

無限個の Sink をもつ

Diffeomorphism について

東大 理 坪井 俊

§ 1. 序

C^∞ manifold M 上の C^r diffeomorphism 全体を $\text{Diff}^r(M)$ と書く。

$f \in \text{Diff}^r(M)$ に対し, $\Omega(f) := \{\text{non wandering pts of } f\}$ $\text{Per}(f) := \{\text{periodic pts of } f\}$. f が Axiom A をみたすとは (a) $\Omega(f)$ が hyperbolic structure をもち, (b) $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ となる事。

問題 (1.1) (Smale [9]) Axiom A は $\text{Diff}^r(M)$ で dense か? に対し

(1.2) (Abraham, Smale [1]) $A(A)$ is not C^1 dense in $\text{Diff}^r(T^2 \times S^2)$

(1.3) (Newhouse [4]) $A(A)$ is not C^2 dense in $\text{Diff}^r(S^2)$ が示された。

Axiom A については 次がある。

定理 (1.4) (Smale) Axiom A $\Rightarrow$ Spectral decomposition をもつ。

但し, f が spec. dec. をもつとは ① $\Omega(f) = \bigcup \Omega_i$, finite disjoint union of closed invariant sets Ω_i for f . ② $f|_{\Omega_i}$ は

topologically transitive, i.e. $\exists x \in \Omega_i$ $\overline{O(x)} = \Omega_i$.

$O(x) = O_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ x の f orbit とする。

定理 (1.5) (Smale) Axiom A, no-cycle $\Rightarrow \Omega$ -stable.

(定義については [8,9]) そこで

問題(1.6) (Shub [8]) Spec. dec. (with no-cycle) は generic か?
generic とは $\text{Diff}^r(M)$ の residual subset 上で成立している事である。
これに対し、Newhouse [6] は Spec. dec. は C^r ($r \geq 2$) で generic ではないことを示した。この論文の紹介が目的である。

まず結果を述べる。sink とは hyperbolic periodic pt. of period ν で $Tf|_E$ のすべての固有値の絶対値 < 1 のものである。

定理(1.7) (Newhouse [6]) $\dim \geq 2$ の任意の manifold M に対し、 $\text{Diff}^r(M)$ ($r \geq 2$) の open subset N さらに N の residual subset B が存在し、 $\forall f \in B$ は 無限個の sink をもつ。

(1.7) から Spec. dec. の non-genericity がわかる。Sink p に対し、 $O(p)$ は $\Omega(f)$ で孤立している invariant set であることに注意すれば、 $f \in B$ について ①, ② は成り立たない。

§ 2. Set valued function と Genericity Theorem. (Pugh [7])

X を位相空間, Y を距離空間とする。 $F(Y) = \{Y \text{ の 閉集合 全体}\}$ 。 $F(Y) \ni A_1, A_2$ に対し $d(A_1, A_2) = \max \left\{ \sup_{a_1 \in A_1} d(a_1, A_2), \sup_{a_2 \in A_2} d(A_1, a_2) \right\}$ と定義すると、 $(F(Y), d)$ は metric space となる。

定義(2.1) map $\Gamma: X \rightarrow F(Y)$ が 下半連続 (l.s.c) とは $\forall x \in X, \forall y \in \Gamma(x), \forall U \text{ nbd of } y \exists N \text{ nbd of } x \text{ st. } x' \in N \Rightarrow \Gamma(x') \cap U \neq \emptyset$ 。

補題(2.2) If $\Gamma_n: X \rightarrow F(Y)$ l.s.c. $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ for $n=1, 2, 3, \dots$
 $\Rightarrow \Gamma(x) := \overline{\bigcup_n \Gamma_n(x)}$ is l.s.c. ($\overline{}$ is closure. 証明は[3])

補題(2.3) $Y: \text{compact}$. $\Gamma: X \rightarrow F(Y)$ l.s.c.
 $\Rightarrow \Gamma$ の連続点全体は X の residual subset. ([3])

注意(2.4) x が Γ の連続点ならば $\forall U$ nbd of $\Gamma(x)$. に対し
 $\exists V$ nbd of x s.t. $y \in V \Rightarrow \Gamma(y) \subset U$.

