

SU(2,2) の Maass space について

東大・理 菅野 孝史

(Sugano Takashi)

§ 1. 背景と目的

2 次, 重さ k の Siegel 尖点形式 $F(Z) = \sum a_F(T) e[ktZ]$

で, 条件

$$a_F\left(\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right) = \sum_{\substack{d|(a,b,c) \\ d>0}} d^{k-1} a_F\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/2r \\ b/2r & ac/r^2 \end{smallmatrix}\right)$$

を満たすものの全体のなす空間は Maass space と呼ばれ, Saito-Kurokawa lifting による ($SL_2(\mathbb{Z})$ に関する) 重さ $2k-2$ の尖点形式の空間の像と一致することが知られている。(cf. [5], [3], [6], [1], [14])

[4] に於て、小嶋久社氏は、Gauss 数体に関する符号 (2,2) のユニタリ群について、Maass space の類似を定義し、 $\Gamma_0(4)$ に関する尖点形式との関係を調べ、その次元の評価を与えている。また、次元の決定、Hecke theory を調べることを、問題としてあげている。

このノートでは、一般の虚 2 次体の場合に、Maass space

の類似を定義し，その次元を求めるとともに， L 関数の分解を調べることを目的とする。なお，ここで定義する空間は，小嶋氏のものと少し異なり，それをある固有空間として含むものになっている。定義及び或る *Jacobi (cusp) forms* の空間との同型 (定理 1) は，[6], [4] と全く同じ議論による。*Jacobi form* については，より一般的な状況—— $Sp(n+m)$ に於て，Levi 成分が $GL(m) \times Sp(n)$ となる *standard parabolic subgroup* の *unipotent radical* を $H_{n,m}$ と書くとき， $G_{n,m} = H_{n,m} \rtimes Sp(n)$ 上の保型形式という形——で，佐武一郎先生により Lie 群のユニタリ表現論の立場から研究されている ([10])。また，代教群上の保型形式の立場から (殊に，Hecke 環， L 関数など) 新谷卓郎先生により研究されている。今の場合 (上の記号では $G_{1,2}$ にあたる) *Jacobi forms* の空間の次元は，村瀬篤氏との共同研究の結果 (これは [10] で求められている *Bergman* 核を用いたもの)，あるいはテータ関数を介して，よく知られている $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するベクトル値尖点形式の次元公式によって求められる (定理 2)。最後に，Hecke series の分母に対応する L 関数が，Maass space に於いては定理 1 の同型で対応する *Jacobi form* の L 関数で記述されることを見る (定理 3)。

§ 2. Maass space

1° SU(2,2) 上の保型形式・Maass space の定義 K を判別

式 D の虚 2 次体, σ, δ をそれぞれ K の整数環, 共役差積とする。 $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を, その $\mathbb{Q}$ -有理点が

$$G_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_4(K) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} g = \mu(g) \begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix}, \det g = \mu(g)^2 \right\}$$

で与えられるもの (direct similitudes の群とよばれる cf. [12])

とし, 部分代数群 G^1 を $G^1_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \cap SL_4(K)$ で定義する。

G の実点の連結成分 G_{∞}^+ は, $I_{2,2}$ 型の既約有界対称領域

$$\mathfrak{h} = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid (2i)^{-1}(Z - \bar{Z}) > 0 \right\} \quad \text{に} \quad \text{一次分数変換}$$

により作用する。すなわち, $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_{\infty}^+$, $Z \in \mathfrak{h}$ のとき,

$$g \langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \quad \text{また, } J(g, Z) = \mu(g)^{-1}$$

$\times \det(CZ + D)$ は, $G_{\infty}^+ \times \mathfrak{h}$ 上のスカラー値正則保型因子となる。

$\Gamma = G^1_{\infty} \cap SL_4(\mathcal{O})$, $k \geq 1$ とし $\mathcal{G}_k(\Gamma)$ 次の条件

をみたす $\mathfrak{h}$ 上のスカラー値関数 F (Γ に関する重さ k の

cusp form) の空間をあらわす。

i) F は $\mathfrak{h}$ 上正則, ii) $F(\gamma \langle Z \rangle) = J(\gamma, Z)^k F(Z) \quad \forall \gamma \in \Gamma,$

iii) $F(g \langle Z_0 \rangle) J(g, Z_0)^{-k}$ は G_{∞}^+ 上有界 ($Z_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$) 。

