する。

仮定 I, 仮定 II が成立するならば, $Z_{\varphi}^L(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに s の有理型函数に解析接続され、函数等式

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* Z_{\varphi^*}^L(1-s)$$

を満足する。よって定理 A と命題 1 とをあわせて次の命題をうる。

命題 2

仮定 I, 仮定 II がともに満足されているならば, $\xi_i(s)$, $\xi_i^*(s)$, ($i=1, 2, \dots, \ell$) は全平面で有理型な解析函数に解析接続され、函数等式

$$\begin{aligned} \xi_i(1-s) = & C_L b_0^{-s} (2\pi)^{-as} (\sqrt{-1})^{as} \prod_{k=1}^d \Gamma(s + \lambda_k) \times \\ & \times \sum_{j=1}^d (\operatorname{sgn}_i P \operatorname{sgn}_j Q)^{-s} C_{j,i}(s) \xi_j^*(s). \end{aligned}$$

(記号については定理 A を参照) を満足する。

いま仮定 I が満足されているとして、仮定 II が成立するための一つの十分条件を与えよう。

いま $G_1 = \{g \in G; \chi(g) = 1\}$ とする。

仮定 II₁'

任意の $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して
積分 $\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x) dg$, $\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi^*(g^* \cdot y) dg^*$

は絶対収束する。

仮定 II₂'

S, S^* はともに有限個の G_1 -orbit (それぞれ $S_1, \dots, S_m; S_1^*, \dots, S_m^*$ とする) の和となり、各々の orbit は G_1 の作用で不変な測度をもち (それぞれ $\mu_1, \dots, \mu_m; \mu_1^*, \dots, \mu_m^*$ とする) さらにそれら不変測度は次の性質をもつとする。

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(V), \quad \varphi^* \in \mathcal{S}(V^*) \text{ に対して}$$

$$\int_{S_i} \varphi(g \cdot x) d\mu_i(x) = |\chi(g)|^{-2i} \int_{S_i} \varphi(x) d\mu_i(x)$$

$$\int_{S_i^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot \varphi) d\mu_i^*(\varphi) = |\chi(g)|^{-n_i^*} \int_{S_i} \varphi^*(\varphi) d\mu_i^*(\varphi)$$

($\forall g \in G$; n_i, n_i^* は定数)

いま仮定 Π_1', Π_2' が満足されているとして

$L \cap S_i$ の Γ -同値類の代表系を $z_i(\mu)$ ($\mu=1, 2, \dots$)

$L^* \cap S_i^*$ の Γ -同値類の代表系を $z_i^*(\mu)$ ($\mu=1, 2, \dots$)

としよう。

$H_{z_i(\mu)}$ を $z_i(\mu)$ の等方群とし, $\Gamma_{z_i(\mu)} = \Gamma \cap H_{z_i(\mu)}$ とおく, $G_1, H_{z_i(\mu)}$ の不変測度 $d g_1, d h_{z_i(\mu)}$ をそれぞれ, $d g = d^* |\chi(g)| d g_1$

$$d g_1 = d \mu_{z_i} (g_1, z_i(\mu)) d h_{z_i(\mu)}$$

なるように定め

$$\sigma_{z_i(\mu)} = \int_{H_{z_i(\mu)} / \Gamma_{z_i(\mu)}} d h_{z_i(\mu)} \quad \text{とおく。}$$

$\sigma_{z_i^*(\mu)}$ も同様に定義する。

仮定 Π_1', Π_2' が満足されているならば,

$\sigma_{z_i(\mu)}, \sigma_{z_i^*(\mu)}$ はともに有限で, $\chi_\phi^L(s), \chi_{\phi^*}^{L^*}(s)$ を定義する積分と和とは順序を交換することができ, 初等的変形のうち, Res が十分大なるとき次式の成立することが証明できる。

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi}^L(\lambda) \\
&= C_L \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{\lambda - \lambda_i + \lambda_i^*} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \hat{\varphi}(y) d\mu_i^*(y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \varphi(x) d\mu_i(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) \\
&= C_L^* \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda - \lambda_i + \lambda_i^*} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \hat{\varphi}^*(x) d\mu_i(x) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{\lambda - \lambda_i^*} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \varphi^*(y) d\mu_i^*(y)
\end{aligned}$$

