

シフト作用素による不変部分空間の構造

山形大 理 河村新蔵

この稿は[5]の続きである。 $\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間、 $\mathcal{H}_n$ をそのコピーとする。 $\mathcal{H} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus \mathcal{H}_n$ とする。 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U が $U\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1}$ の時、 U をシフト作用素という。 S を $\sum \oplus \xi_n \longrightarrow \sum \oplus \eta_n$ ($\eta_n = \xi_{n-1}$) である自然なシフト作用素とする。 $\mathcal{U}$ を S を含むシフト作用素の族とする。我々の目的は $\mathcal{U}$ の不変部分空間 $\mathcal{M}$ の構造を研究する事である。[5]の結果をもう一度ここに述べてみよう。

$W(\mathcal{U}) = \{W \mid W = US^*, U \in \mathcal{U}\}$ とする。

定理 $W(\mathcal{U})$ は群で $S^*W(\mathcal{U})S = W(\mathcal{U})$ とする。 $\mathcal{M}$ を pure で simply な $\mathcal{U}$ -不変部分空間とする。この時

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{M}_n = S^n \mathcal{M}_0$$

となり、simply な不変部分空間 $\mathcal{M}$ については

$$\mathcal{H} = (m_p)_{-\infty} \oplus m_r \oplus m_c$$

と三つの *reducing* な不変部分空間に分割される。ここで

$$(m_p)_{-\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\mathcal{L}^n m_p] \text{ である。}$$

この稿では全て $W(\mathcal{L})$ は (1) 群 で (2) $S^*W(\mathcal{L})S = W(\mathcal{L})$ の条件をみたしているとする。ここで $\mathcal{L}$ に関する主な記号をあげておこう。

$M(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \text{ と } \mathcal{L}^* \text{ から生成される von Neumann 環}$

$A(\mathcal{L}) = 1 \text{ と } \mathcal{L} \text{ から生成される環 (強位相について閉)}$

$D(\mathcal{L}) = W(\mathcal{L}) \text{ から生成される von Neumann 環}$

$W(\mathcal{L})$ の条件 (1), (2) より $M(\mathcal{L})$ は $W(\mathcal{L})$ と $\{S^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ より生成される von Neumann 環に一致している事を注意しておく。

1. $W(\mathcal{L})$ が条件 (1), (2) をみたしているような $\mathcal{L}$ の例をいくつかあげてみよう。

1-1. 例 $\mathcal{L} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}$, $\mathcal{L} = S \otimes A$, ここで A は $\mathbb{C}$ 上のユニタリ作用素全体の部分群である。(以下 A_i あるいは A_i は同様である。) $S = S \otimes 1$ で $W(\mathcal{L}) = 1 \otimes A$ は群で任意の $u \in A$ に対して $S^* \otimes 1 \cdot 1 \otimes u \cdot S \otimes 1 = 1 \otimes u$ だから、 $S^*W(\mathcal{L})S = W(\mathcal{L})$ である。又 $A(\mathcal{L}) = H^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M(A)$, $M(\mathcal{L}) = L^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M(A)$, $M(A)$ は A から生成される von Neumann 環とする。

1-2, 例. $\mathcal{H} = \Sigma \oplus \mathbb{R}_n$, u を $\mathbb{R}$ 上のユニタリ作用素とする。
 $W(\mathcal{H}) = \{W = \Sigma \oplus u_n \mid u_n = u^n u_0 u^{*n} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad u_0 \in A\}$
 $M(\mathcal{H}) = R(M(A), \text{Ad } u) : M(A) \text{ と } *- \text{自己同型写像 } \alpha = \text{Ad } u \text{ によって決まる接合積 (cf. [14, V. 7])}$

1-3, 例. $\mathcal{H} = \Sigma \oplus \mathbb{R}_n$, α を $M(A)$ 上の $*$ -同型写像とする。
 $W(\mathcal{H}) = \{W = \Sigma \oplus u_n \mid u_n = \alpha^{-n}(u_0) \quad n \in \mathbb{Z}, \quad u_0 \in A\}$
 この時 $M(\mathcal{H}) = R(M(A), \alpha)$

