

AHP における一対比較値行列の調整について

愛知学院大学経営学部 田中浩光 (Hiromitsu Tanaka)

Faculty of Management

Aichi-Gakuin University

1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) 方式では、サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)が一対比較値行列の信頼性を点検する代表的な基準であることは周知である(Saaty(1980)、仁科・柴山(1992)、小澤(2004)など)。しかし、C.I.値は一対比較値行列全体に対してはサーティの意味での整合性を点検する指標となるが、行列内における個々の要素の修正について示唆を与えるものでない。C.I.基準で不整合となる場合、通常、再度の評点化の実施、あるいは一対比較値の修正を試行するときは相対残差に依ることになる。相対残差の適用では多数の要素が不整合となる場合があり、実践的対処が難しくなる。評点付けを通して得られる一対比較値行列が重視されるべきとする立場に沿えば、可能な限り一対比較値行列を活かして信頼性の確保を期待できる調整が求められる。田中(2009)は一対比較値の信頼性が評点化に及ぼす諸要因の影響を強く受けることに着目して、サーティの意味での完全整合を活用する、一対比較値行列(項目数 3)の調整方式を提示している。とくに、評点が 9 となる場合に一対比較値行列の調整では、C.I.の意味で改良を見るが探索範囲の設定には問題が残る。

本稿では、一対比較の対象項目数 n を 3 に限定する。C.I.の点検の結果が望ましくないときの一対比較値の調整方式を提示する。すなわち、田中(2009)の提示する一対比較値行列の調整方式の改良について考察・吟味する。改良の視点は、評点化過程に照らす探索範囲の設定にある。望ましい評点の組を選定する探索範囲の設定では、評点上の整合性の縛りを探索範囲に加える一方で、一対比較値行列の近傍を広げる工夫を行う。評点上の整合性条件には、田中(2007)の緩和な整合性基準を採用する。

2. 一対比較での評点化過程と重要度の導入

比較対象の n 項目に対する一対比較では、下記の手順(1)、(2)を通して、一対比較値行列 A を得る。

$$A = \{a_{ij}\}$$

ここに、 $i, j = 1, \dots, n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{a_{ji}}, a_{ii} = 1 \quad (1)$$

$$\max\{a_{ij}, a_{ji}\} \in \{1, \dots, 9\} \quad (2)$$

評点 a_{ij} は、AHP 方式の縛りである逆数対称化(1)、離散化(2)を受ける。これらの AHP 方式に付随する制約以外にも、評点 a_{ij} には、評点化に際しての評価者による過大・過小見積もり、一対比較の試行に起因するバラツキなど様々な攪乱要因を含む(田中(2007),(2009))。

以下、一対比較値行列の生成について考える。誤差モデル(5)は重要度(以降、重み) W を変量ではなく母数として扱うことに留意する。重み $W = \{w_i\}$ は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施

に対し不変とする。誤差モデル(5)は対の重み (w_i, w_j) に対して比尺度性に基づいている。

$$a_{ij} = T(f_0(W, E^0)) \quad (3)$$

$$= T(f_0(E^0 | W))$$

$$\doteq T(f_1(\varepsilon_{ij} | w_i, w_j))$$

$$\doteq (w_i / w_j) \cdot \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$a_{ij} = (w_i / w_j) \cdot \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

ここに、 $E^0 = \{\varepsilon_{ij}\}$ は評定に伴う(測定)誤差であり、 $E = \{\varepsilon_{ij}\}$ は AHP 方式に付随する制約(離散化など)の調整を含む誤差を表す。T は離散化関数であり、 f_0, f_1 は、それぞれ未知関数である。

重みの推定には、幾何平均法、最小二乗法、最小 χ^2 法など多くの推定法が提案されている (Saaty and Vargas(1984), Sekitani and Yamaki(1999), 仁科・柴山(1992)など)。本稿では、均衡解として解釈されている Saaty の固有値法を、誤差モデルでの 1 つの推定法として位置付けて採用する。