例(2.5) $P_n: \text{Diff}^r(M) \rightarrow F(M)$ $P_n(t) = \{\text{hyperbolic periodic pts of period} \leq n\}$ とする. local stability により P_n は l.s.c. 補題(2.2) により $\overline{P} = \overline{\bigcup P_n}$ は l.s.c.. 補題(2.3) により, $\overline{P}$ の連続点全体は residual subset $\mathcal{G}^r \subset \text{Diff}^r(M)$.

例(2.6) Sink_n $\overline{\text{Sink}}$ についても同様. 但し, $\text{Sink}_n(t) = \{\text{period} \leq n \text{ of sink of } t\}$ $\overline{\text{Sink}} = \overline{\bigcup \text{Sink}_n}$. ^(2.5)_(2.6) $M: \text{compact}$.

補題(2.3) をつかうと Improved Closing Lemma から General Density Theorem が導かれる. (Pugh [7]) これを follow すると M compact の時.

定理(2.7) (Improved Closing Lemma) $\text{Diff}^r(M) \ni \forall f, \Omega(f) \ni \forall p$ を固定する時. $\forall$ nbd of f . $\exists g \in N$ g は p を hyp. per pt とする.

定理(2.8) (General Density Theorem) Axiom A(b) は $\text{Diff}^r(M)$ で generic. i.e. $\exists \mathcal{G}$ residual subset $\subset \text{Diff}^r(M)$ s.t. $\mathcal{G} \ni f, \Omega(f) = \overline{\text{Per}}(f)$.

証明 $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ (2.5) に対し. $\overline{P}(f) \supset \Omega(f)$ をいう. $\Omega(f) - \overline{P}(f) \neq \emptyset$ $g \in \Omega(f) - \overline{P}(f)$ とする. $\exists V$ $\overline{P}(f)$ の nbd s.t. $V \not\ni g$
 f は $\overline{P}$ の連続点ゆえ (2.4) から

$\exists N$ nbd of f in $\text{Diff}^1(M)$ s.t. $N \ni \forall g$ に対し $\overline{P}(g) \subset V$

定理(2.7)により, この N に対し $\exists g' \in N$ s.t. g' has a hyp. per pt at g . $\therefore \overline{P}(g') \not\subset V$. 矛盾である。 //

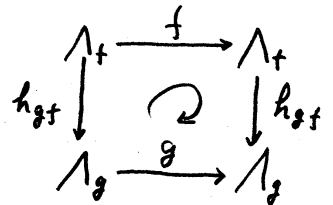
Newhouse の定理(1.7)はこれと同様に示される。まず定理(1.7)の N を(1.3)の例をつかって構成する。

§ 3. Open set $N \subset \text{Diff}^r(M)$ の構成

最初に N の性質を記述する定義を述べる。

定義(3.1) Λ compact f -invariant set が basic とは hyperbolic, topologically transitive, $\overline{\text{Per}(f|_{\Lambda})} = \Lambda$, local product structure をもつ (i.e. $\forall p, p' \in \Lambda$ $W^s(p) \cap W^u(p') \in \Lambda$) こと。この時

(3.2) $\exists N_1$ nbd of f in $\text{Diff}^r(M)$.
 $\forall g \in N_1$ $\exists \Lambda_g$ basic set.
 $\exists h_{g,f}$ homeo: $\Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$ s.t.



定義(3.3) Λ basic set が nontrivial とは 2 つ以上の orbit を含むこと。このとき Λ は無限集合。

定義(3.4) $W^u(x) = W^u(x, f) = \{y \in M; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}x, f^{-n}y) = 0\}$
 $W^s(x) = W^s(x, f) = \{y \in M; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n x, f^n y) = 0\}$.

$x \in \Lambda$ のときこれは 1:1 immersed Euclidean space.

定義(3.5) $W^u(\Lambda_g) = \bigcup_{x \in \Lambda_g} W^u(x, g)$. $W^s(\Lambda_g) = \bigcup_{x \in \Lambda_g} W^s(x, g)$

定義(3.6) $W^u(x, g)[W^u(\Lambda_g)] \subset W^s(y, g)[W^s(\Lambda_g)]$ の Point of

tangency とは $[\exists x, y \in \Lambda_g] \cdot W^u(x, g) \cdot W^s(y, g)$ の non transversal intersection point のこと。

