

# KR - 理論の Segal-Becker 型定理

京大 理 河野 明

## §1 序文

$\mathbb{C}P_{\mathbb{C}}^{\infty}$  を conjugate linear involution を持つ無限次元複素射影空間,  $BR$  を  $KR$ -理論の分類空間とする.  $V$  を  $\mathbb{Z}/2$  の正則表現とし  $X$   $\tau$ -space に対して

$$Q_{\mathbb{Z}/2}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^{nV} \Sigma^{nV} X$$

Atiyah によって  $BR$  は 同変無限ループ空間であることが知られている。従って

$$\lambda: \mathbb{C}P_{\mathbb{C}}^{\infty} \rightarrow BR$$

は 同変無限ループ写像

$$\tilde{\lambda}: Q_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{C}P_{\mathbb{C}}^{\infty}) \rightarrow BR$$

に自然に拡張される。今  $Q_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{C}P_{\mathbb{C}}^{\infty})$  が分類する  $\tau$ -cohomology を  $PR(\ )$  と書くとき

定理 すべての コンパクト  $\tau$ -space  $X$  について

$$\tilde{\lambda}_*: PR^{oo}(X) \rightarrow KR^{oo}(X)$$

は全射である。

が成立する。この定理は 永田-西田-戸田 [4] の主定理の少し弱い形であるが、Adams 予想の証明等には充分である。ここでは、この定理の表現論による、極めて簡単な証明をあげることにする。

## §2 Real Lie group の誘導表現

$U(n)$  を conjugate linear involution を持つ  $n$  次元ユニタリー群、 $H = U(1) \times U(n-1)$  を Real subgroup とする。この時次を得る。

補題 1.  $i: H \subset U(n)$  を inclusion とする。今  $\mu: H \rightarrow U(1)$  を 1st projection  $\gamma_n: U(n) \rightarrow U(n)$  を identity 表現 とする。この時

$$i_!(\mu) = \gamma_n$$

が成立する。ただし  $i_!: R_{\mathbb{R}}(H) \rightarrow R_{\mathbb{R}}(U(n))$  は 橋本 [2] による 誘導表現である。

証明  $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$   $\theta_1, \dots, \theta_n, \pi$  が  $\mathbb{Q}$  上独立をとる。 $g$  は  $T^n = \{\text{対角行列}\}$  の生成元になる。誘導指標の公式を使うために  $(U(n)/H)^g$  を決定する。

$$gxH = xH \Leftrightarrow x^{-1}gx \in H \Leftrightarrow x^{-1}T^n x \subset H.$$

$H$  は connected 故  $\exists h \in H$  s.t.  $h^{-1}T^n h = x^{-1}T^n x$

従って  $xh^{-1} \in N_{U(n)}(T^n)$  よって

$$(U(n)/H)^g \longleftrightarrow N_{U(n)}(T^n)/N_H(T^n)$$

$$\chi_{i, \mu}(g) = \sum_{x \in (U(n)/H)^g} \chi_{\mu}(x^{-1}gx) = \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} = \chi_{i_n}(g)$$

証明終り

### §3 定理の証明

橋本 [2] による可換図式

$$R_R(H) \xrightarrow{\alpha} KR^{00}(E/H)$$

$$i_! \downarrow \qquad \qquad \downarrow p_*$$

$$R_R(U(n)) \longrightarrow KR^{00}(E/U(n))$$

を考える。ただし  $E$  はコンパクト  $U(n) \times \mathbb{Z}/2$  space で

$U(n)$  free  $p_*$  は西田の transfer [3] である。一斉

明らかに

$$KR^{00}(E/H) \xleftarrow{\tilde{\lambda}_*} PR^{00}(E/H)$$

$$\downarrow p_*$$

$$\downarrow p_*$$

$$KR^{00}(E/U(n)) \xleftarrow{\hat{\lambda}_*} PR^{00}(E/U(n))$$

は可換である。

さて  $X$  が compact 故  $\xi \in KR^{00}(X)$  は  $X$  上の Real vector bundle であるとしてよい。これに associate し  $\pi$  主  $U(n)$ -束の total space を  $E$  とするとき。

明らかに

$$X = E/U(n)$$

$$\xi = \alpha(2n)$$

$\alpha(\mu)$  は line bundle

が成立する。従って  $\exists \alpha \in PR^{00}(E/H) \leq t, \tilde{\lambda}_*(\alpha) = \alpha(\mu)$

$$\tilde{\lambda}_*(p_*(\alpha)) = p_*\tilde{\lambda}_*(\alpha) = p_*(\alpha(\mu)) = \alpha p_!(\mu) = \alpha(2n) = \xi$$

証明終り.

#### §4 いくつかの注意

(1)  $R_p(H) = R(H)$   $R_R(U(n)) = R(U(n))$  に注意するとき

$$\tilde{\lambda}_*: P^0(X) \rightarrow K^0(X)$$

全射が出る。ただし  $P()$  は  $Q(CP^\infty)$  から分類する cohomology

(これが Segal の結果) また  $CP^\infty$  を  $BO(2)$  にとりかえて 橋本 [2] 命題 3.1 を使うと 実数体の case を得る。

(これが Becker の結果)

橋本 [2] の誘導表現は Real elliptic 作用素によっても定義出来る。

(2)  $BR$  のスケルトンが compact を利用すると

$$\tilde{\lambda}_*: PR^{00}(X) \rightarrow KR^{00}(X) \text{ は split epimorphism}$$

を示すことは 簡単である。

## 参考文献

[1] M.F. Atiyah, *K-theory and reality*, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 17* (1966), 367-386.

[2] 橋本 伸 The transfer maps in the  $KR_G$ -theory  
本講完録

[3] G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant cohomology theories, *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978) 435-451

[4] M. Nagata; G. Nishida, HiToda Segal-Becker theorem for  $KR$ -theory, preprint.