$\mathcal{G}_k(\Gamma)$ の元 F は,

$$(1) \quad F(Z) = \sum_{\substack{T = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} > 0 \\ m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \delta^{-1}}} a_F(T) e[{}^t T Z]$$

と Fourier 展開される。Fourier 係数が、条件

$$(2) \quad a_F\left(\frac{m}{\alpha} \frac{\alpha}{n}\right) = \sum_{\substack{r|m, r|n \\ r^{-1}\alpha \in \delta^{-1}, r>0}} r^{k-1} a_F\left(\frac{1}{\alpha/r} \frac{\alpha/r}{mn/r^2}\right) \quad \begin{matrix} \forall m, n \in \mathbb{Z} \\ \forall \alpha \in \delta^{-1}, \end{matrix}$$

を満たす元全体のなす $G_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ の部分空間を Maass space と呼び、 $M_k(\Gamma)$ と記す。

2° Jacobi forms

$$H_{\mathbb{Q}} = \{h = (u, v, z) \mid u, v \in K, z \in \mathbb{Q}\},$$

$$G'_{\mathbb{Q}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \text{ と}$$

$$h = (u, v, z) \mapsto \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \frac{z}{v} & v \\ \hline & & 1 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & u \\ \hline & -\bar{u} \end{array} \right), \quad g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|cc} 1 & a & & b \\ \hline & c & 1 & d \end{array} \right)$$

により G^1 の部分群と見て、 $\underline{G}' = H \cdot G'$ とおく。 $Z = \{(0, 0, z)\}$ は H 及び $\underline{G}'$ の中心となる。演算は具体的には、

$$(u_1, v_1, z_1)(u_2, v_2, z_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2, z_1 + z_2 + u_1 \bar{v}_2 + \bar{u}_1 v_2),$$

$$g^{-1}(u, v, z)g = (u', v', z') \quad \begin{aligned} z &= \tau, \quad (u', v') = (u, v)g, \quad g \in G' \\ z' &= z - \bar{u}v + \bar{u}'v' \end{aligned}$$

で与えられる。 $\mathcal{D} = \{Z = (z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ 上に $\underline{G}'_{\infty}$ は、

$$\underline{g}\langle Z \rangle = \left(g\langle z \rangle, \frac{w_1}{j(g, z)} + u \cdot g\langle z \rangle + v, \frac{w_2}{j(g, z)} + \bar{u} \cdot g\langle z \rangle + \bar{v} \right)$$

により作用する。但し、 $\underline{g} = (u, v, z)g$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$, $j(g, z) = cz+d$ とおいた。自然数 r, k に対し次の $J_{r, k}(\underline{g}, Z)$ は $\underline{G}'_{\infty} \times \mathcal{D}$ 上のスカラー値正則保型因子を与える。

$$J_{r,k}(\underline{g}, Z) = j(\underline{g}, Z)^k e\left[-r\left\{\underline{g} + u\bar{u} \underline{g}(Z) + \frac{\bar{u}W_1 + uW_2 - cW_1W_2}{j(\underline{g}, Z)}\right\}\right].$$

$\Gamma' = \Gamma \cap \underline{G}'_\infty = H_{\mathbb{Z}} \cdot \Gamma'$ ($\Gamma' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) とおき, $\mathcal{G}_{r,k}(\Gamma')$ で次の条件をみたす, $\mathbb{H}$ 上のスカラー値関数 f (weight k , index r の Jacobi cusp form と呼ぶべきもの) のなる空間をあらわす。

i) f は $\mathbb{H}$ 上正則, ii) $f(\gamma(Z)) = J_{r,k}(\gamma, Z) f(Z) \quad \forall \gamma \in \Gamma'$,

iii) $f(\underline{g}(Z_0)) J_{r,k}(\underline{g}, Z_0)^{-1}$ ($Z_0 = (i, 0, 0)$) は $\underline{G}'_\infty$ 上有界