(1.3) の Newhouse [4] の例は右図の
 ようなものである。

$$f: ABED'A'FCD \rightarrow A'B'E'D'A''F'C'D'$$

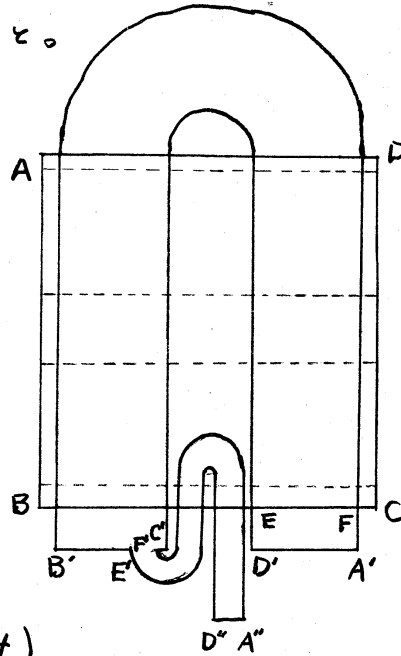
$W^u(\Lambda), W^s(\Lambda)$ は小さい  のあたりに

pt of tangency をもつ。(1次の接触)

さらに f の nbd N があって $N \ni g$

に対し $W^u(\Lambda_g), W^s(\Lambda_g)$ は pt of tangency

をもつ。 Λ は $f|_{ABCD}$ の non wandering set).



pt of tangency $\in \Omega(f)$ がいえてここで Axiom A(a) がくずれる。

これを少し perturb したものと disc の contraction を使って
 次のみたす $f \in \text{Diff}^n(M)$ とその近傍 N が構成できる。

(3.7) (1) Λ_f non trivial basic set がある。

$$(2) \exists P \in \Lambda_f \text{ hyp. per. pt. } \dim W^s(P) = \dim M - 1 \quad \mu(P) \cdot \lambda(P) < 1$$

(3) $N \ni g$ に対し (3.2) で Λ_g が定義され $P_g = h_{g,f}(P)$ に対し

$$\mu(P_g) \cdot \lambda(P_g) < 1$$

(4) $N \ni g$ に対し $W^u(\Lambda_g), W^s(\Lambda_g)$ は pt of tangency をもつ。

local に 1 次 の接触 となっている。

但し. hyp. per. pt. $P, \dim W^s(P) = \dim M - 1$ に対し. period ν の時

Tf_p^ν の固有値 $\mu_1, \dots, \mu_s, \lambda, |\mu_1| \leq \dots \leq |\mu_s| < 1 < |\lambda|$ について $\mu(P) = |\mu_s|, \lambda(P) = |\lambda|$.

この N にて l.s.c. fun $\overline{\text{Sink}}$ を考えて, §2 のように $\overline{\text{Sink}(f)} \supset \overline{W^s(\gamma) \cap W^u(\gamma)}$ が N では generic に成立することを示す.
まず $W^s(\gamma) \cap W^u(\gamma)$ について考える.

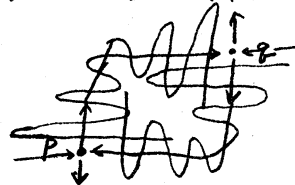
§4. homodinic point と homodinic relation.

(4.6) が目標である.

定義(4.1) hyp. per. pts of f p, q が homodinicly related
 $p \sim_h q \stackrel{\text{def}}{\iff} W^u(o(p)) \cap W^s(o(q)) \neq \emptyset \quad W^s(o(p)) \cap W^u(o(q)) \neq \emptyset$

これは equivalence relation. (λ -lemma).

p の equivalence class を H_p と書く.



定義(4.2) $h_p = W^u(o(p)) \cap W^s(o(p)) - o(p)$: transverse homodinic pt 全体.

補題(4.3) $\overline{h_p}$ は closed, f invariant, topologically transitive.

定理(4.4) (Newhouse[5]) H_p が 2 つ以上の orbit を含むならば $\overline{h_p} = \overline{H_p}$. (証明:[5])

補題(4.5) p を f の hyp. per pt とし, f の近傍 N, N' が q に対し P_q が定まる時, $N \rightarrow F(M) \quad g \mapsto \overline{H_{P_g}}$ は l.s.c.