(仮定 II' によつて上式右辺の積分と級数は絶対収束する)

従つて次の命題を得る。

命題 3 仮定 I, 仮定 II', II' が成立しているならば仮定 II が成立している。

(注意 仮定 II' が成立しておらず、仮定 II の成立している例はある)

§2

以下 $V = V^{(n)}$ を n 次の hermite 行列をなす vector 空間とし、 $G = G^{(n)} = GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の V への作用は、 $g \cdot x = gxg'$ である。

V とその双対を内積 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr} X Y$ によつて

以後同一視する。さすれば ${}^t\bar{g}^{-1} \cdot x = \bar{g}'^{-1} x \bar{g}^{-1}$ である。

V の測度 dx を

$$dx = \kappa_n \prod_{i < j} d\operatorname{Re} x_{ij} d\operatorname{Im} x_{ij} \prod_i dx_{ii}$$

$$(\kappa_n = 2^{-\frac{n}{2}}, \quad x = (x_{ij}))$$

と定める。さすれば Fourier 反転公式は下図の如

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(y) &= \int \varphi(x) e^{2\pi i \sqrt{\tau} \langle x, y \rangle} dx \\ \Rightarrow \varphi(x) &= \int \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi i \sqrt{\tau} \langle x, y \rangle} dy \end{aligned}$$

$L = L^{(n)}$ を行列要素がすべて Gauss の整数となる V の元となる格子とし, $\Gamma = \Gamma^{(n)} = GL(n, \mathbb{Z}[\sqrt{\tau}])$ とする。 L は Γ の作用で不変で, L の双対格子 L^* は L の元で対角要素がすべて偶数なるものなる部分格子である。

$$\chi(g) = |\det g|^2, \quad P(x) = Q(x) = \det x$$

$$\text{とおけば,} \quad P(g \cdot x) = \chi(g) P(x)$$

$$Q({}^t\bar{g}^{-1} \cdot y) = \chi^{-1}(g) Q(y) \quad \text{である。}$$

また $d(g \cdot x) = \chi(g)^n dx$ であり従って前節の n はいまの場合 n に等しい。

$$S = S^* = \{x \in V, \det x = 0\}, \text{ とおき,}$$

V_i を正の固有値 i 個, 負の固有値 $n-i$ 個を有する V の元なる集合とすれば,

$V-S = V^* - S^* = \bigcup_{i=0}^n V_i$ で V_i は G の 1 つの orbit である。前節定理 A は, この特別な場合は, 次のようになる。

定理 A' いま

$$t_{ij}(s) = (-1)^{(n-i)(n-j)} e^{\pi \sqrt{-1} s (\frac{n}{2} - i - j)} \sum_{k=0}^i \binom{j}{k} \binom{n-j}{i-k} e^{\frac{2\pi \sqrt{-1} k s}{n}}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} \phi(x) |\det x|^{s-n} dx \\ &= K_n \pi^{-s n + \frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \cdots \Gamma(s-n+1) \times \\ & \quad \times \sum_{j=0}^n t_{ij}(s) \int_{V_j} \phi(x) |\det x|^{-s} dx \end{aligned}$$

[証明]

定理 A より, ϕ の台は $\det x \det \begin{pmatrix} x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = x_{nn} = 0$ なる集合と交わらない compact set であるとして

証明すれば十分である。いま

$$B_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_{ij} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} t_1, \dots, t_n > 0 \\ z_{ij} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

とおけば, V は B_+ の作用に関してすでに根元均質で, 測度 0 の集合を無視すれば,

$$V_i = \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} B_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{である。}$$

(ただし $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 2i - n$)

いま B_+ の left Haar measure db_+ を

$$d\mathbf{b}_+ = d^*t_1 \cdots d^*t_n \prod_{i>j} d\operatorname{Re} z_{ij} d\operatorname{Im} z_{ij}$$

