

SQUIDにおける位相のダイナミクス：拡散係数の異常 拡散と特異なエネルギー依存性

大阪市立大学工学部 加藤 岳生、谷本 健一、中村 勝弘

§ 1. はじめに

決定論に従う拡散現象とその統計的特性は20年以上に渡って研究が行われてきており[1]、多くの決定論的な系で熱拡散とは異なる特徴が見出されている。その代表的なものとして、2乗平均変位の時間のべきが1を超える異常拡散が挙げられる。この異常拡散は散逸系では低次元マップ系やジョセフソン接合系、二次元対流などで研究されており、実験との対応が議論されている。一方、ハミルトン系では二次元電子系[2]を対象に研究が行われてきたが、不純物散乱や非一様性の効果を無視できるような理想的な実験が困難であり、現実性のある実験系における異常拡散はこれまで研究されてこなかった。

また近年になって、一次元写像系において、2乗平均変位の時間のべきが1となる通常拡散領域においても、拡散係数がモデル・パラメーターに対し特異なフラクタル構造をもつことが見出された[3]。その後、ハミルトン写像系においても、拡散係数に同様の自己相似性が見つかっている[4]。しかしながら、通常拡散の領域においても、異常拡散の場合と同じ理由で、実験的に実現可能な系で、この奇妙な特徴を明らかにすることが切望されていた。

ここでは、決定論的な拡散現象を実験的により容易に取り扱うことができる系として、摩擦の非常に少ない微小超伝導接合素子（微小SQUID系）を取り上げ、このハミルトン系の異常拡散と通常拡散を議論する[5]。SQUIDの古典的基本特性は数十年に渡って研究されてきているが[6]、超伝導位相の巨視的な性質により、微視的な不純物や非一様性に対してずっと影響を受けにくいことが特徴である。さらに、SQUID系は初期条件や外部磁場を変えることにより、全エネルギーやモデル・パラメーターを比較的自由に制御でき、容易に異常拡散と通常拡散の双方を調べることができる。

§ 2. モデル

ここではもっとも単純な2自由度SQUID系として、2つのジョセフソン接合をループ状につないだものを考える（図1(a)）。この系は周期ポテンシャル中にあるバネによってつながれた2粒子の運動と同等である（図1(b)）。この2粒子の重心位置の拡散運動を数値計算により解析し、拡散の性質を調べた。バネの自然長はSQUIDを貫く外部磁場に対応するが、ここでは周期ポテンシャルの半周期とした。

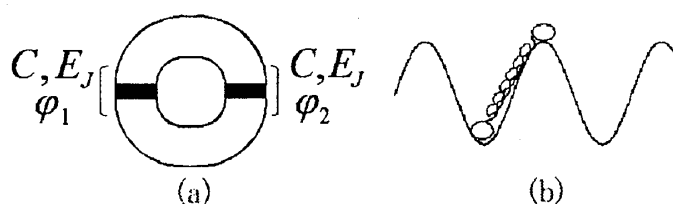
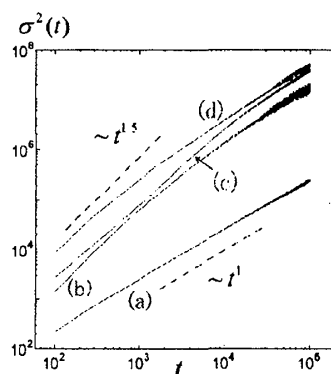


図 1 : (a)SQUID の模式図、(b)等価な周期ポテンシャル中の分子モデル

§ 3. 異常拡散

全エネルギーと初期条件を変化させることにより、2粒子の重心位置はさまざまな運動をする。エネルギーを固定したときに、拡散が起こるか起こらないかは、初期条件の選び方に依存している。ここでは拡散が起こる初期条件を選び、そこでの拡散を解析した。

異常拡散が起こる領域では、2粒子はブラウン運動のような通常拡散の場合と異なり、突然一方向に長時間動き出したり、逆に一つのポテンシャルに長時間とどまったりする。この長時間のジャンプと滞在を含む拡散の性質を定量化するために我々は、拡散が起こるエネルギー領域において2乗平均変位を評価した。特定のエネルギー領域で適当な初期条件を選ぶと2乗平均変位のベキが1を超える異常拡散が生じる(図2)。

図 2 : 2 乗平均変位: (a) $E=0.61$, (b) $E=1.26$, (c) $E=3.01$, (d) $E=6.21$

我々の最初の興味は、2乗平均変位のベキが1を超える原因は何か、である。異常拡散の詳細を理解するために、我々はポアンカレ断面を取った(図3)。異常拡散が起こるエネルギー領域ではポアンカレ断面上に特徴的な構造ができており、そこに軌道が長時間トラップされる。さらに、その構造を拡大してやると、同じような構造が現れ、これを繰り返すと、再び同様の構造が現れ、自己相似性があることが分かる(図3(a)(b)(c))。つまり、異常拡散は位相空間上の長時間のジャンプに関する階層構造に軌道が入ったときに起こる。

また、異常拡散の特性は、粒子のジャンプ時間と滞在時間の分布により特徴づけられる。長時間のジャンプを考慮に入れた理論(レヴィ・ウォーク理論)により2乗平均変位のベキの値は、この2つの分布のベキから導出することができる。実際に、数値計算からジャンプと滞在時間分布を求めると、図4のようになる。レヴィ・ウォーク理論を適用して得た2乗平均変位のベキと数値計算から直接計算した2乗平均変位のベキは矛盾しない。