証明 $g \mapsto H_{P_g}^{(n)} = \{g \in P_n, g \sim_h p\}$ は l.s.c. ならば (2.2) によりいえる. hyp. per pt. の stability により, $\forall g \sim_h p$ に対し, $\exists N$, nbd of g , s.t. $g_1 \in N \Rightarrow g_1 \sim_h p$, といえる. $\exists n_1, n_2$.
 local stable (unstable) manifold を考える.

$$W_{loc}^s(o(p_g)) \cap g^{n_1}(W_{loc}^u(o(p_g))) \neq \emptyset \quad W_{loc}^u(o(p_g)) \cap g^{n_2}(W_{loc}^s(o(p_g))) \neq \emptyset$$

が g を perturb するときかわらういことをなければい。 //

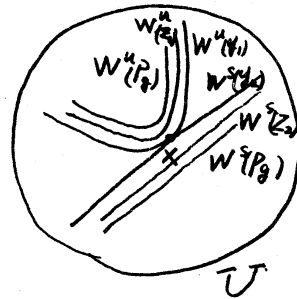
補題(4.6) (3.7) (i), $N_1 \subset \Lambda_1$ s.t. (3.2) のとき, $B_1 = \{g \mapsto \overline{H_{P_g}} \text{ の連続点} \}$ とすると $g \in B_1 \Rightarrow \overline{H_{P_g}} = \overline{W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)}$

証明 $\Lambda_g \ni P_g$. Λ_g topologically transitive, periodic pt dense, 4.2,
 Λ_g の per pt の $\sim$ class を考えると (4.4) より $\overline{H_{P_g}} = \overline{h_{P_g}}$.
 (4.4) (4.3) により $\overline{H_{P_g}} \supset \Lambda_g$. $\overline{H_{P_g}} \supset \overline{W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)}$ をいなければい。

主張(4.7) $W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g) \ni x$ を固定するとき, $\forall U$ nbd of x
 $\forall N_2$ nbd of g in N_1 $\exists g_1 \in N_2$ s.t. $\overline{H_{P_{g_1}}} \cap U \neq \emptyset$

(4.7) $\Rightarrow$ (4.6) は (2.7) $\Rightarrow$ (2.8) と同様. $\overline{W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)} = \overline{H_{P_g}} \ni x$
 とする. $x \in U$ $H_{P_g} \subset V$ $U \cap V \neq \emptyset$ をとり $U \cap (W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)) \ni x$,
 をとって (4.7) を使い矛盾を導く。

4.7) の証明 $W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g) \ni x$ の近傍 U
 を固定する. $x \in W^u(y_1), x \in W^s(y_2)$ $y_1, y_2 \in \Lambda_g$
 とする. Λ_g で Per pt は dense 4.2 y_1, y_2 に
 十分近い per pt z_1, z_2 をとる. $z_1, z_2 \in H_{P_g}$



$W^u(P_g)$ $W^s(P_g)$ は $W^u(z_1)$ $W^s(z_2)$ にいくらでも近づくから.

U 内で $W^u(P_g)$ $W^s(P_g)$ は W^u, W^s through x に近づく。

$h_{P_g} \cap U = \emptyset$ のとき, g を $g^+ U$ に N_2 で perturb して, $(P_{g_1} = P_g)$

$W^u(P_{g_1}, y_1) \cap W^s(P_{g_1}, y_2) \neq \emptyset$ in U ができる. $h_{P_{g_1}} \cap U \neq \emptyset$

$\therefore \overline{H_{P_{g_1}}} \cap U \neq \emptyset$. $g_1 \in N_2$. //

§ 5. 定理(1.7)の証明

次の命題が定理(1.7)を与える。(3.3)に注意)

命題(5.1) (3.7) (1)(2)(3)(4)のもとで, B_1 (4.6), $B_2 = \{\text{Sink の連続点}\}$ $B = B_1 \cap B_2$ とする。 $B \ni g \Rightarrow \overline{W^u(g) \cap W^s(g)} \subset \text{Sink } g$

次を仮定する。

命題(5.2) P hyp. per pt of period V of $f \in \text{Diff}^r(M^{2n})$

$\dim W^s(P) = \dim M - 1 = s$ $\mu(P) \cdot \lambda(P) < 1$ $W^u(o(P)), W^s(o(P))$ は pt of tangency x をもつ。(1次の接触) こゝでよい このとき

$\forall U$ nbd of x $\forall N$ nbd of f $\exists g \in N$ s.t. g has a sink in U .

(5.1)の証明.

