

曲線の空間上の双ハミルトン系

関西学院大学・理工学部 黒瀬 俊 (Takashi Kurose)
School of Science and Technology,
Kwansei Gakuin University

ユークリッド平面やアフィン平面、射影平面など「平面」上の曲線に対して、その幾何的不変量として曲率が定まる。曲線が運動すれば、それにつれて曲率も変化するが、運動がある特定の自律的なルールに従うときは、曲率の時間変化を記述する方程式が可積分系となることがある ([1, 2, 6])。さらに、そのような運動のいくつかについては、曲線の空間上に (前) シンプレクティック構造をうまく定めることによって、ハミルトン系として表わせることが知られている ([3, 4, 5, 7, 8])。

一方、KdV 方程式や変形 KdV 方程式といった可積分系方程式は、適当な関数空間上のポアソン括弧式を用いてハミルトン系として表わされるだけでなく、二つのポアソン括弧式を用いた双ハミルトン系として記述できることも多い。そこで、対応する曲線の運動においても、双ハミルトン系に相当する記述があるのではないかと考えるのは自然であろう。この間に関して、本講演では、等積中心アフィン平面曲線の運動 (KdV 方程式)、ユークリッド平面曲線の運動 (変形 KdV 方程式)、複素双曲線内の曲線の運動 (バーガース方程式) の場合 (括弧内はそれぞれの運動で対応する可積分系方程式) に、一橋大学大学院・経済学研究科 藤岡敦氏との共同研究で得られた結果を述べる。

なお、本稿では曲線はすべて $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ からのめ込み写像、すなわち正則閉曲線とし、 S^1 の座標は s で表わす。

1 等積中心アフィン平面曲線の運動

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の曲線 $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で、 $\det(\gamma, \gamma_s) = 1$ を満たすものを等積中心アフィン曲線という。このとき $\det(\gamma, \gamma_{ss}) = 0$ が成り立ち、 $\gamma_{ss} = -\kappa\gamma$ を満たす S^1 上の関数 κ が定まる。この κ を γ の等積中心アフィン曲率と呼ぶ。

t を時間パラメータとして、等積中心アフィン曲線の運動 (1-パラメータ族) $\gamma(\cdot, t)$ が与えられたとき、 $\gamma_t = \alpha\gamma + \beta\gamma_s$ とおくと、 $2\alpha + \beta_s = 0$ が成り立ち、その等積中心アフィン曲率 $\kappa(\cdot, t)$ は

$$\kappa_t = \frac{1}{2}\beta_{sss} + 2\kappa\beta_s + \kappa_s\beta \equiv \Omega\beta_s$$

に従って時間発展する。ここで Ω は

$$\Omega = \frac{1}{2}D_s^2 + 2\kappa + \kappa_s D_s^{-1} \quad (D_s = \frac{\partial}{\partial s})$$

で定義される微分-積分作用素であり、KdV 方程式の再帰作用素と呼ばれている。特に運動が $\gamma_t = (-\kappa_s/2)\gamma + \kappa\gamma_s$ を満たしているならば、 κ は KdV 方程式

$$\kappa_t = \Omega\kappa_s = \frac{1}{2}\kappa_{sss} + 3\kappa\kappa_s$$

に従う。

一般に $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、方程式 $\kappa_t = \Omega^n \kappa_s$ を n 次 KdV 方程式といい、これらの方程式を総称して KdV 階層という。運動が

$$\gamma_t = \left(-\frac{1}{2}\Omega^{n-1}\kappa_s\right)\gamma + (D_s^{-1}\Omega^{n-1}\kappa_s)\gamma_s \equiv (X_n)_\gamma$$

を満たしているとき、その等積中心アフィン曲率は n 次 KdV 方程式に従う。

KdV 階層の各方程式は適当な関数空間上のポアソン括弧式を用いて、ハミルトン系として記述される。これに対して、対応する曲線の運動は、曲線の空間上のハミルトン系として記述することができる。今、 $\mathcal{M}$ を等積中心アフィン曲線全体のなす空間とし、 $\mathcal{M}$ 上の $(0, 2)$ -テンソル場 ω_0 を

$$(\omega_0)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \det(X, Y) ds, \quad X, Y \in T_\gamma(\mathcal{M}), \gamma \in \mathcal{M}$$