1-4, 例. $\mathcal{H} = \Sigma \oplus \mathbb{R}_n$, u を $\mathbb{R}$ 上の isometry とする。
 $W(\mathcal{H}) = \{W = \Sigma \oplus u_n \mid u_n = u u_{n-1} u^* \quad u_n \in A\}$ このとき,
 $M(\mathcal{H})$ は $M(A)$ と $*$ -自己縮小写像 $\text{Ad } u$ より決まる接合積

1-5, 例 $\mathcal{H} = \Sigma \oplus \mathbb{R}_n$, $W(\mathcal{H}) = \{W = \Sigma \oplus u_n \mid u_n = u_{n+k} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}\}$ k は自然数 $D(\mathcal{H})$ は $\underbrace{(1 \otimes A) \oplus (1 \otimes A) \oplus \cdots \oplus (1 \otimes A)}_k$ と同型。

1-6, 例. $\mathcal{H} = \Sigma \oplus \mathbb{R}_n$, $\mathcal{S} = \mathcal{H}$ 上のシフト作用素全体。
 このとき, $A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ 上の三角行列全体。 $M(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})$ 。

2. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の不変部分空間としよう。

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots$$

$\mathcal{M}_n = S^n[W(\mathcal{H})\mathcal{M}_0]$ となるから, もし $\mathcal{M}$ が $W(\mathcal{H})$ -不変ならば, $\mathcal{M}_n = S^n \mathcal{M}_0$ である。そして $\mathcal{H}$ -不変部分空間と $W(\mathcal{H})$ か $\mathcal{H}$ の不変部分空間の違いは $\mathcal{M}_0$ においてのみ起

り、それは本質的な差を生じないので、今後全て $W(\mathcal{S})$ -不変な $\mathcal{S}$ -不変部分空間、即ち $A(\mathcal{S})$ -不変部分空間のみを考える事にする。最初に典型的な不変部分空間を考えてみよう。

$$H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus E_n$$

とすれば、 H^2 は最も基本的な不変部分空間である。又 E_0 の部分空間 m_0 に対して $W(\mathcal{S})m_0 \subset m_0$ (このとき $[W(\mathcal{S})m_0] = m_0$ である) である時

$$m = m_0 \oplus \mathcal{S}m_0 \oplus \mathcal{S}^2m_0 \oplus \dots$$

とすれば m も $\mathcal{S}$ -不変部分空間で $\mathcal{S}^n m_0 \subset E_n$ である。

$[W(\mathcal{S})m_0] = [D(\mathcal{S})m_0] = m_0 \subset E_0$ より E_0 から $[D(\mathcal{S})m_0]$ への射影子 e は $P_0 D(\mathcal{S}) P_0$ と可換である。ここで P_0 は E_0 から E_0 への射影子であって、 $W(\mathcal{S})$ と可換であるから、 $D(\mathcal{S})$ の元で $P_0 D(\mathcal{S}) P_0$ は $D(\mathcal{S})$ の P_0 による reduced von Neumann 環である。この環を $D(\mathcal{S})_0$ と書く。 $i(e) = \sum \oplus \chi_n$ ($\chi_n = e$) とすれば $i(e) \in M(\mathcal{S})$ である。実際、 S とは S と S 可換であって、 $W = \sum \oplus u_n \in W(\mathcal{S})$ に対して $S^{*k} W S^{*k} = \sum \oplus y_n$ ($y_0 = \chi_k$ とする) $\in W(\mathcal{S})$ であるから $\chi_k \in D(\mathcal{S})_0$ となり $e \chi_k = \chi_k e$ となる。即ち $i(e)W = W i(e)$ $m = m_0 \oplus \mathcal{S}m_0 \oplus \mathcal{S}^2m_0 \oplus \dots = eE_0 \oplus eE_1 \oplus eE_2 \oplus \dots$ であるから $m = i(e)H^2$ である。

