

Neumann-Wigner 型ポテンシャルについて

内山 淳 (京都工芸繊維大学 繊維学部) (Jun Uchiyama)

荒井 正治 (立命館大学 理工学部) (Masaharu Arai)

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x) + q(x)\psi(x) = \lambda\psi(x) & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

という固有値問題を考える. ここで Δ は $\mathbf{R}^n$ の Laplacian である. また

$q(x)$ は $\mathbf{R}^n$ で有界な実数値関数で

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = 0$$

とする.

$$\text{Dom}(H) = H^2(\mathbf{R}^n), \quad H = -\Delta + q(x)$$

とすると

$$H \text{ は } L^2(\mathbf{R}^n) \text{ で自己共役作用素で } \sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$$

である. essential spectrum と continuous spectrum を同一視すると上記の問題は

continuous spectrum に埋め込まれた固有値を考える

ということである. これに関して Neumann-Wigner [12] (および Simon による修正) は次の結果を与えた.

$$q_{NW}(x) = \frac{-32 \sin r}{\{1 + g(r)^2\}^2} \cdot [g^3 \cos r - 3g^2 \sin^3 r + g \cos r + \sin^3 r],$$

$$g(r) = 2r - \sin 2r,$$

$$\psi_{NW}(x) = \frac{\sin r}{r \{1 + g(r)^2\}},$$

$$\lambda = 1 > 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad r = |x|$$

は上記の問題を満たす。ここで

$$q_{NW}(x) = -8 \frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

$$|\psi_{NW}(x)| \leq \frac{Const}{1+r^3} \in L^2(\mathbf{R}^3)$$

であることに注目する。

そこで次の問題を考えることにする。

問題

$$H = -\Delta + q(x) \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n)$$

において、 $q(x)$ は次の 2 条件を満たすとする。

(Q.1) $q(x)$ は $\mathbf{R}^n$ で連続な実数値関数,

$$(Q.2) \quad q(x) = -k \frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-1-\varepsilon_0}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (\varepsilon_0 > 0).$$

ここで k は実定数である。このとき $\lambda > 0$ は H の固有値であるか？

これに対する答を次の形で用意しておく。

定義

“yes” $\iff \exists q(x)$ satisfying (Q.1), (Q.2) s.t. $\lambda \in \sigma_p(H)$.

“no” $\iff \forall q(x)$ satisfying (Q.1), (Q.2) に対して $\lambda \notin \sigma_p(H)$.

ここで $\sigma_p(H)$ は H の固有値の全体を表す. 上の定義において “ある...が存在して” および “全ての...に対して” は (Q.2) における補正項 $O(r^{-1-\varepsilon_0})$ に関係している. 上述の例により次を得る.

定理 1. (Neumann-Wigner [12]) (Simon による修正)

$$n = 3, k = 8, \lambda = 1 \implies \text{“yes”}.$$

また次のことが知られている.

定理 2. (Moses-Tuan [10]) (Albeverio による修正)

$$n = 3, k = 4, \lambda = 1 \implies \text{“yes”}.$$

定理 3. (essentially due to Atkinson [5]) $n=1$ とすると

$$(1) \quad \forall k, \lambda \neq 1, \lambda > 0 \implies \text{“no”}.$$

$$(2) \quad |k| \leq 2, \lambda = 1 \implies \text{“no”}.$$

$$(3) \quad |k| > 2, \lambda = 1 \implies \text{“yes”}.$$

Atkinson の論文においては上記の結果は explicit には与えられていない. また (2), (3) の結果を得るためには Atkinson の与えた定理を少し修正して適用しなければならない. ところで正の固有値の存在に関しては次の結果を得た.

定理 4. (Arai-Uchiyama [4])

$$\forall n, |k| > 2, \lambda = 1 \implies \text{“yes”}.$$

次に正の固有値の非存在について考える.

$$V(r) = \frac{\sin 2r}{r} \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad r = |x|$$

とおいたとき

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r \partial_r V(r) = 2,$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |r V(r)| = 1,$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_1^r t V(t) dt - \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_1^r t V(t) dt = 1$$