$\mathcal{G}_{r,k}(\Gamma')$ の各元 f は,

$$(3) \quad f(z, w_1, w_2) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \in \mathcal{J}^{-1}}} a_f(n, \alpha) e[nz + \bar{\alpha}w_1 + \alpha w_2]$$

と Fourier 展開される。尖点条件より, $\begin{pmatrix} r & \alpha \\ \alpha & n \end{pmatrix}$ が正定値でなければ, $a_f(n, \alpha) = 0$ となる。

自然数 m に対し, Maass [6] に従って, 線型写像 $l_r(m): \mathcal{G}_{r,k}(\Gamma') \longrightarrow \mathcal{G}_{rm,k}(\Gamma')$ を,

$$(4) \quad (l_r(m)f)(z, w_1, w_2) = m^{\frac{k-2}{2}} \sum_{S \in \Gamma' \backslash T'(m)} f|[\sqrt{m}^{-1}S]_{r,k}(z, \sqrt{m}w_1, \sqrt{m}w_2)$$

により導入しておく。ここに $T'(m) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det g = m\}$,

$$f \in \mathcal{G}_{r,k}(\Gamma'), \quad f|[\underline{g}]_{r,k}(Z) = J_{r,k}(\underline{g}, Z)^{-1} f(\underline{g}(Z))$$

($\underline{g} \in \underline{G}'_\infty$) とおいた。

3° Maass space と Jacobi form $F\left(\begin{smallmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{G}_k(\Gamma)$ を

τ について Fourier 展開する:

$$(5) \quad F\left(\begin{smallmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(z, w_1, w_2) e[m\tau]$$

これは Fourier 展開 (1) を用いれば,

$$F_m(z, w_1, w_2) = \sum_{n, \alpha} a_F\left(\begin{smallmatrix} m & \alpha \\ \alpha & n \end{smallmatrix}\right) e[nz + \alpha w_1 + \alpha w_2]$$

と書かれる。

$$(6) \quad F_r \in \mathcal{G}_{r,k}(\Gamma'),$$

$$(7) \quad F \in \mathcal{M}_k(\Gamma) \iff F_m = l_1(m) F_1 \quad \forall m,$$

は定義から直ちに確かめられる。次の定理によって, Maass space は, Jacobi cusp form の言葉で記述される。

定理 1 $F \mapsto F_1$ により Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は $\mathcal{G}_{1,k}(\Gamma')$ と同型となる。また, $\mathcal{G}_{1,k}(\Gamma')$ の元 f に対し

$$(8) \quad F(f)\left(\begin{smallmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (l_1(m)f)(z, w_1, w_2) e[m\tau]$$

は, この逆対応を与える。

証明: (7) より, $F(f)$ が保型性を満たすことのみ証明すればよい。これは, Γ が $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$ 達で生成される (cf. [2], [8]) にてを考慮すれば容易にわかる。 ▴

4° テータ関数との関係 (この項は, 定理 2 の別証を除いては必ずしも必要ではない。) $\mathcal{G}_{r,k}(\Gamma')$ の各元は, z を固定すると, テータ関数の空間

$$\vartheta_{r,z} = \left\{ \vartheta: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{正則, 任意の } u, v \in \mathcal{O} \text{ に対し} \\ \vartheta(w_1 + uz + v, w_2 + \bar{u}z + \bar{v}) = e^{-r(u\bar{u}z + \bar{u}w_1 + u\bar{w}_2)} \vartheta(w_1, w_2) \end{array} \right\}$$

に属する。よく知られているように、 $\mu \in r^{-1}\delta^{-1}$ に対し

$$\theta_{\mu}^{(r)}(z, w_1, w_2) = \sum_{\ell \in \mathcal{O}} e[r\{N(\ell + \mu)z + \overline{(\ell + \mu)}w_1 + (\ell + \mu)w_2\}]$$