と定義すれば,

$$\int_{V_i} \varphi |\det x|^{s-n} dx$$

$$= 2^n \cdot K_n \int_{B^+} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} \int \varphi(y) e^{2\pi i \sqrt{-1} \langle y, \mathbf{b}_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \rangle} d\mathbf{y} (t_1 \cdots t_n)^{s-n} d\mathbf{b}_+$$

である。こゝで積分の順序を交換すれば

(その際多少注意を要する) 初等的計算で
定理の結果を得る。

以下仮定 I が成立していることを検証する。

Hermite 型式の理論によつて ℓ を自然数と
するとき, $\det x = (-1)^{n-\ell} \ell$ なる $L^{(i)} = L \cap V_i$
の元の全体は有限個の Γ -orbit の和となる
各軌道から一つずつ元をとつてそれらを,

$x_1^{(i)}(\ell), \dots, x_{h^{(i)}}^{(i)}(\ell)$ とし, それらのうち
 L^* に属するものを

$x_1^{(i)*}(\ell), \dots, x_{h^{(i)*}}^{(i)*}(\ell)$ としよう
さすれば $\bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{h^{(i)}} x_h^{(i)}(\ell), \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{h^{(i)*}} x_h^{(i)*}(\ell)$
はそれぞれ, L, L^* の Γ -同値類の代表系で
ある。§1 に従つて $\Gamma(x_h^{(i)}(\ell)), m(x_h^{(i)}(\ell)),$
 $\Gamma^*(x_h^{(i)*}(\ell)), m^*(x_h^{(i)*}(\ell))$ を定義する。

以下 G の不変測度 $d\theta$ を, $i=0, \dots, n$ なるとき,

$m(x_k^{(i)}(l))$ が有限群 $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$ の 位数 と等しくなるように正規化する (可能である)。^{位数の}

このとき $\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))$,

は行列式 $(-1)^{n-i}$ なる $L \cap V_2$ の元からなる種達の種の測度の和に等しい。 $\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))$

についてと同様のことがいえる。従って Hermite 形式の理論により, それらの $l \rightarrow +\infty$ のとき増大度は l の適当な中乗でおさえられることがしられる。

よって Dirichlet 級数

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))}{l^s} = \zeta_i^{(n)}(s)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))}{l^s} = \zeta_i^{(n)*}(s)$$

は $\operatorname{Re}(s)$ が十分大なとき絶対収束する。すなわち仮定 I が成立している。なお正規化された $d\theta$ は具体的に次のように記述される。いま e_{ij} を i 行 j 列成分が 1 で, 他は 0 なる $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の元とし, $\omega_{ij}, \omega'_{ij}$ をそれぞれ $e_{ij}, \sqrt{-1}e_{ij}$ と双対な G 上の左不変微分形式とすると,

$$\int f(\theta) d\theta = C_n \int f(\theta) \prod_{i,j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega'_{ij}$$

$$(C_n = K_n \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{h(l)} \Gamma(l))$$

なお 後に用いられる定数 μ_n を次のように定義する。

$$\mu_n = \int_{G_1^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \prod_{i \neq j} d\omega_{ij} d\omega'_{ij} \prod d\omega_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\omega_{ii}$$

($G_1^{(n)}$ の定義は下に与えられている)

次に仮定 Π_1, Π_2 が成立していることを検証する。Weil の論文 "La Formule de Siegel et les groupes classiques" (Acta 1965) 20 頁の Lemma 5 によれば "今の場合

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x) dg \quad (\varphi \in \mathcal{S}(V))$$

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi(g \cdot y) dg$$

がともに絶対収束することがわかる。

よって仮定 Π_1 は成立している。

$$(G_1 = G_1^{(n)} = \{g \in G, |\det g| = 1\})$$

$V^{(n, r)}$ で rank r の Hermite 行列のなす V の部分集合, $V_i^{(n, r)}$ で正の固有値を i 個, 負の固有値を $r-i$ 個もつ元よりなる $V^{(n, r)}$ の部分集合を表わすことにすれば, $V_i^{(n, r)}$ は G_1 の 1 つの orbit で

$$S = \bigcup_{t=0}^{n-1} \bigcup_{i=0}^r V_i^{(n,t)} \text{ である。}$$

$V^{(n,2)}$ の測度 $d\mu^{(n,2)}$ を次の如く定めれば、それは G_4 の作用で不変である。

$$t > 0 \text{ なら } V^{(n,2)} \ni x = (x_{ij}) \text{ なるとき}$$

$$d\mu^{(n,t)} = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{t1} & \cdots & x_{tt} \end{pmatrix} \right|^{t-n} \prod_{\substack{i > j \\ j \leq t}} d\operatorname{Re} x_{ij} d\operatorname{Im} x_{ij} \times \prod_{1 \leq i \leq t} d x_{ii}$$