2-1 定義. $D(\mathcal{S})_0$ の射影子 e に対して $\mathcal{S}$ -不変部分空間 $m = i(e)H^2$ を H^2 -型 不変部分空間と呼ぶ。

ここで我々は Beurling [1] の定理を思い出してみよう。
 $L^2(\mathbb{T})$ 上のシフト作用素 S の不変部分空間 m は uH^2
 (u は $u(z) = 1$ a.e. $z \in \mathbb{T}$) と表現される。この時 $L^2(\mathbb{T}) = \sum \oplus [e_n]$ ($e_n(z) = z^n$) に対して $u([z^n]) = m_n$ である。

2-2 定義 $\mathcal{S}$ が次の条件をみたしている時、 $\mathcal{S}$ は property (B) を持つという。任意の pure で simply な $\mathcal{S}$ -不変部分空間 m に対して $M(\mathcal{S})$ の partial isometry u が存在して $m = uH^2$ となり、しかも $m_n = u\mathcal{E}_n$ である。

上の定義の中の不変部分空間 $m = uH^2$ について考えてみよう。 $P = u^*u$ とすれば P は $M(\mathcal{S})$ の射影子で $u^*m_0 = u^*u\mathcal{E}_0 = P\mathcal{E}_0$ で $P\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_0$ である。実際、 $x_0 \in \mathcal{E}_0$, $x_n \in \mathcal{E}_n$ ($n \neq 0$) に対して $\langle u^*u x_0, x_n \rangle = \langle u x_0, u x_n \rangle = 0$ 。従って $B(\mathcal{E}_0)$ の射影子 e が対応して $P\mathcal{E}_0 = e\mathcal{E}_0$ となる。 $P \in W(\mathcal{S}) \subset D(\mathcal{S})$ より $e = P\mathcal{E}_0 \in D(\mathcal{S})_0$ である。

又 $PS = SP$ より $P = i(e)$ である。結局、 $\mathcal{N} = U^*M$
 $= U^*UH^2 = PH^2 = i(e)H^2$ となり、 $\mathcal{N}$ は H^2 -型の不変部分
 空間である。又 U によって $P_{m_0} \sim P_{n_0}$ (equivalent)
 である。更に、 $P_{m_0} \in D(\mathcal{S})'$ であって $V = UP_0$ とすれば、
 $V \in D(\mathcal{S})'$ で $VV^* = P_{m_0}$, $V^*V = i(e)P_0$ 。即ち P_{m_0} と $i(e)P_0 \leq P_0$
 は $D(\mathcal{S})'$ で equivalent である。又 $m_0 \in eR_0$ は wandering
 な部分空間である。即ち $\{S^n m_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ($\{S^n eR_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$) は互い
 に直交する。

2-3 定義 $B(\mathcal{S})$ の射影子 P が $D(\mathcal{S})'$ の元で、任意の n
 に対して $S^n P S^{*n} = 0$ ($n \neq 0$) となる時 P は $\mathcal{S}$ に関す
 る wandering 射影子という。

2-4 定理 $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つための必要十分条件は、
 $\mathcal{S}$ が次の性質 Property (W) を持つことである。

Property (W) 任意の $\mathcal{S}$ の wandering な射影子は P_0 の部
 分射影子と $D(\mathcal{S})'$ で equivalent である。

証明 条件が $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つための必要条件である
 事は上で示したので十分条件であることを示そう。

$\mathcal{M}$ を pure で simply な $\mathcal{S}$ -不変部分空間としよう。
 $m_0 = m \ominus [\mathcal{S}m]$ は $\mathcal{S}$ の wandering な部分空間であるから