とおくとき、 $\{\theta_{\mu}^{(r)} \mid \mu \in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}\}$ が $\vartheta_{r,z}$ の $\mathbb{C}$ 上のひとつの基底を与える。また各 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対し、変換公式

$$(9) \quad \theta_{\mu}^{(r)}[\gamma]_{r,1}(z, w_1, w_2) = \sum_{\nu \in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}} M_{\mu,\nu}^{(r)}(\gamma) \cdot \theta_{\nu}^{(r)}(z, w_1, w_2),$$

$$M_{\mu,\nu}^{(r)}(\gamma) = \begin{cases} \text{sgn}(d) \delta_{\mu,d\nu} e[abN(\mu)r] & \text{if } c=0, \\ \frac{1}{icr\sqrt{|D|}} \sum_{u \in \mathcal{O}/c\mathcal{O}} e\left[\frac{r}{c}\{aN(u+\mu) - \bar{h}(u+\mu)\bar{v} + dN(u)\}\right] & \text{if } c \neq 0. \end{cases}$$

が成立し、 $M^{(r)} = (M_{\mu,\nu}^{(r)})$ は $r^2|D|$ 次のユニタリ行列である (cf. [13])。

一般に、 $\Gamma' = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限次元表現 χ に対し、 $S_m(\Gamma', \chi)$ で $f(\gamma\langle z \rangle) = j(\gamma, z)^m \chi(\gamma) f(z)$ を満たす $\mathbb{C}^{\dim \chi}$ 値正則尖点形式のなす空間をあらわす。 $(f_{\mu}) \in S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(1)}})$ に $\sum_{\mu} f_{\mu} \cdot \theta_{\mu}^{(r)}$ を対応させることにより、同型

$$(10) \quad S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(r)}}) \cong \mathcal{G}_{r,k}(\Gamma')$$

を得る。

$r=1$ のときを少し詳しくみておこう。 $E = \left\{ \varepsilon \in \mathcal{O}/\delta \mid \begin{array}{l} N(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{D} \end{array} \right\}$ とおく。 K で分岐する各素数 p に対し、 $\varepsilon_p \in \mathcal{O}$ を、 $\varepsilon_p \equiv 1 \pmod{\delta_p}$ ($\forall p \neq p$) かつ $\varepsilon_p \equiv \bar{\pi}_p / \pi_p \pmod{\delta_p}$

となるようにひとつ定めておく (ここで π_p は K_p のひとつ素元)。 E は, ε_p 達で生成される $(2, \dots, 2)$ 型アーベル群である (rank は, D の素因子の個数)。また E の元として ε は,

$-1 = \prod_{p|D, \text{ord}_p D = \text{odd}} \varepsilon_p$. E は $\mathcal{V}_{1, \mathbb{Z}}$ に $\varphi = \sum_{\mu} a_{\mu} \theta_{\mu}^{(1)}$
 $\mapsto \varphi|[\varepsilon] = \sum_{\mu} a_{\mu} \theta_{\varepsilon\mu}^{(1)}$ ($\varepsilon \in E$) と作用し, この作用に関して固有空間に分解される: $\mathcal{V}_{1, \mathbb{Z}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{E}} \mathcal{V}_{1, \mathbb{Z}}^{[\sigma]}$, $\mathcal{V}_{1, \mathbb{Z}}^{[\sigma]} = \{ \varphi \in \mathcal{V}_{1, \mathbb{Z}} \mid \varphi|[\varepsilon] = \sigma(\varepsilon) \varphi \text{ for } \forall \varepsilon \in E \}$. さて, 各の固有空間は Γ' stable で, $M^{(1)} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{E}} M^{(1)[\sigma]}$ と分解される。この作用は $\mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}(\Gamma')$ にうつる。すなわち, f が (3) の Fourier 展開をもつとき,

$$(11) \quad f|[\varepsilon](z, w_1, w_2) = \sum_{n, \alpha} a_f(n - N(\alpha) + N(\varepsilon\alpha), \varepsilon\alpha) \mathbb{E}[nz + \bar{\alpha}w_1 + \alpha w_2]$$

として E が $\mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}(\Gamma')$ に作用する。 $\mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}(\Gamma')$ で σ 固有空間をあらわせば, (10) の同型は, $S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(1)[\sigma]}}) \cong \mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}^{[\sigma]}(\Gamma')$ を導く。ここで空間が $\{0\}$ とならぬためには, $\sigma(-1) = (-1)^k$ が必要である。