[固有値法]

$$AU_{\max} = \lambda_{\max} \cdot U_{\max} \quad (6)$$

ここに、 $\lambda_{\max}$: A の最大固有値、 $U_{\max}$: $\lambda_{\max}$ に対応する主固有ベクトル、 $U_{\max} = \{u_i\}$ 。

u_i を第 i 項目の重みとする。固有値法で求められた u_i を重み w_i の推定値と考えることができる。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)が用いられる。

$$C.I. = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1) \quad (7)$$

$$= \sum (e_{ij} - 1) / n C_2 \quad (8)$$

ここに、 e_{ij} は相対残差と呼ばれ、 ε_{ij} の推定値と見做すことができる。

$$e_{ij} = a_{ij} / (u_i / u_j) \quad (9)$$

以下、 $n=3$ の場合をとりあげて、サーティが経験則として提唱する整合性基準において、C.I.値と評点の関係を整理する。ここに、 $Z = a_{12} a_{23} / a_{13}$ 。

$$C.I. = (Z^{1/3} + Z^{-1/3} - 2) / 2$$

$Z \geq 1$ のとき、C.I.はZについて単調増加である。 $Z < 1$ のとき、Zについて単調減少である。

また、 $Z \geq 1$ のとき、 $C.I. \leq 0.1$ は $Z \leq 3.78$ と同値であり、 $C.I. \leq 0.15$ は $Z \leq 5.07$ と同値である。

$Z < 1$ のとき、 $C.I. \leq 0.1$ は $Z \leq (3.78)^{-1}$ と同値であり、 $C.I. \leq 0.15$ は $Z \leq (5.07)^{-1}$ と同値である。

3. 評点上の整合性

本稿では、各要素である評点が 2 以上とする非巡回有向グラフである最も単純な一対比較値行列をとりあげる。その理由は、比較項目数が及ぼす影響を受けないで、誤差モデル自体が保有する柔軟性を調べることができることによる。評点の符号に関して推移則の成立 ($a_{12} \geq 2 \rightarrow a_{23} \geq 2, a_{13} \geq 2$) を前提とする。すなわち、評価者の測定での過大・過小となる偏りを含むバラツキなどを調整する役割に重み $\{w_i\}$ と誤差 $\{\varepsilon_{ij}\}$ で記述できる立場をとる。

一対比較値の評点上での整合性基準として、下記の2点を取り上げる。

(1)サーティの整合性の代替として、田中(2007)が提示する緩和な制約条件の成立。

$$\max(a_{12}, a_{23}) \rightarrow \max(a_{12}, a_{23}) \leq a_{13}$$

(2)一対比較値行列において対の行間における優位性の成立。

$$a_{12} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{23} \quad , \quad a_{23} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{12}$$

上記の整合性の2基準に基づき、一対比較値の評点上の振舞いについて調べる。併せて、サーティの整合性基準C.I.が0.1以下か否かの出現頻度の結果を与える(表1、表2)。一対比較値行列の出現数の合計は512通りである

表1. 緩和な制約条件の成立 ($\max(a_{12}, a_{23}) \leq a_{13}$)

$\max(a_{12}, a_{23})$ に対し	度数	C.I. ≤ 0.1	C.I. > 0.1
$\max(a_{12}, a_{23}) \leq a_{13}$	194	140	54
その他	318	45	273
計	512	185	327

表2. 一対比較値行列において対の行間における優位性の成立 ($a_{12} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{23}$)

$a_{12} \geq 2$ のとき	度数	C.I. ≤ 0.1	C.I. > 0.1
$a_{13} \geq a_{23}$	288	167	121
その他	224	18	206
計	512	185	327

4. 一対比較値の調整方式(田中(2009))の補整

本節では、田中(2009)が提示する一対比較値の調整方式の改良について考察する。今回の改良を意図する調整方式は、田中(2009)の提示方式において一対比較値行列の調整対象の探索方式を見直すことにある。探索方式には探索範囲の設定と探索対象を選定する手順の2段階で分けられる。以降では、田中(2009)の調整方式の説明と問題点について言及した後に、新たに提示する一対比較値の調整方式について説明を加える。