で定める (右辺では、 $\gamma \in \mathcal{M}$ における接ベクトル X, Y をそれぞれ γ に沿った $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ のベクトル場と同一視した)。このとき、

- ω_0 は $\mathcal{M}$ 上の閉 2 次微分形式、すなわち前シンプレクティック形式となり、
- $\mathcal{M}$ 上の関数 $H_n, n = 1, 2, 3, \dots$ が存在して、 $dH_n = \omega_0(X_n, \cdot)$ が成り立つ。

従って、曲率が n 次 KdV 方程式に従って変化する運動を生成する $\mathcal{M}$ 上のベクトル場 X_n は、 ω_0 に関する H_n のハミルトン・ベクトル場である (ちなみに、 $H_n, n = 1, 2, 3, \dots$ は

$$H_1 = \int_{S^1} \kappa ds, \quad H_2 = \int_{S^1} \frac{1}{2}\kappa^2 ds, \quad H_3 = \int_{S^1} \left(\frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{4}\kappa_s^2\right) ds, \quad \dots$$

と具体的に与えることができる)。

前シンプレクティック形式 ω_0 の定義および $n = 1$ の場合の上記の結果は、Pinkall [8] によって与えられたものであるが、実は、KdV 階層に対応する曲線の運動にこれとは異なるハミルトン系としての記述を与えることができる。

定理 1 $\mathcal{M}$ 上の $(0, 2)$ -テンソル場 ω_1 を

$$(\omega_1)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \det(X, (D_s^2 + \kappa)Y) ds, \quad X, Y \in T_\gamma(\mathcal{M}), \gamma \in \mathcal{M}$$

で定めると、 ω_1 は $\mathcal{M}$ 上の前シンプレクティック形式となり、

$$dH_{n+1} = \omega_1(X_n, \cdot), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つ。

すなわち、 X_n は、 ω_0 に関する H_n のハミルトン・ベクトル場であると同時に、 ω_1 に関する H_{n+1} のハミルトン・ベクトル場でもある。この意味で、KdV 階層に対応する曲線の運動は、 $\mathcal{M}$ 上の双前シンプレクティック構造 (ω_0, ω_1) による双ハミルトン系 $(\omega_0, \omega_1, \{H_n\})$ として記述されると言える。

注意 ついでではあるが、この $\mathcal{M}$ 上の双前シンプレクティック構造 (ω_0, ω_1) について、分かっていることがらをいくつか記しておこう。

(i) $\mathcal{M}$ には S^1 と $SL(2; \mathbb{R})$ が次のようにして自然に作用する：

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ni \gamma &\mapsto \gamma(\cdot + \sigma) \in \mathcal{M}, \quad \sigma \in S^1, \\ \mathcal{M} \ni \gamma &\mapsto A\gamma \in \mathcal{M}, \quad A \in SL(2; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

ω_0, ω_1 はこの二つの作用で不変であり、

$$\text{Ker}(\omega_0)_\gamma = T_\gamma(S^1 \cdot \gamma), \quad \text{Ker}(\omega_1)_\gamma = T_\gamma(SL(2; \mathbb{R}) \cdot \gamma), \quad \gamma \in \mathcal{M}$$

である。

(ii) $(\mathcal{M}, \omega_1)$ の S^1 -作用に対する運動量写像 μ_1 は

$$\mu_1(\gamma)(\partial/\partial\sigma) = H_1(\gamma), \quad \gamma \in \mathcal{M}$$

で与えられる。

2 ユークリッド平面曲線の運動

曲率が変形 KdV 方程式に従って時間変化するユークリッド平面曲線の運動は 1970 年代に与えられており、井ノ口 [6] にあげられている曲線の運動の例の中で最も古いものである。この運動を、前節と同様の定式化で取り上げよう。

$\hat{\mathcal{M}}$ を、ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ の閉曲線で、弧長で径数づけられているものの全体のなす空間：

$$\hat{\mathcal{M}} = \{\hat{\gamma} : S^1 \looparrowright \mathbb{E}^2; |\hat{\gamma}_s| = 1\}$$