$t = 0$ なら δ

$$d\mu^{(n,t)} = \delta(0)$$

そして

$$\int_{V_i^{(n,t)}} \varphi(g \cdot x) d\mu^{(n,t)} = |\chi(g)|^{n-2} \int_{V^{(n,2)}} \varphi(x) d\mu^{(n,2)}$$

$$(\varphi \in \mathcal{S}(V), g \in G)$$

である。よって仮定 Π_2' が成立していることがわかる。

$$L \cap V_i^{(n,t)} \text{ の } \Gamma \text{ 同値類の代表系として } \left\{ \begin{pmatrix} x_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_t: L^{(t)} \cap V_i^{(t)} \text{ の } \Gamma^{(t)} \text{ 同値類の代表系} \right\}$$

をとることができるときに注意すれば、 $X_0^L(\mathcal{A})$, $X_{\varphi^*}^{L^*}(\mathcal{A})$ は前節よりさらに具体的に次の如く表示されることがわかる。

$$\begin{aligned}
& X_0^L(\lambda) \\
&= C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2n^2 + 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) \times \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x) d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) \times \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(x) d\mu^{(n,r)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi^*}^{L*}(\lambda) \tag{#} \\
&= C_L^* \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2n^2 + 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) \times \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}^*(x) d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) \times \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi^*(x) d\mu^{(n,r)}(x)
\end{aligned}$$

$$(\text{いまの場合 } C_L = 2^{\frac{n}{2}} \quad C_L^* = 2^{\frac{n}{2}})$$

また t_n は 前々頁で定義された数

また $C_0 = 1$ とおく

最後に $\xi_i^{(n)}(s)$, $\xi_i^{(n)*}(s)$ の極における留数を計算する。

いま φ の台が compact で V_i に含まれているとする。さすれば

$$\begin{aligned} \xi_i^{(n)}(s) \int_{V_i} \varphi(x) |\det x|^{s-n} dx \\ = W_\varphi^L(s) + C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n-1-2n^2+2r+2n} \frac{C_{n+r-i}}{C_r} \xi_i^{(n)*}(s) \\ \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x) d\mu^{(n,r)}(x) \quad (7) \end{aligned}$$

である。

$W_\varphi^L(s)$, $\int_{V_i} \varphi(x) |\det x|^{s-n} dx$ は, φ に関する仮定からともに exponential type の整函数数である。従って $\prod_{r=0}^{n-1} (s-n+r) \times \xi_i^{(n)}(s)$ は exponential type の整函数数の比として表示される整函数数で、その位数は 1 を超えない。(Titchmarsh Theory of Functions の 255 頁をみよ) さらに定理 A' の証明と同じ方法で次の命題が証明される。

命題 φ の台が compact で, $V-S$ 内に含まれるならば,

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(n, r)}_i} \varphi(x) d\mu^{(n, r)}(x) \\ &= K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \Gamma(r-1) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} (-1)^{(r-i)(n+r+1)} \binom{r}{i} \times \\ & \quad \times \int_V \varphi(x) (\det x)^{-r} dx \end{aligned}$$

この命題と前頁(4) より

$\Sigma_i^{(n)}(s)$ の $s = n-r$ における留数は

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n-i)r} C_L \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \Sigma_j^{(r)*}(n) \end{aligned}$$

である。

同様に $\Sigma_i^{(n)*}(s)$ の $s = n-r$ における residue は

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n-i)r} C_L^* \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \Sigma_j^{(r)}(n) \end{aligned}$$

である。

以上で冒頭の定理は証明された。