最初に、田中(2009)の調整方式の基本的な着想を再掲する。点検方法の評価基準として、一対比較値の生成に誤差モデルを導入することで、母数である(真の)重み $\{w_i\}$ の推定性能に注目する。偏差平方和の最小化基準の方が、誤差モデルを前提にする限りにおいては合理的と考えられる。しかし、(真の)重みは未知であるため、評点上での基準量を作ることできない。本稿では、サーティの整合性指標C.I.がゼロ(完全整合)となるときの一対比較値行列を固有値解法で推定する重みに着目する。この着想は、一対比較値行列が比尺度性の成立の下で得られとする理想状況では、(真の)重みが完全整合での重み(集合)に在るとする考えに基づく。また、提示方式の要点の1つに、評点cが他のa,bに比較して評点付けにおいて安定するとの想定に注意が要る。

次いで、田中（2009）の調整方式の人工的な数値検証の結果について3点を記す。

- ① $c=9$ の場合、サーティの整合性条件 ($C.I. < 0.1$) を満足する探索範囲がない。
- ② 探索範囲の設定は恣意的になる。評点化過程との対応からの制約がない。
- ③ 提示方式との性能比較で、対照とする相対残差に評価基準の偏差平方和で劣る場合がある。

上記の問題点①と②の対策を下記に示し、新たに提示する調整方式に組み入れる。

- ① 探索範囲を広げるため、評点付けで信頼度が低いと考えられる評点 a_{23} の変化幅を大きくする。
評点 a_{12} の変化幅は小さくする。
- ② 評点上の整合性基準を探索範囲の設定条件に付加する。3節の「緩和な整合性基準」と「対の行間の優位性」を探索条件とする。

探索範囲の基本的な設定は次のとおりである。

- (1) サーティの整合性条件 $C.I. < 0.1$
- (2) 「緩和な整合性基準」と「対の行間における優位性」
 $c \geq \max(a, b)$ と $(a_{12} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{23}, a_{23} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{12})$
- (3) 最初に a_{13} を固定する。次に、 a_{12} の値域: $(a_{12} - 1, a_{12} - 2, a_{12}, a_{12} + 1)$ 、 a_{23} の値域: $(a_{23} - 5, a_{23} - 4, a_{23} - 3, a_{23} - 2, a_{23} - 1, a_{23}, a_{23} + 1)$

手順での基本的な設定

- ① 探索範囲を設定する。 $C.I. < 0.1$ 制約条件に対して、評点上の整合性条件である「緩和な整合性基準」($c \geq \max(a, b)$) と「対の行間における優位性」($a_{12} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{23}, a_{23} \geq 2 \rightarrow a_{13} \geq a_{12}$) の成立を制約条件に追加する。
- ② 探索範囲①のもとで、評点 a_{13} を最初に固定する。次いで評点 a_{12} 、 a_{23} の順で変化させる。
- ③ a_{13} を c とする。完全整合となる（固有値解法による）重みと評点の乖離を表す代用偏差平方和が最小となる一対比較値行列を選ぶ。

5. 補整の手順

$C.I.$ が 0.1 以上となる一対比較値行列 A をとりあげて各要素の修正を考える。ここに、3項目の一対比較値行列を非巡回有向グラフで考え、始点、終点を①、③とする。③は合流点、②は非合流点である。 a, b, c はそれぞれ①→②、②→③、①→③に対応する評点である。一対比較値行列を Δ_{abc} とする。作業手順では、 Δ_{abc} として扱う。