である。その値が 0 でない有限値であるという意味で上記の $V(r)$ はこの 3 つの値を考えると critical な例になっている。(0 になるときは small perturbation であると考えられる。) そこで次の 5 つの仮定を満たす H を考える。

$$H = -\Delta + q(x) \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^n),$$

$$q(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(r), \quad Q(r) = \int_1^r t V_3(t) dt,$$

$$(1) \quad V_1(x), V_2(x), V_3(r) \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ で実数値関数かつ有界,}$$

$$(2) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} V_1(x) = 0,$$

$$(3) \quad L := \limsup_{r \rightarrow \infty} r \partial_r V_1(x) < \infty,$$

$$(4) \quad K := \limsup_{r \rightarrow \infty} |r V_2(x)| < \infty,$$

$$(5) \quad M := \limsup_{r \rightarrow \infty} Q(r) - \liminf_{r \rightarrow \infty} Q(r) < \infty.$$

(注意: $L \geq 0$ となる.) この H に対して次のような性質を持つ $\Lambda \geq 0$ を求めることを考える。

$$\lambda > \Lambda \implies \lambda \notin \sigma_p(H).$$

この Λ に関してはいくつかの結果がある.

$$\text{Kato [8]} : V_1(x) \equiv V_3(r) \equiv 0 \implies \Lambda_K = K^2,$$

$$\text{Agmon [1]} : V_3(r) \equiv 0, K = 0 \implies \Lambda_A = \frac{L}{2},$$

$$\text{Eastham-Kalf [6]} : V_3(r) \equiv 0 \implies$$

$$\Lambda_{EK} = \frac{1}{2} \left\{ K^2 + L + \sqrt{K^2(K^2 + 2L)} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} (K + \sqrt{K^2 + 2L}) \right\}^2,$$

$$\text{Khosrovshahi-Levine-Payne [9]} : M < \frac{1}{4} \implies$$

$$\Lambda_{KLP} = \max \left\{ \left[\frac{K + \sqrt{K^2 + 2L(1 - 2M)}}{2(1 - 2M)} \right]^2, \frac{2K^2 + L(1 - 4M)}{2(1 - 4M)^2} \right\},$$

$$\text{Kalf-Kummar [7]} : M < \frac{1}{2} \implies$$

$$\Lambda_{KK} = \left[\frac{K + \sqrt{K^2 + 2L(1 - 2M)}}{2(1 - 2M)} \right]^2,$$

$$\text{Arai-Uchiyama [3]} : M < 1 \implies$$

$$\Lambda_{AU} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - M^2} \left[K^2 + L + \sqrt{K^2(K^2 + 2L) + L^2 M^2} \right].$$

これらに関して次のことが分かる.

- Λ_{EK} において $L = 0$ または $K = 0$ とおくことによって Λ_K または Λ_A を得るから Λ_{EK} は Λ_K および Λ_A の拡張になっている.
- Λ_{KLP} , Λ_{KK} , Λ_{AU} において $M = 0$ とおくことによって Λ_{EK} を得るから Λ_{KLP} , Λ_{KK} , Λ_{AU} は Λ_{EK} の拡張になっている.
- $\Lambda_{KLP} \geq \Lambda_{KK} \geq \Lambda_{AU}$ が成り立つ.

その性質上 Λ はより小さいほうがより良い結果を与える。即ち Λ_{AU} を適用した場合が一番良い結果が得られる。その差がどれくらいあるかを次のように調べる。

$q(x)$ は (Q.1), (Q.2) を満たすとする。

$$V_1(x) = -(k + s + t) \frac{\sin 2r}{r},$$

$$V_2(x) = s \frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-1-\epsilon_0}),$$

$$V_3(r) = t \frac{\sin 2r}{r} \quad (-\infty < s, t < \infty : \text{real constants})$$

とおくと

$$q(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(r)$$

となる。すると

$$L = 2|k + s + t|, \quad K = |s|, \quad M = |t|$$

である。これらを代入して得られる Λ を $\Lambda(s, t)$ と表す。(各 Λ によって相異なる許容範囲で) s, t を動かして $\Lambda(s, t)$ の最小値を求めることを考える。

$$\inf\{\Lambda_K(s, t) \mid s = -k, t = 0\} = k^2,$$

$$\inf\{\Lambda_A(s, t) \mid s = 0, t = 0\} = |k|,$$

$$\inf\{\Lambda_{EK}(s, t) \mid -\infty < s < \infty, t = 0\} = \min\{k^2, |k|\},$$

$$\inf\{\Lambda_{KLP}(s, t) \mid -\infty < s < \infty, |t| < \frac{1}{4}\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{if } |k| < \frac{1}{4}, \\ \min\{k^2, |k|\}, & \text{if } |k| \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$\inf\{\Lambda_{KK}(s, t) \mid -\infty < s < \infty, |t| < \frac{1}{2}\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{if } |k| < \frac{1}{2}, \\ \min\{k^2, |k|\}, & \text{if } |k| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\inf\{\Lambda_{AU}(s, t) \mid -\infty < s < \infty, |t| < 1\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{if } |k| < 1, \\ \min\{k^2 - 1, |k|\}, & \text{if } |k| \geq 1. \end{cases}$$

