

# モノドロミー保存変分方程式

京大数理研 三輪 哲二

神保 道夫

高次元の holonomic quantum fields は local field theory でなく, 広がりを持つ物体 (BAG?) を対象として構成される。それに依りて Euclid 時空での対応する変形理論も, Hodge 型の変分公式の形で自然に拡張することができる。詳細は [1][2] を見て下さい。ここでは基本的な考え方のみを述べる。

1. 次の設定のもとに, Euclidean Dirac 方程式に対する Riemann-Hilbert の問題を考えよう。

$D^+$ :  $\mathbb{R}^s$  の有界領域,  $D^-$ : 外部領域

$\Gamma = \partial D^+$  (\*)

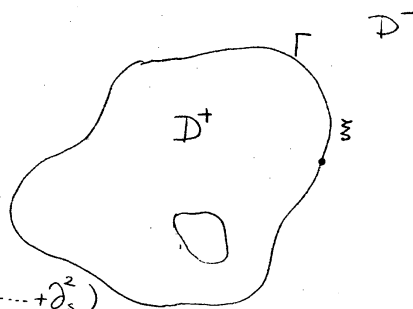
$M(\xi)$ :  $\Gamma$  上のサイズ  $N$  の行列 (\*)

$\not{D} = \gamma^1 \partial_1 + \dots + \gamma^s \partial_s$  ( $\not{D}^2 = \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_s^2$ )

但しガンマ行列は  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$  をみたすサイズ  $r$  の行列とする。

$m$ : 正又は 0 の定数

(\*) 実解析的。



問題  $(\Gamma, M)$ : 次の性質をもつ  $rN \times rN$  行列  $w$  を求む。

$$(1) \quad (i) \quad (-\partial_x + m)w(x, x') = \delta^s(x - x') \quad (x, x' \notin \Gamma)$$

$$(ii) \quad |w(x, x')| = \begin{cases} O(e^{-m|x|}) & (m > 0) \\ O(\frac{1}{|x|^{s-1}}) & (m = 0) \end{cases} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

$$(iii) \quad w(\xi^+, x') = M(\xi)w(\xi^-, x') \quad \xi \in \Gamma$$

$$(\text{但し } w(\xi^\pm, x') = \lim_{D^\pm \ni x \rightarrow \xi} w(x, x'))$$

"モノドロミー行列"  $M(\xi)$  が十分 1 に近ければ, 解である  $w(x, x')$  は存在して一意的である。

特に 2次元, massless ( $m=0$ ) の場合,  $w$  は次の形をとる。

$$(2) \quad w = -\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z-z'} Y(z, z') \\ \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'} Y^*(\bar{z}, \bar{z}') & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^*(\bar{z}, \bar{z}') = Y^*(\bar{z}, \bar{z}'; \Gamma, M) = \overline{Y(z, z'; \Gamma, M)}$$

ここに  $Y(z, z')$  は  $\mathbb{P}^1 - \Gamma$  上正則で

$$(3) \quad Y(z, z) = 1, \quad Y(\xi^+, z') = M(\xi)Y(\xi^-, z') \quad (\xi \in \Gamma)$$

を満たす。

通例 Riemann-Hilbert 問題の高次元化と言うと, 多変数の正則関数で (iii) にあたる条件を課したものを考えるが, 上のように (3) を <sup>実</sup> 2次元における  $\bar{\partial}Y=0$  の解の中で考える立場も, 一つの自然な拡張と言えるだろう。

2. 以下, 上の "Green 関数"  $w(x, x')$  を境界  $\Gamma$  の汎関数と考えたときの変分を問題とする。即ち,  $\Gamma$  をあるベクトル

場  $\sum_{\mu=1}^s \rho^\mu(\xi) \partial_\mu$  に沿って動かして  $\Gamma^p = \{ \xi + \rho(\xi) \mid \xi \in \Gamma \}$  とする。この時モノドロミーは  $\Gamma^p$  上では  $M^p(\xi^p) = M(\xi)$  ( $\xi^p = \xi + \rho(\xi)$ ,  $\xi \in \Gamma$ ) と与える。対応する Green 関数  $w^p(x, x')$  を  $\rho$  の汎関数とみて  $\rho = 0$  での変分を  $\delta w(x, x')$  と書けば,

### 公式

$$(4) \quad \delta w(x, x') = \int_{\Gamma} d\sigma(\xi) \sum_{\mu=1}^s \delta \rho^\mu(\xi) w(x, \xi^+) \cdot (n_\mu \partial - \eta \partial_\mu) M(\xi) \cdot w(\xi^-, x')$$