- (1) c の値として a_{13} を最初に固定する。
- (2) a の値として a_{12} で固定する。次いで、 $(a_{12} - 1, a_{12} - 2, a_{12} + 1)$ の順に変化させる)
- (3) b の値として a_{23} で固定する。次いで、 $(a_{23} - 1, a_{23} - 2, a_{23} - 3, a_{23} - 4, a_{23} - 5, a_{23} + 1, a_{23} + 2)$ の順に変化させる)
- (4) Δ_{abc} において、重みの推定と整合性指標 $C.I.$ を計算する。一番近いと考えられる完全整合である一対比較値行列の重みからの代用偏差平方和を求める。

(5)順次、(3)、(2)を繰り返して、(4)を実行する。

(6)最も小さい代用偏差平方和をとる Δ_{abc} は一対比較値行列Aの調整とする。

以下、完全整合の活用を図る調整方式での探索範囲となる組(a,b,c)の状況を具体的に把握するために、本節では、 $c=9,4$ の場合に着目する。表2、表3の濃い灰色部分が $C.I.\leq 0.1$ と評点上の整合性制約を満足する評点の組である。薄い灰色部分は田中(2009)の調整方式では探索範囲として認められていた評点の組である。*印が(真の)重みの代用となる完全整合のときの推定される重みである。

表3. 完全整合(C.I.=0)の活用: $c=9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									*
2									
3			*						
4									
5									
6									
7									
8									
9	*								

表4. 完全整合(C.I.=0)の活用: $c=4$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				*					
2		*							
3									
4	*								
5									
6									
7									
8									
9									

6. 数値例

本節では、5節の補整の手順にしたがい一対比較値行列を調整する。本稿での提示方式の対照は、田中(2009)と同様に相対残差基準による調整である。4種類の数値例をとりあげて、サーティの意味で完全整合となる一対比較値行列の活用を図る、提示方式の有効性を吟味する。

- ① 例1: 値域の有界に影響を受ける場合 (真の重みを想定)
- ② 例2: 対の重みが極小の場合 (真の重みを想定)
- ③ 例3: $ab/c < 3.78^{-1}$ となる場合 (評点のみを想定)
- ④ 例4: $c < \max(a,b)$ の場合 (評点のみを想定)

例1 値域の有界性: $\{w_i\} = [0.865, 0.120, 0.015]$

評点化された一対比較値行列を Δ_{789} とする。このとき、 $C.I.=0.1910$ 。 $a_{13}=9$ に注目する。ここに、サーティの完全整合性($C.I.=0$)が成立する3個の一対比較行列、 Δ_{199} 、 Δ_{339} 、 Δ_{919} に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、 Δ_{199} 、 Δ_{919} が「対の行間の優位性」を満たさず、下記ようになる。

Δ_{339} の場合 → Δ_{539} に調整される。代用偏差平方和=0.0064、 $C.I.=0.0145$

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0064 をとる Δ_{539} を採用することになる(偏差平方和=0.0197、 $u = (0.7514, 0.1782, 0.0704)$)。因みに、相対残差の場合は Δ_{749} に調整される。このとき、偏差平方和=0.0099、 $C.I.=0.0724$ 。また、田中(2009)の調整方式では、 Δ_{559} に調整

される。このとき、偏差平方和=0.02612、代用偏差平方和=0.0028、C.I.=0.0585。

例2 対の重みが極小の場合： $\{w_i\} = [0.950, 0.045, 0.005]$

評点化された一対比較値行列を Δ_{999} とする。このとき、C.I.=0.2800。 $a_{13} = 9$ に注目する。例1と同様に、 Δ_{199} 、 Δ_{339} 、 Δ_{919} に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、 Δ_{199} 、 Δ_{919} が「対の行間の優位性」を満たさず、下記ようになる。

Δ_{339} の場合 → Δ_{749} に調整される。代用偏差平方和=0.0099、C.I.=0.0724

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0099 をとる Δ_{749} を採用することになる(偏差平方和=0.552、 $u = (0.7846, 0.1505, 0.0649)$)。因みに、相対残差の場合は Δ_{949} に調整される。このとき、偏差平方和=0.0313、C.I.=0.1087)。また、田中(2009)の調整方式では、 Δ_{999} に調整される。このとき、偏差平方和=0.0278、代用偏差平方和=0.0305、C.I.=0.0678。