P_0 の部分射影子 q が存在して $D(\mathcal{S})$ で $P_{m_0} \sim q$ となる。即ち $D(\mathcal{S})$ の partial isometry V で $V^*V = q$ $VV^* = P_{m_0}$ となる。
 $\tilde{V} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S^n V S^{*n}$ とすれば $\tilde{V}$ は $M(\mathcal{S})$ の partial isometry である。又定義より $\tilde{V} i(1) R_n = m_n$ となる。
 即ち $\tilde{V} H^2 = m$ である。(証終)

どの様な $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つかという事を調べる前に Property (B) を持つのはどの様な $\mathcal{S}$ かという事を調べてみよう。

2-5 定理 $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つとする。この時、 $\mathcal{R}$ 上にユニタリ作用素 u が存在し $\alpha = \text{Ad } u$ は $D(\mathcal{S})_0$ 上の *-自己同型写像となり $M(\mathcal{S})$ は $D(\mathcal{S})_0$ 。と $\alpha = \text{Ad } u$ によって決まる接合積である。(注 $\text{Ad } u(x) = u x u^*$ $x \in D(\mathcal{S})_0$ 。)

証明. $\mathcal{M} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_3 \oplus \dots$ とする。 $\mathcal{M}$ は明らかに pure で simply な $\mathcal{S}$ -不変部分空間である。従って $D(\mathcal{S})$ で $P_i = P_{m_0} \prec P_0$ である。又 $\mathcal{M} = \mathcal{R}_{-1} \oplus \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \dots$ とすれば $D(\mathcal{S})$ で $P_{-1} = P_{m_0} \prec P_0$ で $P_0 = S P_{-1} S^* \prec S P_0 S^* = P_1$ となる。従って $P_0 \sim P_1$ である。(114. Prop. 1.31)。即ち $D(\mathcal{S})$ の partial isometry U が存在して $U^*U = P_0$ $UU^* = P_1$ となる。 $u = U^*S$ とすれば、 u は

E_0 上の π = タリ作用素と考えられる。又 $U = S U^* P_0$
 $= S i(U^*) P_0$ である。 $\alpha = \sum \oplus \alpha_n \in D(\mathcal{S})$ に対して
 $U\alpha = \alpha U$ であるから $S i(U^*) P_0 (\sum \oplus \alpha_n) P_0 i(U) S^*$
 $= (\sum \oplus \alpha_n) P_1$ 。従って $U^* \alpha_0 U = \alpha_1$ である。 $S^n U S^{*n}$
 も又 $D(\mathcal{S})'$ の元であるから $U^* \alpha_n U^* = \alpha_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) であ
 る。 $SW(\mathcal{S}) S^* \subset W(\mathcal{S})$ より $U D(\mathcal{S})_0 U^* \subset D(\mathcal{S})_0$, $SW(\mathcal{S}) S^*$
 $\supset W(\mathcal{S})$ より $U D(\mathcal{S})_0 U^* \supset D(\mathcal{S})_0$ であるから $\alpha = \text{Ad } U$ は
 $D(\mathcal{S})_0$ 上の $*$ -同型写像である。従って $\alpha_n = \alpha^{-n}(\alpha_0)$
 $(\alpha_0 \in D(\mathcal{S})_0)$ となる。(証終)

$M(\mathcal{S})$ が接合積の形になっ ても一般的には Property (B)
 を持たない事は、 $D(\mathcal{S})_0$ が standard に表現されている時、
 McAsey, Muhley と Saito [9] [10] によっ て示されているので
 どのような $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つか調べてみよう。

2-6 命題. $\mathcal{S}$ が Property (B) をもつとする。この時 $\alpha = \text{Ad } U$
 は $D(\mathcal{S})_0$ の有限な中心射影子に対して不変である。