とする。 $\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{M}}$ に対して、 $T = \hat{\gamma}_s$ とし、 N を $\hat{\gamma}$ に沿った左向き単位法ベクトル場とすると、その曲率 $\hat{\kappa}$ は $T_s = \hat{\kappa}N$ で与えられる。

ユークリッド平面曲線の運動 $\hat{\gamma}(\cdot, t)$ が与えられたとき、 $\hat{\gamma}_t = \hat{\alpha}T + \hat{\beta}N$ とおくと、 $\hat{\alpha}_s = \hat{\kappa}\hat{\beta}$ が成り立ち、曲率 $\hat{\kappa}(\cdot, t)$ の時間発展は

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\beta}_{ss} + \hat{\kappa}\hat{\alpha}_s + \hat{\kappa}_s\hat{\alpha} \equiv \hat{\Omega}(2\hat{\beta}), \quad \hat{\Omega} = \frac{1}{2}(D_s^2 + \hat{\kappa}^2 + \hat{\kappa}_s D_s^{-1}\hat{\kappa})$$

で与えられる ($\hat{\Omega}$ が変形 KdV 方程式の再帰作用素である)。特に運動が $\hat{\gamma}_t = (\hat{\kappa}^2/4)T + (\hat{\kappa}_s/2)N$ を満たしているとき、 $\hat{\kappa}$ は変形 KdV 方程式

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\Omega}\hat{\kappa}_s = \frac{1}{2}\hat{\kappa}_{sss} + \frac{3}{4}\hat{\kappa}^2\hat{\kappa}_s$$

に従う。一般に $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、運動が

$$\hat{\gamma}_t = \frac{1}{2}(D_s^{-1}(\hat{\kappa}\hat{\Omega}^{n-1}\hat{\kappa}_s))T + \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^{n-1}\hat{\kappa}_s)N \equiv (\hat{X}_n)_\gamma$$

を満たすとき、 $\hat{\kappa}$ は n 次変形 KdV 方程式 $\hat{\kappa}_t = \hat{\Omega}^n\hat{\kappa}_s$ に従う。これらの運動もハミルトン系として記述できることが知られていた ([5] 参照) が、1 節の場合と同じく、さらに双ハミルトン系としての記述に拡張することができる。それらをまとめたのが次の定理である。

定理 2 $\mathbb{E}^2$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とし、 $\hat{\mathcal{M}}$ 上の二つの $(0, 2)$ -テンソル場 $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1$ を

$$(\hat{\omega}_0)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \langle D_s X, Y \rangle ds, \quad (\hat{\omega}_1)_\gamma(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \langle D_s X, D_s^2 Y \rangle ds, \\ X, Y \in T_{\hat{\gamma}}(\hat{\mathcal{M}}), \quad \hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{M}}$$

で定める。このとき、 $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1$ は $\hat{\mathcal{M}}$ 上の前シンプレクティック形式であり、 $\hat{\mathcal{M}}$ 上の関数 $\hat{H}_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が存在して、

$$d\hat{H}_n = \hat{\omega}_0(\hat{X}_n, \cdot), \quad d\hat{H}_{n+1} = \hat{\omega}_1(\hat{X}_n, \cdot), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つ。

3 ミウラ変換

等積アフィン中心平面曲線の空間 $\mathcal{M}$ の「複素化」 $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ を

$$\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \{\gamma : S^1 \looparrowright \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}; \det(\gamma, \gamma_s) = 1\}$$

で定める。 $\mathbb{C}^2$ の曲線 $\gamma \in \mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ に対しても、 $\gamma_{ss} = -\kappa\gamma$ で「曲率」 κ を定義することができ、1 節で述べたことは形式的にはすべて成り立つ。