主張(5.3) $\forall g \in N$ $\forall g \in H_{P_g}$ を固定するとき

$\forall N_1$ nbd of g $\forall U$ nbd of g $\exists g_0 \in N_1$ g_0 has a sink in U .

(5.3) $\Rightarrow$ (5.1) $\overline{W^u(g) \cap W^s(g)} - \text{Sink } g \neq \emptyset$ とする. $x \in \overline{W^u(g) \cap W^s(g)} - \text{Sink } g$ をとる. $g \in B \subset B_1$ $\therefore x \in H_{P_g}$

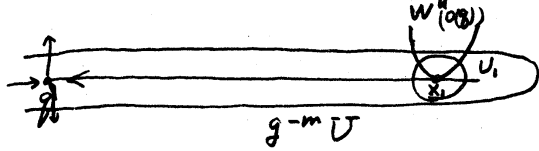
U, V open set s.t. $x \in U$, $\text{Sink } g \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ とする.

$g \in B_2$ かつ $\exists N_1 \ni g$ nbd. $g \in N_1 \Rightarrow \overline{\text{Sink } g} \subset V$. $\therefore \text{Sink } g \cap U = \emptyset$

(5.3) により $\exists g_1 \in N_1$ $\overline{\text{Sink } g_1} \cap U \neq \emptyset$ 矛盾.

(5.3)の証明. N_1 の中で $O(g)$ $O(P_g)$ を動かさないように perturb する. $H_{P_g} = H_g$ (3.7) (1) により (4.7) と同様に $W^u(o(g))$ $W^s(o(g))$ は $W^u(g)$ $W^s(g)$ の pt of tangency x をとる W^u W^s に近づく. g を $g^{-1}(x)$ の近傍で perturb して g_1 とし. g_1 は pt of tangency

x_1 を x の近くにもつ。 $\exists m. g_1^{-m}(U) \ni x, g_1^{-m}(U) \not\subset g_1^{-1}(x)$.



$x_1 \in U_1 \subset g_1^{-m}(U)$ をとる.

U_1 内で $W^s(p_2, g_1) \cap W^u(p_2, g_1)$

は x_1 を通る $W^s(0, g_1) \cap W^u(0, g_1)$ に近づく。 $g_1^{-1}(U)$ で g_2 に perturb

して、pt of tangency of $W^s(0, g_2), W^u(0, g_2), x_2$ near x_1 in U_1 を

つくる。 $g_2^{-1}(U_1) = g_1^{-1}(U_1)$ で (5.2) により (3.7) (2), (3), (4) を再

perturb して g_0 とすると g_0 は U_1 に sink s をもつ。 $g_0^{-m}(s) = g_1^{-m}(s)$

$\in U$ も sink であり g_0 は U に sink をもつ。 //

§ 6. 命題(5.2)の証明

Linearization Theorem によって p の局所座標を適当にとりて、

p の nbd と $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^1$ の 0 の nbd を同一視すると

$f^n: (u, v) \rightarrow (Au, \lambda v)$. (A : linear contraction, $|\lambda| > 1$) とする。

必要なら v を $2v$ にして $|\lambda| > 1$ とする。 適当に $n_1 < 0, n_2 > 0$

をとれば $f^{n_1}(x) = (0, v_0), f^{n_2}(x) = (u_0, 0)$ 。

$\mathbb{R}^s \times \{0\} \supset D^s \times \{0\}$ u_0 中心の disc,

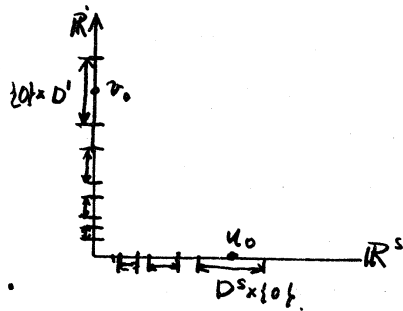
$\{0\} \times \mathbb{R}^1 \supset \{0\} \times D^1$ v_0 中心の disc を

$A^n(D^s), \lambda^{-n}(D^1)$ $n > 0$ が disjoint のようにとる。

$f^{n_2-n_1}(0, v_0) = (u_0, 0)$ $(0, v_0)$ の nbd で (D^1 とし) なおして $\{0\} \times D^1$ の nbd を

$f^{n_2-n_1}(u, v) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)), g(0, v_0) = (u_0, 0)$ 。