証明. $\alpha(z) \neq z$ とする有限な中心射影子が存在するとし
 よう。 $y = z - z\alpha(z)$ とする。 y は $D(\mathcal{S})_0$ の中心元で
 $\alpha(y)y = 0$ である。実際 $\alpha(y)y = (\alpha(z) - \alpha(z)\alpha^2(z))(z -$
 $z\alpha(z)) = \alpha(z)z - z\alpha(z)\alpha^2(z) - z\alpha(z)^4 + z\alpha(z)^2\alpha^2(z) = z\alpha(z)$

$$- \sum \alpha(z) \alpha^2(z) - \sum \alpha(z) + \sum \alpha(z) \alpha^2(z) = 0$$

$$m = \gamma R_0 \oplus (\gamma + \alpha(\gamma)) R_1 \oplus (\gamma + \alpha(\gamma)) R_2 \oplus \dots$$

とする。 m は pure で simply な $\mathcal{S}$ -不変部分空間で

$$m_0 = m \ominus \mathcal{S}m = \gamma R_0 \oplus \alpha(\gamma) R_1 \quad \text{である。} \quad \text{Property (W) より}$$

$$P_{m_0} = i(\gamma)P_0 + i(\alpha(\gamma))P_1 \sim r \leq P_0.$$

である。従って P_{m_0} と r の $D(\mathcal{S})$ での central support

$c(P_{m_0}), c(r)$ は同じである。ここで γ に対して $\pi(\gamma)$

$= \sum \oplus \gamma_n \quad (\gamma_n = \alpha^n(\gamma))$ とすれば $\pi(\gamma)$ は $D(\mathcal{S})$ の中心元で

あって $P_{m_0} = i(\gamma)P_0 + i(\alpha(\gamma))P_1 < \pi(\gamma)$ であるから、

$c(r) < \pi(\gamma)$ となる。即ち $r \leq rP_0 \leq \pi(\gamma)P_0 = i(\gamma)P_0$ 。

又 $r = r_1 \oplus r_2$ で $D(\mathcal{S})$ の中で $r_1 \sim i(\gamma)P_0, r_2 \sim i(\alpha(\gamma))P_1$

$\sim i(\gamma)P_0$ であるから $D(\mathcal{S})_0$ の中で $\sum \geq \gamma \geq r = r_1 \oplus r_2$

$r_1 \sim \gamma, r_2 \sim \gamma$ となる。 γ は有限射影子であるからこれは矛盾する。(証終)

$\mathcal{S}$ が Property (B) をもつための十分条件を考えてみよう。

$D(\mathcal{S})_0$ と $\alpha = \text{Ad } u$ によって決まる接合積を $R(D(\mathcal{S})_0, \alpha)$

と書く事にする。

2-7 命題 $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, \alpha)$ とする。 $M(\mathcal{S})'$ の有限であるとする。 $\alpha = \text{Ad } u$ が $D(\mathcal{S})_0$ の中心元を不変にすれば

$\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明. $R(D(\mathcal{S})_0, \text{Ad } u)' \cong R(D(\mathcal{S})_0, \text{Ad } u)$ ([14, P373])
 であるから $M(\mathcal{S})'$ が有限であれば $D(\mathcal{S})'_0$ は必然的に有限 von
 Neumann環である ([11, 7.11.8])

P を $\mathcal{S}$ の wandering な射影子とする。 $D(\mathcal{S})'$ の射影子
 P と P_0 に対して比較定理 [14, V Th. 18] より $D(\mathcal{S})'$ の
 中心射影子 z が存在して

$$zP_0 \prec zP \quad \text{かつ} \quad (1-z)P_0 \succ (1-z)P$$

となる。 $zP_0 \sim zP$ である事を示してみよう。 z は
 $D(\mathcal{S})$ の中心元であるから $z = z \oplus z_n$ ($z_n = \alpha^n(z_0)$, z_0
 は $D(\mathcal{S})_0$ の中心元) となっており α は z_0 を不変にするか
 ら、 $z = i(e)$ ($e = z_0$ は $D(\mathcal{S})_0$ の射影子しかも中心元) と
 なっている。 従って $z \in M(\mathcal{S})'$ でもある。

$$\widetilde{zP_0} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S^n zP_0 S^{*n} = i(e) = z$$

$$\widetilde{zP} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S^n zP S^{*n} \leq i(e) = z$$