( $n_1(\xi), \dots, n_s(\xi)$ ) は  $\xi \in \Gamma$  での単位外法線

$$\eta = \sum_{\mu=1}^s \gamma^\mu n_\mu, \quad d\sigma: \text{面要素}$$

上の公式で境界値をとることにより,  $w(x, \xi^+)$ ,  $w(\xi^-, \eta^+)$  等についても同様の公式が得られる。

また, 平行移動及び回転に対する  $w(x, x')$  の共変性と (4) を用いると, 微分積分方程式を得る (類似の事情が P. Lévy [ ] によ, 指摘されている)。今  $w(x, \eta^+)$  と  $w(\xi^-, \eta^+)$  について結果をまとめると

$$(5) \quad \delta' w(x, \eta^+) = \int_{\Gamma_s} d\sigma(\xi) \sum_{\mu=1}^s \delta \rho^\mu(\xi) \cdot w(x, \xi) \cdot (n_\mu \partial - \eta \partial_\mu) M(\xi) \cdot w(\xi^-, \eta^+) \\ + \sum_{\mu=1}^s \delta \rho^\mu(\eta) \partial_\mu^\eta w(x, \eta^+)$$

$$(6) \quad \partial_\mu^x w(x, \eta^+) + \int_{\Gamma} d\sigma(\xi) w(x, \xi^+) \cdot (n_\mu \partial - \eta \partial_\mu) M(\xi) \cdot w(\xi^-, \eta^+) \\ + \partial_\mu^\eta w(x, \eta^+) = 0$$

$$(7) \quad ((x^\mu - \eta^\mu) \partial_\nu^x - (x^\nu - \eta^\nu) \partial_\mu^x) w(x, \eta^+) + \frac{1}{2} [\gamma^{\mu\nu}, w(x, \eta^+)] \\ + \int_{\Gamma} d\sigma(\xi) w(x, \xi^+) \cdot ((n_\nu(\xi^\mu - \eta^\mu) - \eta_\mu(\xi^\nu - \eta^\nu)) \partial - \\ - \eta((\xi^\mu - \eta^\mu) \partial_\nu - (\xi^\nu - \eta^\nu) \partial_\mu)) M(\xi) \cdot w(\xi^-, \eta^+) = 0$$

$$(8) \quad \delta' W(\xi, \eta^+) = \int_{\Gamma} d\sigma(\zeta) \sum_{\mu=1}^s \delta p^\mu(\zeta) W(\xi, \zeta^+) \cdot (\eta_\mu \not{\partial} \not{\partial} \partial_\mu) M(\zeta) \cdot W(\xi, \eta^+) \\ + \sum_{\mu=1}^s \delta p^\mu(\xi) \partial_\mu^\xi W(\xi, \eta^+) + \sum_{\mu=1}^s \delta p^\mu(\eta) \partial_\mu^\eta W(\xi, \eta^+)$$

ここで  $\delta' W(x, \eta^+)$  は,  $W^p(x, \eta^+) - W(x, \eta^+)$  ( $\eta \in \Gamma$ ) の一次の項を表わす (変数  $\eta$  は境界上に固定して変分する)。 $\delta' W(\xi, \eta^+)$  の意味も同様。また, Euclidean Dirac 方程式を用いれば,  $\partial_\mu^\eta W(x, \eta^+)$  等は  $\eta$  の tangential な微分のみを含む形に書き直すことができる。例:  $\partial_\mu^\xi W(\xi, \eta^+) = (\partial_\mu^\xi - \eta_\mu(\xi) \not{\partial}(\xi)) \not{\partial}^\xi + m \cdot \eta_\mu(\xi) \not{\partial}(\xi) \times W(\xi, \eta^+)$ 。

さて, これらはいずれも  $W$  について非線型の方程式系であるが, 今  $W(\xi, \eta^+)$  を未知の係数の如く考えれば, (5)+(6)+(7) は  $W(x, \eta^+)$  に関し線型である。そして非線型の方程式系 (8) が, 係数  $W(\xi, \eta^+)$  を支配している。実は (8) は (5) の完全積分可能性を保証する方程式なのである。(即ち  $\frac{\delta}{\delta p^\mu(\xi)} (\frac{\delta}{\delta p^\nu(\eta)} W) = \frac{\delta}{\delta p^\nu(\eta)} (\frac{\delta}{\delta p^\mu(\xi)} W)$ 。第二変分は煩雑なのでここには書かない。[1] 参照)。この意味で (5)+(6)+(7) は 2次元の (線型) extended holonomic system に, (8) はその "変形の方程式" に, それぞれ対応している [2]。

## 文献

- [1] M. Jimbo and T. Miwa, RIMS preprint 273 (1978).
- [2] ———, RIMS preprint 27 (1978).
- [3] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle,  
Gauthier-Villars, Paris (1951).