(6.1) $g_{2v}(0, v_0) = 0, g_{2vv}(0, v_0) < -K, K > 0$ 。

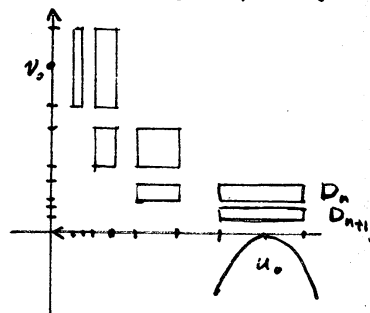


(又は $g_{2vv}(0, v_0) > k > 0$ だが、上の場合にかぎる。) 添え字は偏微分を表わす。

$D_n = D^S \times \lambda^{-n} D^1$ とおく。 f^n は $(A^n \times \lambda^n) D_n$

で linearize されているとしてよい。

$f_{n,t}(u, v) = (g_1(A^n u, \lambda^n v), g_2(A^n u, \lambda^n v) + t)$ とおく。



主張(6.2) $\forall$ nbd U_0 of $(U_0, 0) \exists N > 0 \forall n > N \exists t_n 0 < t_n \leq K, \lambda^{-n+1}$

f_{n,t_n} は U_1 に fixed sink を持つ. (K_1 : const.)

(6.2) $\Rightarrow$ (5.2) $\forall U \ni x \forall N \ni f$ (6.2) により n 大のとき

f_{n,t_n} は $U_1 = f^{\frac{n_2}{n}}$ U に fixed sink を持つ. n を大きくする

ると t_n は小さくとれるから、 f を $f(x)$ の nbd で perturb (7 (N2))

f_1 とし、 $f_1^{n_2-n_1+\nu_n} = f_{n,t_n}$ とできる。 f_{n,t_n} の sink を s とする

と、 $f_1^{-n_2} s \in U$ は f_1 の periodic sink. $f_1 \in N$. //

(6.2) の証明 $f_{n,t}$ の fixed pt は

$$\begin{cases} u = g_1(A^n u, \lambda^n v) \\ v = g_2(A^n u, \lambda^n v) + t \end{cases} \text{ の解}$$

上の式は $v \in \lambda^n v_0$ の nbd で固定すると

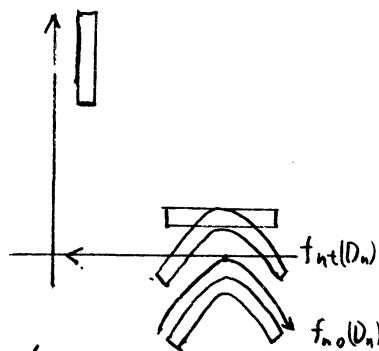
$D^S \rightarrow D^S \times V \rightarrow D^S$ は n 十分大のとき contraction

ゆえ fixed pt がある。これを $u(v)$ と書くと

$\psi(u, v) = u - g_1(A^n u, \lambda^n v)$ について

$\frac{\partial \psi}{\partial u} = I - g_{1u}(A^n u, \lambda^n v) A^n$ は n が大のとき isomorphism かつ

$u(v)$ は C^∞ map である。 $u'(v)$ を計算すると、



$$(6.3) \quad u'(v) = (I - g_{1u} A^n)^{-1} g_{1v} \lambda^n. \quad (\text{偏微分は } (A^n u(v), \lambda^n v) \text{ の値})$$

$f_{n,t}$ の fixed pt を $(u(v), v)$ とすると v は $\phi_{n,t}(v) = 0$ をみたす.

$$\text{但し } \phi_{n,t}(v) = g_2(A^n u(v), \lambda^n v) - v + t.$$

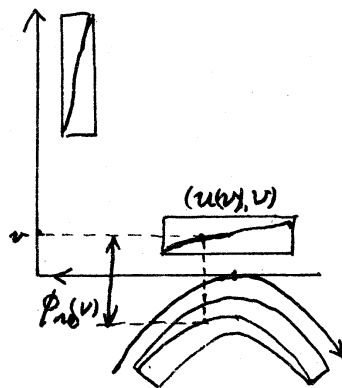
n 大のとき $\phi_{n,t}$ は unique maximum をもつ.