である。 zP_0 と zP は $D(\mathcal{S})'$ の元である事より $\widetilde{zP_0}$, $\widetilde{zP}$
 は $M(\mathcal{S})'$ の射影子となる。 $zP_0 \prec zP$ より $D(\mathcal{S})'$ の
 partial isometry V が存在して $V^*V = zP_0$, $VV^* \sim Q \leq zP$
 となる。 $\widetilde{V} = \sum S^n V S^{*n}$ とすれば $\widetilde{V}$ は $M(\mathcal{S})'$ の partial
 isometry で $\widetilde{V}^* \widetilde{V} = \widetilde{zP_0} = z (= i(e))$, $\widetilde{V} \widetilde{V}^* = \widetilde{Q} = \sum S^n Q S^{*n}$
 $\leq \widetilde{zP} < z (= i(e))$ 。 即ち $z \sim \widetilde{Q} < z$ となり z は

有限射影子であるから $Z = \bar{Q}$ であり、この事から $Q = ZP$
 即ち $ZP_0 \sim Q = ZP$ となる。従って $P \prec P_0$ となって
 Property (W) を持つ事になり 2-4 より $\mathcal{S}$ は Property (B) をも
 つ。(証明終)

$D(\mathcal{S})_0$ が真無限 (properly infinite) な時について考えてみよう。

2-8 命題 $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, Adu)$ とする。 $D(\mathcal{S})_0$ が真無限
 なる von Neumann 環ならば $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明. U に対して $U_n = U^n$ とし $W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus U_n \cdot$ とすれば
 W は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素で、この W によって
 $W^* D(\mathcal{S}) W = \{ W = \sum \oplus U_n \mid U_n = U_0 \}$ 。従って $W^* D(\mathcal{S}) W$ は
 $L^2(\Pi) \otimes \mathcal{K}$ 上のテンソル積 $1 \otimes D(\mathcal{S})_0$ と spatially に同型
 である。次に、 $D(\mathcal{S})'$ は $B(L^2(\Pi)) \otimes D(\mathcal{S})'_0$ と spatially に
 同型である。この対応によって $D(\mathcal{S})'$ の I と P_0 は I
 と $\mathcal{K}_0 \otimes 1$ に移る。ここで $\mathcal{K}_0$ は $L^2(\Pi)$ 上の 1 次元ベクトル
 空間 $[e_0]$ ($e_0(z) = 1, z \in \Pi$) への射影子である。 $D(\mathcal{S})'_0$ が
 真無限であるから、 $\mathcal{K}_0 \otimes 1$ も真無限である。明らかに
 $\mathcal{K}_0 \otimes 1$ の central support は I であるから $\mathcal{K}_0 \otimes 1 \sim I$
 [14, Prop 1.39] となる。結局 $P_0 \sim I$ であるから任意の
 wandering projection P に対して $P \prec P_0$ となる。(証明終)

2-9.系. $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, \text{Ad} u)$, $\text{Ad} u$ が $D(\mathcal{S})_0$ の有限な中心射影子を不変にすれば $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明 von Neumann 環 $D(\mathcal{S})_0$ に対し $\mathcal{Z} \subset D(\mathcal{S})_0$ の中心有限射影子 $\mathcal{Z}_1$ と中心真無限中心射影子 $\mathcal{Z}_2$ が存在して

$$I = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 \quad \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 = 0$$

とある ([14, Chap V, Th 1.19])。

ここで $\mathcal{Z}$ を $D(\mathcal{S})_0$ の元とする。 $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} R_n$ とする。