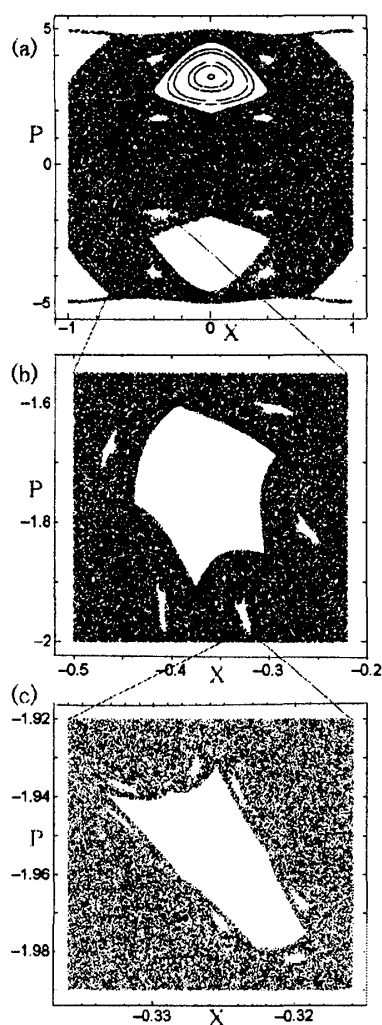


図 3 : (a) $p=0$, $E=6.21$ でのポアンカレ断面、(b)図 3 (a)の一部分の拡大、(c) 図 3 (b)の一部分の拡大

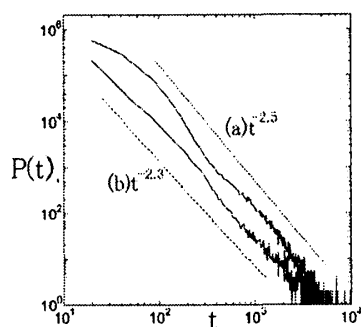


図 4 : (a) $E=1.26$ におけるジャンプ時間分布と、(b)滞在時間分布

§ 4. 通常拡散

次に、通常拡散の領域に注目しよう。この場合にも、決定論に従うカオス系における通常拡散は、必ずしも名前どおり通常というわけではない。以下で、拡散定数に特異なエネ

ルギー依存性があることを示す。通常拡散が起きているエネルギー領域では、エネルギーの関数として拡散定数 $D(E)$ は、特徴的な振動パターンがある (図 5 (a))。さらに、そのエネルギー領域内において、微小エネルギー領域を拡大したときの拡散定数 $D(E)$ を見てみると同じような振動パターンが現れることを大規模数値計算により明らかにした (図 5 (b))。この驚くべきフラクタルのような特徴は決定論的なカオス力学系に特有で、系のエネルギー変化に対する位相空間の構造変化の鋭敏性によると考えている。このフラクタル性は Klages らと原山らによって研究された。前者ではマップ系で、マップの傾きの関数として拡散係数に見られることが確認された。後者はハミルトン写像系で、2次元電子系という実験的な現実性を考慮したものであったが、二次元電子系に特有の摩擦によりフラクタル性はかき消されてしまうと予想される。実際に、彼らの研究で、写像にノイズを入れてやると、拡散係数 $D(E)$ から特異な構造が消えてしまい、滑らかになってしまうことが明らかにされている。

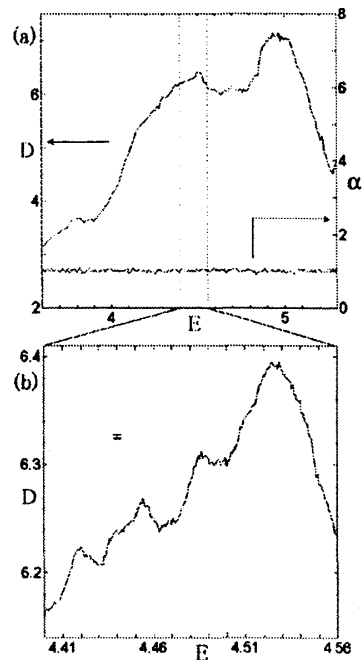


図 5 : 拡散係数のエネルギー依存性 : (a) $3.6 < E < 5.3$ 内での拡散係数、
(b) さらに狭い領域 $4.40 < E < 4.56$ 内での拡散係数。エラー・バーは
拡散係数の統計誤差を表わしている。

§ 5. まとめ

我々は SQUID 系の超伝導位相の拡散を研究した。2種類の拡散 (異常拡散と通常拡散) に注目した。異常拡散では、数値計算から得た 2 乗平均変位のベギが 1 より大きく、ジャンプ時間分布と滞在時間分布から導出したものと一致することがわかった。通常拡散では、全エネルギーの関数として拡散係数 $D(E)$ がフラクタルのようなふるまいをすることが分かった。我々は、将来、SQUID の実験が行われ、ここで予言された決定論的な

拡散の奇妙な振る舞いが実際に起こることを確認されることを強く望んでいる。

[参考文献]

- [1] Levy Flights and Related Topics in Physics, Lecture Notes in Physics Vol.450, edited by M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch (Springer, Berlin, 1995).
- [2] T. Geisel and S. Thomae, Phys. Rev. Lett. 52, 1936 (1984).
- [3] R. Klages and J. R. Dorfman, Phys. Rev. Lett. 74, 387 (1995).
- [4] T. Harayama and P. Gaspard, Phys. Rev. E 64, 036215 (2001).
- [5] K. Tanimoto, T. Kato and K. Nakamura, to be published in Phys. Rev. B (July, 2002).
- [6] A. Barone and G. Paterno, Physics and Application of the Josephson Effect, (Wiley-Interscience, New York, 1982).