ことを示す.

$$(6.4) \quad \phi'_{n,t}(v) = g_{2u} A^n u'(v) + g_{2v} \lambda^n - 1$$

$$(6.5) \quad \mu \lambda < 1 \text{ かつ } |A^n|(|u'(v)|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{かつ第一項} \rightarrow 0. \quad (6.3)$$



第二項は (6.1) により, $\exists K_2 > 0 \exists v_1 < v_2 \in \lambda^{-n}(D')$ (n : 大のとき)

$$g_{2v}(A^n u(v_1), \lambda^n v_1) > K_2 \quad g_{2v}(A^n u(v_2), \lambda^n v_2) < -K_2. \quad \lambda > 1 \text{ かつ}$$

n 大ならば, 正負の十分大きい値をとる.

$$\therefore \exists v_n \in \lambda^{-n} D' \quad \phi'_{n,t}(v_n) = 0.$$

$$(6.6) \quad \phi''_{n,t}(v) < -K_3 \quad (K_3 > 0 \quad n \text{ 大のとき}) \text{ が計算によりいえる.}$$

$$\therefore \phi_{n,t} \text{ は } v_n \text{ で unique max をもち, } 0 \leq s_n < t_n < K_1 \lambda^{-n+1}$$

$$\phi_{n,t} \text{ は } s_n \text{ で 1 つの zero } v_{1nt} \text{ をもち, } s_n < t \leq t_n \text{ で 2 つの zero}$$

$$v_{1nt} < v_{2nt} \text{ をもち. } (K_1 \text{ は } g \text{ にのみよる const.})$$

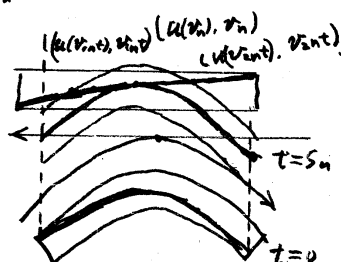
このとき $(u(v_{1nt}), v_{1nt}), (u(v_{2nt}), v_{2nt})$ は $f_{n,t}$ の fixed pt.

$(u(v_{2nt}), v_{2nt})$ が sink であることを示せば

$$t \rightarrow s_n \text{ のとき } (u(v_{1nt}), v_{1nt}) \rightarrow (u(v_n), v_n)$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } (u(v_n), v_n) \rightarrow (u_0, 0) \quad (f_{n,s_n}$$

の fixed pt かつ) ため (6.2) がいえる.



$f_{n,t}$ の Jacobian $= \begin{pmatrix} g_{1n} A^n & g_{1n} \lambda^n \\ g_{2n} A^n & g_{2n} \lambda^n \end{pmatrix}$ を $(u(v), v)$ での固有値を評価する. (t にはよらない)

$$\begin{pmatrix} g_{1n} A^n & g_{1n} \lambda^n \\ g_{2n} A^n & g_{2n} \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(v) \\ 1 + \phi'_{n,t}(v) \end{pmatrix} \quad \text{に注意して} \quad \begin{pmatrix} I & u'(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{で変換する.}$$

$$\begin{pmatrix} I & -u'(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1n} A^n & g_{1n} \lambda^n \\ g_{2n} A^n & g_{2n} \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & u'(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1n} A^n - u'(v) g_{2n} A^n & -u'(v) \phi'_{n,t}(v) \\ g_{2n} A^n & 1 + \phi'_{n,t}(v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \quad \text{について} \quad \forall \varepsilon \quad n, t \text{ 十分大にすれば } \quad \forall v \text{ が } v_n \text{ に近いとき} \\ |E|, |F|, |G| < \varepsilon, |H-1| < \varepsilon \quad (16.5) \text{ より}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \text{ は } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を perturb したものである.}$$

固有値の行列の成分に対する連続性から $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ は 0 に近い固有値を S 個, 1 に近い固有値を 1 個持つ. $(u(v_{n,t}), v_{n,t})$ では 1 の近くの固有値 < 1 を示す.