Remark (11) と全く同様にして, E は Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ にも作用する。 $\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ でその σ 固有空間をあらわせば, これは $\mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}^{[\sigma]}(\Gamma')$ と同型であり, $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{E}} \mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$.
 とくに, σ が単位指標のとき, $\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ は [4] で定義されている空間と一致する ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$)。また, $\mathcal{G}_k(\Gamma)$ の元 F に対し, (10) を通して $F_1 (\in \mathcal{G}_{1, \mathbb{R}}(\Gamma'))$ の $\theta_0^{(1)}$ の係

数に対応させる写像は, Oda [7] の特別な場合 ($SO(2,4)$ -case) となる。

5° Maass space の次元

定理2 K を判別式 D の虚2次体, k を4以上の整数とする。このとき, Maass space の次元は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_k(\Gamma) = & \frac{k-2}{6} \left[\frac{|D|}{4} + (-1)^k \begin{cases} 1 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ 1/4 & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \right] \\ & + \begin{cases} 0 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{4} \cos\left(\frac{k+1}{2}\pi\right) e\left[\frac{1-D}{8}\right] & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \\ & + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{4} \times \begin{cases} 2 & \text{if } \text{ord}_2 D = 2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ & + \frac{-1}{4} \times \left[1 + \begin{cases} \sum_{d|D} 4h_d/w_d & \text{if } D \not\equiv 0 \pmod{8}, \\ \sum_{\substack{d|D \\ d \equiv 1(4)}} 4h_d/w_d + \sum_{\substack{d|D \\ d/8 \equiv D/8(4)}} 4h_d/w_d & \text{if } D \equiv 0 \pmod{8} \end{cases} \right]. \end{aligned}$$

最後の Σ において, d は虚2次体の判別式となるもののみを動き, h_d, w_d はそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数, 単数群の位数をあらわす。また, $\varepsilon = 0, \pm 1$ は次の表で与えられる。

$D \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{D}{3}\right) = 1$	0	-1	0	1	0	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = -1$	-1	0	0	0	1	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = 0$	0	0	-1	1	1	-1

証明には少し異なる2つの方法がある。

(i) (村瀬篤氏との共同研究) $G_{1,m}$ の *Jacobi cusp forms* の次元については, [10] で求められている *Bergman* 核関数を用いて, *Selberg trace formula* によって, 直接求めることができる (計算は一変数の場合と基本的には同じ)。とくに, $m=2$ として $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_{1,k}(\Gamma')$ を知る。

(ii) (10) の同型を使って, ベクトル値の場合の一変数保型形式の次元公式 (cf. [11] 定理2.9) に代入して得られる。書き下す際, $M^{(1)}$ の具体的表示 (9) を用いる。

Remark 全く同じ手法で, E の指標 σ に対し, σ の固有空間 $\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ の次元が計算される。すなわち, (ii) の手法においては $\dim_{\mathbb{C}} S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(1)}[\sigma]})$ を求めれば良いし, (i) の手法においては, 次節でみるように $\varepsilon_p (\in E)$ の作用が $\underline{G}'$ の *Hecke* 環の元 $\varphi_{0,p}$ の作用に他ならぬことから, $\text{trace} \prod_{p \mid S} \varphi_{0,p}$ (S は D の約数) の計算から求まる。

§ 3. L 関数

1° G の Hecke 環 $G_{\mathbb{Q}}^+ = \{g \in G_{\mathbb{Q}} \mid \mu(g) > 0\}$ とおき, $\mathcal{H}$ で組 $(G_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma)$ で定まる Hecke 環をあらわす。 G の強近似定理により, $\mathcal{H}$ は制限テンソル積 $\otimes_p \mathcal{H}_p$ に分解する。ここで $\mathcal{H}_p$ は, $G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ と $U_p = G_p \cap GL_4(\mathcal{O}_p)$ で定まる Hecke 環。

$\mathcal{H}_p$ については, Satake 同型により完全に記述されている (cf. [9]). 今, 生成元と関係式の形で具体的に書いておく.