最小値 k^2 を与えるような $q(x)$ の分解は

$$V_1 \equiv V_3 \equiv 0, \quad V_2 = -k \frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-1-\varepsilon_0})$$

である。最小値 $|k|$ を与えるような分解は

$$V_1 = -k \frac{\sin 2r}{r}, \quad V_3 \equiv 0, \quad V_2 = O(r^{-1-\varepsilon_0})$$

である。最小値 0 を与えるような分解は

$$V_1 \equiv 0, \quad V_2 = O(r^{-1-\varepsilon_0}), \quad V_3 = -k \frac{\sin 2r}{r}$$

である。これらはいずれも、 K, L, M を無理やり相互干渉させようとしても Λ が最小値を取るという最適な状態では、相互干渉していないことを示す。しかし Λ_{AU} のみに現れる最小値 $k^2 - 1$ を与えるような分解はこれらとは異なり

$$V_1 \equiv 0, V_2 = \left\{ \frac{1}{k} - k \right\} \frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-1-\varepsilon_0}), V_3 = -\frac{1}{k} \cdot \frac{\sin 2r}{r}$$

であり, K と M の間で相互干渉を起こしている.

次に Λ_{AU} を導いた定理を適用して最適化することを考える. これは

$$\text{Uchiyama [11]} : \lambda > \frac{1}{2} (\sqrt{4k^2 + 1} - 1) \Rightarrow \text{"no"}$$

を導いたときと同じ考え方である.

命題 A. (Arai-Uchiyama [2])

$$(-\Delta + q_1(x) + q_2(x)) \psi(x) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n,$$

$$q_1(x), q_2(x) : \text{ bounded, real-valued,}$$

$$\exists \sigma(r), \exists \eta(r) : \text{ real-valued,}$$

$$\exists \delta > 0, \exists \tau > 0 : \text{ constants s.t.}$$

$$(1) \quad \sigma(r) \geq \delta \quad \text{for } \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

$$(2) \quad \eta(r) \leq 2, \quad \text{bounded,}$$

$$(3) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} [r \partial_r q_1 + \eta(r) q_1 + \sigma(r)^{-1} |r q_2 - Q'(r)|^2] < 0,$$

$$Q(r) = \frac{1}{4}(\eta(r) - \sigma(r)),$$

$$(4) \quad r q_2(x) - Q'(r) : \text{ bounded,}$$

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \exp \left(\int_1^r \frac{\tau - \eta(t)}{t} dt \right) = 0,$$

$$(6) \quad \exp \left(- \int_1^r \frac{\sigma(t) + \eta(t)}{2t} dt \right) \notin L^1(1, \infty),$$

$\Rightarrow$

$\psi \neq 0$ とすると $\psi \notin L^2(\mathbf{R}^n)$.

これに対して次を得る.

命題 B.(Arai-Uchiyama [4]) $\lambda > 0$ および実定数 k が与えられているとする. このとき,

$\exists s, \exists u, \exists v, \exists \sigma_0, \exists \eta_0$: *real constants s.t.*

$$q_1(x) = -(k+s)\frac{\sin 2r}{r} - \lambda,$$

$$q_2(x) = s\frac{\sin 2r}{r} + O(r^{-1-\varepsilon_0}),$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 + 2u \cos 2r,$$

$$\eta(r) = \eta_0 + 2v \cos 2r$$

が命題 A の仮定を満たす.