$v = v_n$ に対し $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ の固有値 1 の固有ベクトル.

$$\alpha(v) \begin{pmatrix} w(v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(v) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とあって, } w, \alpha \text{ を } w(v_n) = 0, \alpha(v_n) = 1 \text{ を満たす関数として}$$

求める. w は $\Psi(v, w) = 0$ を満たす. 但し

$$\Psi(v, w) = (g_{1n} A^n - u'(v) g_{2n} A^n) w - u'(v) \phi'_{n,t}(v) - (1 + \phi'_{n,t}(v) + g_{2n} A^n w) w.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial w}(v_n, 0) = g_{1n} A^n - u'(v) g_{2n} A^n - I \quad \text{は } n \text{ 大のとき isomorphism}$$

$$\therefore \exists \text{ smooth fun } w(v) \quad w(v_n) = 0 \quad \Psi(v, w(v)) = 0.$$

$$\alpha(v) = 1 + \phi'_{n,t}(v) + g_{2n} A^n w.$$

$$\frac{d\alpha}{dV}(V_n) = \phi''_{nt}(V_n) + g_{2n} A^n \frac{dW}{dV} \quad \frac{dW}{dV} \text{を計算すると}$$

$$\frac{dW}{dV}(V_n) = (g_{1n} A^n - u'(V_n) g_{2n} A^n - I)^{-1} \phi''_{nt}(V_n) u'(V_n).$$

$$\therefore g_{2n} A^n \frac{dW}{dV} \rightarrow 0. \quad (6.5) \quad (6.6) \text{により} \quad \frac{d\alpha}{dV}(V_n) < 0 \quad (n:K)$$

$$\therefore V_{2nt} \text{が} V_{2n} \text{に近いとき} \quad \alpha(V_{2nt}) < 1 \quad \therefore (u(V_{2nt}), v_{2nt}) \text{は Sink.}$$

// $((u(v_{int}), v_{int}))$ は saddle である。

§ 7. 問題

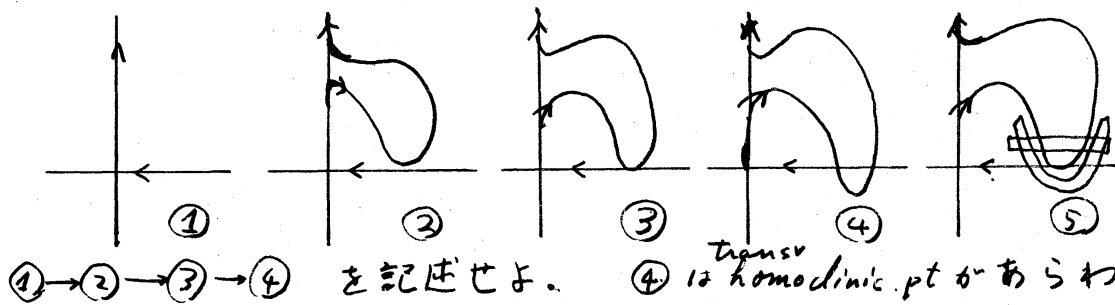
問題(7.1) "M の generic pt は attractor に向かう (sink に向かう)"

は $\text{Diff}^r(M)$ の generic property か? attractor = closed invariant set Λ , $\exists$ compact nbd U s.t. $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \Lambda$.

問題(7.2) generic diffeo は Sink 又は Source を持つか?

例えば $\text{Diff}^r(S^1)$ で.

問題(7.3) hyperbolic fixed pt のまわりで local に diffeo を変化させていくとき, の Ω, W^s, W^u の様子を記述せよ。



れる。③からの perturbation が 命題(6.2) であるが、⑤で見ると sink を作ったのは ③ → ② の過程である。Newhouse はこの問題から ヒントを得たと述べている。

References.

- [1] R. Abraham. S. Smale., Non-genericity of Ω -stability. Global Analysis XIV. (1970) 5-8.
- [2] M. Hirsch, C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets. Global Analysis XIV (1970) 133-165.
- [3] C. Kuratowski Topologie vol II. 1961.
- [4] S. Newhouse. Non-density of axiom A(a) on S^2 . Global Analysis XIV (1970). 191-203.
- [5] S. Newhouse Hyperbolic limit sets. Trans. A. M. S. 167 (1972) 125-150.
- [6] S. Newhouse Diffeomorphisms with infinitely many sinks. Topology 12 (1974) 9-18.
- [7] C. Pugh. An improved closing lemma and a general density theorem. Amer. J. Math. 89 (1967) 1010-1021.
- [8] M. Shub Stability and genericity for diffeomorphisms. ~~Bull. A. M. S. 77~~ Dynamical Systems Peixoto. 1971. ⁴⁹³~~-514~~.
- [9] S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. A. M. S. 73 (1967) 747-817.