$$C_{0,p} = \begin{cases} U_p \cdot \text{diag}(P, P, P, P) \cdot U_p & \text{if } P \nmid D, \\ U_p \cdot \text{diag}(\pi_p, P\pi_p^{-1}, P\pi_p^{-1}, \pi_p) \cdot U_p & \text{if } P \mid D, \end{cases}$$

$$C_{1,p} = U_p \cdot \text{diag}(P, P, 1, 1) \cdot U_p,$$

$$C_{2,p} = U_p \cdot \text{diag}(P^2, P, 1, P) \cdot U_p,$$

また, $K_p = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$ のとき, $\pi_p = (P, 1)$ とし, $C_{3,p} = U_p \cdot \text{diag}(P\pi_p, \pi_p^{-1}, \pi_p^{-1}, \pi_p) \cdot U_p$, $C_{4,p} = \overline{C_{3,p}}$ とおく (混乱のおそれのない時には, $C_{i,p}$ を単に C_i と書く). $\mathcal{H}_p$ の構造は次の通り.

$$(12) \quad \mathcal{H}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[C_0, C_0^{-1}, C_1, C_2] & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = -1 \text{ or } 0, \\ \quad =: \tau, C_0, C_1, C_2 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上独立.} \\ \mathbb{C}[C_0, C_0^{-1}, C_1, C_2, C_3, C_4] & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 1, \\ \quad =: \tau, C_0, C_1, C_2, C_3 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上独立で,} \\ \quad (C_2 + (P+1)(P^2+1)C_0)^2 = C_0\{C_3C_4 + (P+1)C_1(C_3+C_4) + (P+1)^2C_1^2\}. \end{cases}$$

L 関数の定義のため, $\mathcal{H}_p$ -係数多項式 $P_p(T)$ を導入する.

$$(13) \quad P_p(T) = \begin{cases} \{1 - C_1 P^{-2} T + (C_2 + (P^3 + P^2 - P + 1)C_0) P^{-3} T^2 - C_0 C_1 P^{-2} T^3 + C_0^2 T^4\} \\ \quad \times (1 - C_0 T^2) & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = -1, \\ \{1 - C_1 P^{-2} T + (C_2 + (P^2 + P + 1)C_0) P^{-3} T^2 - C_0(C_3 + C_4 + 2C_1) P^{-3} T^3 \\ \quad + (C_2 + (P^2 + P + 1)C_0) C_0 P^{-3} T^4 - C_1 C_0^2 P^{-2} T^5 + C_0^3 T^6\} & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 1, \\ \{1 - (C_1 - (P^2 - 1)C_0) P^{-2} T + (C_2 - (P - 1)C_0 C_1 + (P^3 + P^2 - P + 1)C_0^2) T^2 \\ \quad - (C_1 - (P^2 - 1)C_0) C_0^2 P^{-2} T^3 + C_0^4 T^4\} \times (1 - C_0 T) & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 0. \end{cases}$$

これは (基本的には) G_p の local Hecke series の分母に他ならない。すなわち,

$$(14) \quad \sum_{m=0}^{\infty} T(m) (P^{-2}T)^m = P_p(T)^{-1} (1 - P^{-2}C_0^e T^2) (1 - C_0^e T^2),$$

ここで, $T(m) = \{g \in G_p \cap M_4(\mathcal{O}_p) \mid \text{ord}_p \mu(g) = m\}$, e は $K_p/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数。

Remark (13) から明らかのように, $(\frac{K}{P}) = -1, 0$ のときは, (14) の表示は既約ではない。また, $(\frac{K}{P}) = -1$ の場合を除き, Hecke series は全 similitudes 群の場合のそれとは異なる。

$\mathcal{H} \ni \Gamma g \Gamma = \bigsqcup_j \Gamma g_j$ (disjoint), $F \in \mathcal{G}_k(\Gamma)$ のとき,

$$F|[\Gamma g \Gamma]_k(Z) = \sum_j F(g_j(Z)) J(g_j, Z)^{-k}$$

とし $\mathcal{H}$ は $\mathcal{G}_k(\Gamma)$ に作用する。この作用は可換・正規であり, $\mathcal{G}_k(\Gamma)$ は $\mathcal{H}$ の同時固有関数からなる基底を有す。そこで, 任意の $\phi \in \mathcal{H}$ に対し $F|[\phi]_k = \sigma_F(\phi) F$ のとき, F の L 関数 $L(F; \mathcal{A})$ を,

$$(15) \quad L(F; \mathcal{A}) = \prod_{P \leq \infty} \left\{ \sigma_F(P_p(T)) \mid T = P^{-\mathcal{A}} \right\}^{-1} \quad (\text{Re } \mathcal{A} \gg 0),$$