$\Longleftrightarrow$

$\exists s, \exists u, \exists v, \exists \sigma_0, \exists \eta_0$: *real constants s.t.*

$$\sigma_0 + \eta_0 \leq 2, \eta_0 > 0, 2|u| < \sigma_0, \eta_0 + 2|v| \leq 2,$$

$$f(X) > 0 \quad \text{for } \forall X \in [-1, 1],$$

ここで

$$\begin{aligned} f(X) = & \left\{ (s-u+v)^2 + 4u(k+s+v\lambda) \right\} X^2 \\ & + 2 \left\{ (k+s+v\lambda)\sigma_0 + u\eta_0\lambda \right\} X + \sigma_0\eta_0\lambda - (s-u+v)^2 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$|k| < \begin{cases} \lambda + \sqrt{\lambda} & : \lambda \geq 1, \\ 1 + \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1} & : 1 > \lambda > 0. \end{cases}$$

上記の q_1, q_2 に対しては

$$q_1 + q_2 = q - \lambda$$

が成り立つことに注意する。命題 A および命題 B より次を得る。

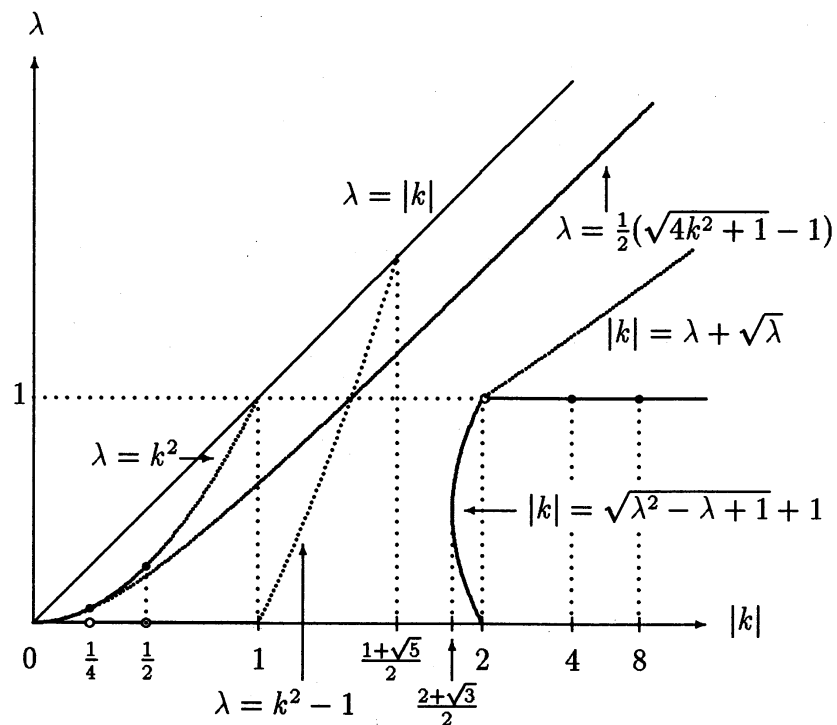
定理 5.(Arai-Uchiyama [4])

$$|k| < \begin{cases} \lambda + \sqrt{\lambda} & : \lambda \geq 1, \\ 1 + \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1} & : 1 > \lambda > 0. \end{cases} \Rightarrow \text{"no"}.$$

系 6.(Arai-Uchiyama [4])

$$|k| < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda > 0 \Rightarrow \text{"no"}.$$

以上の結果より次の表を得る。



参考文献

- [1] S. Agmon. Lower bounds for solutions of Schrödinger equations. *J. Analyse Math.*, **23**(1970), 1–25.
- [2] M. Arai and J. Uchiyama. Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions I — General theory —. *in preparation*
- [3] M. Arai and J. Uchiyama. Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions II — Applications —. *in preparation*
- [4] M. Arai and J. Uchiyama. On the von Neumann and Wigner potentials. *in preparation*
- [5] F.V. Atkinson. The asymptotic solution of second-order differential equations. *Ann. Math. Pura Appl.*, **37**(1954), 347–378.
- [6] M. S. P. Eastham and H. Kalf. *Schrödinger-type operators with continuous spectra*. Research Notes in Mathematics 65, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1982.
- [7] H. Kalf and V. K. Kumar. On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with long range potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275**(1983), 215–229.
- [8] T. Kato. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**(1959), 403–425.
- [9] G. B. Khosrovshahi, H. A. Levine and L. E. Payne. On the positive spectrum of Schrödinger operators with long range potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **253**(1979), 211–228.
- [10] H.E. Moses and S.E. Tuan. Potentials with zero scattering phase. *Nuovo Cimento* **13**(1959), 197–206.
- [11] J. Uchiyama. Polynomial growth or decay of eigenfunctions of second-order elliptic operators. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **23**(1987), 975–1006.
- [12] J. von Neumann and E. P. Wigner. Über merkwürdige diskrete eigenwerte. *Phys. Z.*, **30**(1929), 465–467.