$\mathcal{Z}$ は $W(\mathcal{S})$ の元と可換であるから $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}} = \{U\tilde{u}(\mathcal{Z}) \mid U \in \mathcal{S}\}$ とすれば $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}}$ のシフト作用素の族で $M(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}}) = M(\mathcal{S})\tilde{u}(\mathcal{Z})$, $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}}) = D(\mathcal{S})\tilde{u}(\mathcal{Z})$, $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}})_0 = D(\mathcal{S})_0 \mathcal{Z}$ とある。 $\mathcal{Z}_1$ と $\mathcal{Z}_2$ は $\text{Ad} u$ によって不変であるから $M(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1}) = R(D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1}), \text{Ad} u_{\mathcal{Z}_1})$ と考えられる。 $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_2}$ については $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_2})_0 = D(\mathcal{S})_0 \mathcal{Z}_2$ が真無限であるから Property (B) をもつ。 $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1})_0 = D(\mathcal{S})_0 \mathcal{Z}_1$ は有限 von Neumann 環であるから Tr を自然な $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1})_0$ 上のトレースとする。 $\text{Ad} u_{\mathcal{Z}_1}$ は中心元を不変にするから $\text{Ad} u_{\mathcal{Z}_1}$ は Tr に対して不変である。従って ([11] の 7.11.8 より) 接合積 $R(D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1})_0, \text{Ad} u_{\mathcal{Z}_1})$ は有限である。これは $M(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1}) = R(D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1})_0, \text{Ad} u_{\mathcal{Z}_1})'$ と spatially に同型であるから命題 2-7 の条件をみたしている。従って $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1}$ は Property (B) を持つ。 P を $\mathcal{S}$ の wandering な射影子とする。 $P\tilde{u}(\mathcal{Z}_1)$, $P\tilde{u}(\mathcal{Z}_2)$ は wandering な射影子である。従って $D(\mathcal{S}_{\mathcal{Z}_1})$ の中

で $P_i(z_1) \prec P_{0,i}(z_1)$, $D(\mathcal{S}_2)'$ の中 で $P_i(z_2) \prec P_{0,i}(z_2)$ とする。 $i(z_i)$ ($i=1, 2$) は $D(\mathcal{S})'$ の中心射影子であるから

$$P = P_i(z_1) + P_i(z_2) \prec P_{0,i}(z_1) + P_{0,i}(z_2) = P_0$$

となる。(証終)

2-5 より 2-9 までの定理、命題、系によつて我々は Property (B) の特徴付けを得る事ができる。

2-10. 定理 $\mathcal{S}$ が Property (B) をみたす為の必要十分条件は $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, \text{Ad} u)$ となり $\text{Ad} u$ は $D(\mathcal{S})_0$ 上の有限中心元を不変にする事である。

$u=1$ の時は $M(\mathcal{S}) = L^2(\mathbb{T}) \otimes D(\mathcal{S})_0$ となるから次の事を得る。

2-11. 系 $\mathcal{S} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{R}$, $\mathcal{S} = S \otimes A$, ここで A は $\mathcal{R}$ 上のユニタリ作用素全体の部分群とする。このとき $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

参考文献

[1] A. Benliling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81 (1949), 239-255.

[2] J. Dixmier, *Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[3] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, *J. Reine Angew. Math.*, 208 (1961), 102-112.

[4] H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, London, New York, 1964.

[5] 河村新蔵, *Invariant Subspaces of Shift Operators of Arbitrary Multiplicity*, 数解研講究録「作素環論とその応用」, 1980.

[6] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows, *J. Math. Soc. Japan*, 29 (1977), 73-90.

[7] P. Lax, Translation invariant spaces, *Acta Math.*, 101 (1959), 163-178.

[8] R. I. Loeb and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebras, *J. Funct. Anal.*, 29 (1978), 214-252.

[9] M. McAsey, P. S. Muhly and K. S. Saito, Non-self-adjoint crossed products (Invariant Subspaces and Maximality), *Trans. A. M. S.*, 248 (1979), 381-409.

[10] ———, Non-self-adjoint crossed product II,

to appear in J. Math. Soc. Japan.

- [11] G.K. Pedersen, C^* -algebras and their automorphism groups, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1979.
- [12] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [13] S. Stratila and L. Zsidó, Lectures on von Neumann algebras, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1979.
- [14] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.