と定義する。ここで, $\sigma_F(P_p(T))$ は $P_p(T)$ の係数を F の固有値でおきかえた $\mathbb{C}$ 係数多項式。

2° G' の Hecke 環

§1 で触れたように, Hecke 環は 新谷先生により一般の $G_{n,m}$ に対し 導入され, かつ good prime

では Satake 同型の成立が証明されている。

$\mathbb{Q}$ 上のスカラー値関数 φ で 条件

$$i) \quad \varphi(\gamma_1 g \gamma_2) = \varphi(g) \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma',$$

$$ii) \quad \varphi((0, 0, z)g) = \varphi(z) \varphi(g) \quad \forall z \in \mathbb{Q},$$

$$iii) \quad |Z_{\mathbb{Q}} \Gamma' \setminus \text{supp } \varphi| : \text{finite},$$

をみたすもののなす集合を $\mathcal{L}^{(r)}$ であらわす。これは convolution

により $\mathbb{C}$ -algebra をなせ, 1° と同様に $\otimes \mathcal{L}_p^{(r)}$ と局所的な

ものの制限テンソル積に分解する。 $\text{supp } \varphi = \coprod_j Z_{\mathbb{Q}} \Gamma' g_j$,

$f \in \mathcal{O}_{r,k}(\Gamma')$ のとき,

$$f[\varphi]_{r,k}(Z) = \sum_j J_{r,k}(g_j, Z)^{-1} f(g_j \langle Z \rangle) \cdot \varphi(g_j^{-1})$$

により $\mathcal{L}^{(r)}$ は $\mathcal{O}_{r,k}(\Gamma')$ に作用する。

以下 $r=1$ とし, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)}$ と書く。各素数 p に対し $\varphi_{1,p} \in \mathcal{L}$

$$\text{を, } \varphi_{1,p}(P P^{-1}) = 1, \text{supp } \varphi_{1,p} = Z_{\mathbb{Q}} \Gamma' (P P^{-1}) \Gamma'$$

として定義する。また $p|D$ のとき $\varphi_{0,p} \in \mathcal{L}$ を

$$\varphi_{0,p}((0, y, 0)) = 1/p \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{B}^{-1} \quad (\mathbb{B} \text{ は } p \text{ 上にある ideal}),$$

$$\text{supp } \varphi = Z_{\mathbb{Q}} \Gamma' \{ (0, y, 0) \mid y \in \mathbb{B}^{-1} \} \Gamma'$$

と定義する。このとき,

$$(16) \quad \mathcal{L}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[\varphi_{1,p}] & \text{if } p \nmid D \quad (\text{Shintani}), \\ \mathbb{C}[\varphi_{1,p}, \varphi_{0,p}] & \text{if } p|D, \end{cases}$$

$$\text{そこで } \varphi_{0,p}^2 = 1, \varphi_{0,p} \varphi_{1,p} = \varphi_{1,p} \varphi_{0,p} = \varphi_{1,p}.$$

となることがわかる, かくに, $\mathcal{O}_{1,k}(\Gamma')$ は $\mathcal{L}$ の同時固有

関数からなる基底をもつ。 $f \in \mathcal{G}_{1,k}(\Gamma')$ が $\mathcal{L}$ の同時固有関数: $f|[\varphi]_{1,k} = \lambda_f(\varphi) f$ ($\forall \varphi \in \mathcal{L}$) のとき, f の L 関数 $L(f; \alpha)$ を,

$$(17) \quad L(f; \alpha) = \prod_{p < \infty} \left\{ 1 - (\lambda_f(\varphi_{0,p}) - p(p-1)\left(\frac{k}{p}\right)) p^{-2\alpha} + \lambda_f(\varphi_{0,p}) p^{-2\alpha} \right\}^{-1} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{k}{p}\right) p^{-\alpha} \right\}^{-1}$$

($\operatorname{Re} \alpha \gg 0$)

と定義する。(ただし, $p \nmid D$ のとき $\lambda_f(\varphi_{0,p}) = 1$ とみる)