前節で扱ったユークリッド平面曲線 $\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{M}}$ に対して、自然な同一視 $\mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}$ によって $\hat{\gamma}: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ とみなし、

$$\gamma = \Phi(\hat{\gamma}) = (-\hat{\gamma}_s)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、 $\gamma \in \mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ となり¹⁾。 $\hat{\gamma}$ の曲率を $\hat{\kappa}$ とすると、 γ の曲率 κ は

$$\kappa = \frac{\sqrt{-1}}{2} \hat{\kappa}_s + \frac{1}{4} \hat{\kappa}^2$$

で与えられる。これは、変形 KdV 方程式の解と KdV 方程式の解との間の良く知られたミウラ変換に他ならない。この対応 $\Phi: \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ は変形 KdV 階層に対応する運動とそのハミルトン系を、KdV 階層に対応する運動とそのハミルトン系にうつす ([5]) が、さらに双ハミルトン系の間の対応も与えていることがいえる。これらをまとめて、定理の形で書くと、

定理 3 $(\omega_0, \omega_1, \{H_n\})$ を KdV 階層に対応する $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ 上の双ハミルトン系とし、 $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \{\hat{H}_n\})$ を変形 KdV 階層に対応する $\hat{\mathcal{M}}$ 上の双ハミルトン系とすると、

$$\Phi^* \omega_0 = \omega_0, \quad \Phi^* \omega_1 = \omega_1, \quad \Phi^* \hat{H}_n = H_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。

4 複素双曲線内の曲線の運動

複素双曲線 $C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; zw = 1\}$ 内の閉曲線全体のなす空間を $\mathcal{M}_B$ と書く。 $\gamma = (z, w) \in \mathcal{M}_B$ に対して、 $\tau = z_s/z (= -w_s/w)$ とおき、 γ の曲率 κ を $\kappa = -\sqrt{-1}\tau_s/\tau$ で定義する。

C 内の曲線の運動 $\gamma(\cdot, t)$ に対して、 $\gamma_t = \mu\gamma_s$ を満たす S^1 上の関数 μ が存在し、曲率 $\kappa(\cdot, t)$ は

$$\kappa_t = -\sqrt{-1}\mu_{ss} + \kappa\mu_s + \kappa_s\mu = \Omega_B\mu_s, \quad \Omega_B = -\sqrt{-1}D_s + \kappa + \kappa_s D_s^{-1}$$

に従って時間発展する (Ω_B はバーガス方程式の回帰作用素と呼ばれる)。特に $\gamma_t = \kappa\gamma_s$ を満たす運動に対しては、曲率はバーガス方程式

$$\kappa_t = \Omega_B\kappa_s = -\sqrt{-1}\kappa_{ss} + 2\kappa\kappa_s$$

に従う。一般に $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、運動が

$$\gamma_t = (D_s^{-1}\Omega_B^{n-1}\kappa_s)\gamma_s$$

¹⁾厳密には γ は $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ の閉曲線であるが、以下の議論に本質的な影響はない。

を満たすときは、曲率は n 次バーガス方程式 $\kappa_t = \Omega_B^n \kappa_s$ に従う。

バーガス階層に対応する運動も、 $\mathcal{M}_B$ 上のハミルトン系として記述することができる ([3, 4]) が、実はさらに (無限) 多重ハミルトン系としての記述を持つ。以下、その要点を述べる。

$\gamma \in \mathcal{M}_B$ における接空間 $T_\gamma(\mathcal{M}_B)$ を $\{\mu\gamma_s; \mu: S^1 \rightarrow \mathbb{C}\}$ と同一視して、 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 $\mathcal{M}_B$ 上の $(0, 2)$ -テンソル場 ω_k を

$$(\omega_k)_\gamma(\mu\gamma_s, \tilde{\mu}\gamma_s) = \text{Im} \int_{S^1} (-\sqrt{-1})^k (D_s^k(\mu\tau)) \cdot \overline{\tilde{\mu}\tau} ds,$$

$$\mu\gamma_s, \tilde{\mu}\gamma_s \in T_\gamma(\mathcal{M}_B), \gamma \in \mathcal{M}_B$$

で定める。また、 $\mathcal{M}_B$ 上の関数 $H_n, n = 1, 2, 3, \dots$ を

$$H_n = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S^1} (-\sqrt{-1})^{n-1} (D_s^{n-1}\tau) \bar{\tau} ds.$$