例3 $ab/c < 3.78^{-1}$ の例

評点化された一対比較値行列を Δ_{219} とする。このとき、C.I.=0.1283。 $a_{13} = 9$ に注目する。例1と同様に、 Δ_{119} 、 Δ_{339} 、 Δ_{919} に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、 Δ_{199} 、 Δ_{919} が「対の行間の優位性」を満たさず、下記ようになる。

Δ_{339} の場合 → Δ_{339} に調整される。代用偏差平方和=0.0、C.I.=0.0

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0 をとる Δ_{339} を採用することになる($u = (0.6923, 0.2308, 0.0769)$)。因みに、相対残差の場合は Δ_{229} に調整される。このとき、代用偏差平方和=0.0、C.I.=0.00368、 $u = (0.6548, 0.2499, 0.0953)$ 。また、田中(2009)の調整方式では、 Δ_{339} に調整される。

例4 $c < \max(a, b)$ の例

評点化された一対比較値行列を Δ_{364} とする。C.I.=0.1283。 $a_{13} = 4$ に注目する。ここに、サーティの完全整合性(C.I.=0)が成立する3個の一対比較行列、 Δ_{114} 、 Δ_{224} 、 Δ_{414} に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、 Δ_{114} 、 Δ_{414} が「対の行間の優位性」を満たさず、下記ようになる。

(Δ_{224} の場合 → Δ_{224} に調整される。代用偏差平方和=0.0、C.I.=0.0

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0 をとる Δ_{224} を採用することになる($u = (0.5714, 0.2857, 0.1429)$)。因みに、相対残差の場合は Δ_{344} に調整される。このとき、代用偏差平方和=0.00267、C.I.=0.0678。また、田中(2009)の調整方式では、 Δ_{224} に調整される。

以上の結果を整理する、例1から例4にかけて、田中(2009)の提示方式に対して、本稿で提示する一対比較値行列の調整方式は、(代用)偏差平方和、C.I.の基準で同等以上の改良を示した。対照である相対残差方式に対しては、例1と例2においてC.I.基準で良い性能を示したが、(真の)重みとの乖離を測る尺度である偏差平方和基準では依然として劣ることになる。

表5. 例1における探索範囲

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									*
2									
3			*						
4									
5									
6									
7									
8									
9	*								

表6. 例2における探索範囲

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									*
2									
3			*						
4									
5									
6									
7									
8									
9	*								

表7. 例3における探索範囲

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									*
2	●								
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9	*								

表8. 例4における探索範囲

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				*					
2									
3									
4	*								
5									
6									
7									
8									
9									

ここに、●：評点，○：提示方式，△：相対残差，＊：完全整合

7. おわりに

本稿では、一対比較値行列($n=3$)の調整について、田中(2009)の提示方式の改良を意図して再考した。提示方式の特徴は望ましい評点の組を選定する探索範囲について、評点上の整合性基準を加味して制限を強くする一方で、一対比較値行列の近傍を広げる工夫をしている。数値例の検証を通して、田中(2009)の提示方式よりは性能が良い結果を示したが、本研究の動機である例1と例2に対しては依然として偏差平方和基準で劣ることになった。今後の対策の1つとして、評点と推定値の乖離の程度を情報として組み入れる、重みつき偏差平方和基準での評価が考えられる。

参考文献

- (1) Saaty, T.L. (1980). The Analytic Hierarchy Process, McGraw Hill, New York.
- (2) 仁科健、柴山忠雄(1992). 一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22, 2, 115-123.
- (3) 小澤正典(2004). AHPにおける整合度 C.I. 値の意味と解釈、OR学会研究部会「AHPの世界」発表資料(2004.9.24).
- (4) 田中浩光(2007). AHPにおける一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講義録 1548, 122-129.
- (5) 田中浩光(2009). AHPにおける一対比較値の評点化過程について、京都大学数理解析研究所講義録 1636, 169-176.