Remark $\varphi_{0,p}$ の定義に基づく簡単な計算より, §2-4°で導出した $\varepsilon_p \in E$ の $\mathcal{G}_{1,k}(\Gamma')$ への作用は $\varphi_{0,p}$ のそれと一致することがわかる: $f|[\varphi_{0,p}]_{1,k} = f|[\varepsilon_p]$ for $\forall p \nmid D$. (16) の関係式より, $\lambda_f(\varphi_{0,p}) = -1$ ならば, $\lambda_f(\varphi_{0,p}) = 0$ である。また, $\lambda_f(\varphi_{0,p})$ の符号については, $\prod_{p|D, \operatorname{ord}_p D = \text{odd}} \lambda_f(\varphi_{0,p}) = (-1)^k$ なる関係がある。

3° L 関数の分解 定理1の同型写像は, 1°, 2°の Hecke 環の作用と両立する。すなわち,

定理3 記号は今まで通りとする。

(i) $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は, $\mathcal{H}$ -stable。

(ii) $F = F(f) \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ のとき

F が $\mathcal{H}$ の同時固有関数 $\iff f$ が $\mathcal{L}$ の同時固有関数

(iii) そしてこのとき 次の分解が成立。($\zeta(\alpha)$: Riemann zeta)

$$L(F(f); \alpha) = L(f; \alpha) \zeta(\alpha-1) \zeta(\alpha) \zeta(\alpha+1)$$

証明は, (多少繁雑にはなるが) [1] Theorem 1 の証明と同様に進行する。すなわち, まず Maass space における Hecke 環の作用の退化の様子を調べる。

- $\{[C_2]_k - (P^2+1)[C_1]_k\} | M_k(\Gamma) = -(P^2+1)(P^3+1) \quad \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = -1,$
- $\{[C_2]_k - [C_4]_k\} | M_k(\Gamma) = 0, \{[C_3]_k - P(P+1)[C_1]_k\} | M_k(\Gamma) = -P(P+1)^2(P^2+1),$
 $\{[C_2]_k - (P+1)^2[C_1]_k\} | M_k(\Gamma) = -(P+1)(P^2+1)(P^2+P+1) \quad \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 1,$
- $\{[C_2]_k - P(P+1)[C_1]_k\} | M_k(\Gamma) = -P^2(P+1)(P^2+1),$
 $[C_0]_k | M_k^{[\sigma]}(\Gamma) = \sigma(\varepsilon_P) \quad \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 0.$

その後, $F(f)$ と f の固有値の関係

$$\sigma_{F(f)}(C_{1,P}) = \begin{cases} \lambda_f(\varphi_{1,P}) + P^2(P+1) + P\left(1 + \left(\frac{K}{P}\right)\right) & \text{if } P \nmid D, \\ \lambda_f(\varphi_{1,P}) + P^3 + P^2 + P - \lambda_f(\varphi_{0,P}) & \text{if } P \mid D, \end{cases}$$

を求めて, 証明がおわる。

参考文献

- [1] A.N. Andrianov: Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture, *Inv. Math.* 53 (1979), 267-280.
- [2] H. Braun: Hermitian modular functions III, *Ann. of Math.* 53 (1951), 143-160.
- [3] M. Eichler: Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht, *Math. Ann.* 213 (1975), 281-291.
- [4] H. Kojima: An arithmetic of hermitian modular forms of degree two, *Inv. Math.* 69 (1982), 217-227.

- [5] N. Kurokawa : Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two , Inv. Math. 49 (1978), 149-165.
- [6] H. Maass : Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Inv. Math. 52(1979), 95-104, 53(1979) 249-253, 53(1979), 255-265.
- [7] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97-144 .
- [8] N.S. Rege : On certain classical groups over Hasse domain , Math. Zeit. 102 (1967), 120-157 .
- [9] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields, Publ. Math. IHES 18 (1963) .
- [10] 佐武一郎: ある群拡大とそのユニタリ表現について, 数学 (1969), 241-253 .
- [11] 清水英男 : 保型関数 I , 岩波講座 基礎数学 (1977) .
- [12] G. Shimura : Arithmetic of unitary groups , Ann. of Math. 79 (1964), 369-409 .
- [13] T. Shintani : On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight , Nagoya Math. J. 58 (1975), 83-126 .
- [14] D. Zagier : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'après H. Maass), Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1980) .