で定める。このとき、次のことが成り立つ。

定理 4 (i) $\omega_k, k = 0, 1, 2, \dots$ はすべて、 $\mathcal{M}_B$ 上の前シンプレクティック形式である。

(ii) n 次バーガス方程式に対応する運動は、ハミルトン系 (ω_k, H_{n+k}) で与えられる。すなわち、

$$dH_{n+k} = \omega_k((D_s^{-1}\Omega_B^{n-1}\kappa_s)\gamma_s, \cdot), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つ。

この意味で、バーガス階層に対応する曲線の運動は $\mathcal{M}_B$ 上の (無限) 多重前シンプレクティック構造 $\{\omega_k\}$ による (無限) 多重ハミルトン系 $(\{\omega_k\}, \{H_n\})$ として記述される。

1 節で述べた KdV 階層に対応する曲線の運動については双ハミルトン系どまりで、多重ハミルトン系としての記述を可能にするような前シンプレクティック構造は、もうこれ以上は入らないと思われる。しかし、実は H_1 による等高面 $\mathcal{M}_1 = \{H_1 = c\}$ (c は定数) 上でならば、第三の前シンプレクティック形式を定義することができ、曲線の運動は「三重」ハミルトン系として記述することができる。その結果を簡単にまとめて述べておこう。

今、 σ を

$$\sigma(\alpha\gamma + \beta\gamma_s) = 2\alpha\gamma, \quad \alpha\gamma + \beta\gamma_s \in T(\mathcal{M})$$

とおく。一般に $\mathcal{M}$ の接ベクトル X に対して、 $(D_s^2 + \kappa)X$ は γ 成分しか持たず、さらに X が等高面 $\mathcal{M}_1$ に接しているときは X は σ の像にはいる。そこで、

$\gamma \in \mathcal{M}_1$, $X, Y \in T_\gamma(\mathcal{M}_1)$ に対して、

$$(\omega_2)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \det(X, (D_s^2 + \kappa) \circ \sigma^{-1} \circ (D_s^2 + \kappa)Y) ds$$

と定義する。このとき、

- ω_2 は $\mathcal{M}_1$ 上の前シンプレクティック形式であり、
- $dH_{n+2} = \omega_2(X_n, \cdot)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ を満たす。

なお、上の σ を用いると、 ω_0, ω_1 は

$$\begin{aligned} (\omega_0)_\gamma(X, Y) &= \int_{S^1} \det(X, \sigma(Y)) ds \\ (\omega_1)_\gamma(X, Y) &= \int_{S^1} \det\left(X, (D_s^2 + \kappa) \circ \sigma^{-1}(\sigma(Y))\right) ds \end{aligned}$$

と書きなおす事ができる。従って、たとえば (H_1, H_2) による等高面 $\mathcal{M}_2 = \{H_1 = c_1, H_2 = c_2\}$ においては、

$$(\omega_3)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \det(X, (D_s^2 + \kappa) \circ \sigma^{-1} \circ (D_s^2 + \kappa) \circ \sigma^{-1} \circ (D_s^2 + \kappa)Y) ds$$

とすれば、運動の「四重」ハミルトン系としての記述が与えられるであろう事などが容易に予想されるが、一般の場合の証明は今後の課題である。

参考文献

- [1] K.-S. Chou and C.-Z. Qu, The KdV equation and motion of plane curves, J. Phys. Soc. Japan, **70**(2001), 1912–1916.
- [2] K.-S. Chou and C.-Z. Qu, Integrable equations arising from motions of plane curves, Phys. D, **162**(2002), 9–33.
- [3] A. Fujioka and T. Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, Osaka Journal of Mathematics, 45(2008), 1057–1065.
- [4] A. Fujioka and T. Kurose, Geometry of the space of closed curves in the complex hyperbola, Kyushu Journal of Mathematics, 63(2009), 161–165.
- [5] A. Fujioka and T. Kurose, Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7(2010), 165–175.

- [6] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4), 朝倉書店, 2010.
- [7] 黒瀬俊, Motion of equiaffine plane curves associated with the Sawada-Kotera equation, “福岡大学微分幾何研究会 Geometry and Something 2008.11.21–24, Fukuoka” 講演録, 99–103.
- [8] U. Pinkall, Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves, *Results Math.*, **27**(1995), 328–332.