

ボーデの法則とリーゼガング現象

寅丸敦志（東大 地震研）、伊東敬祐（神戸大、理）、甲斐昌一（九州工大）

天体现象は重力が支配している。重力の相互作用は逆べきの形であり、特徴的なスケールがない。このことが天体が特徴的なスケールのない空間構造を作る理由だろう。重力の支配する運動は原理的には多体の運動方程式を書いて解くことが出来よう。しかし、現実にはそれを解くことは、いかに計算機が発達した今でも無理がある。まして、そこに爆発や、衝突のような非重力的な過程が入ればなおさらである。いきおい、そのようなアプローチはそうした散逸を無視した系のみを相手にすることになる。最近、そういった問題を重力が支配する運動方程式をたてずに疎視化することで、セルラーオートマトンのようにローカルなルールにしてしまって 構造の形成を追い掛けたり（銀河の分布、銀河の腕構造）、重力不安定やエネルギー散逸を一種の化学反応とみなし、移動（重力散乱）を拡散にみなして、反応拡散方程式を解くことで多体の作る構造を調べるアプローチが天文学の中に生まれている。ちなみに拡散も特徴的なスケールのない現象である。この研究では、太陽系の構造を示すボーデの法則を反応拡散系が作るリーゼガング現象とのアナロジーでとらえる試みについて述べる。

ボーデの法則とは、太陽から n 番目に近い惑星の軌道の太陽からの距離 x_n が $x_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n$ という簡単な式で表わせるといいう規則性である。これはもっと一般的な表現として、太陽系が $(x_{n+1} - x_n) / (x_n - x_{n-1}) = \text{const}$ という空間則を持っていると言い直せる。この空間則は太陽系のみならず、木星、土星、天王星の衛星系についても、若干の例外はあるが成りたっており、比の値は $1.5 - 2.0$ の範囲にある。

リーゼガングとは、めのうの縞模様のような同心円状の周期的な沈殿パターンで、これまたリングの中心からの距離 x_n が $x_{n+1} / x_n = \text{一定}$ という上記と同じ空間則をとることが実験でも理論でも知られている。リーゼガングのできる理由としては、大きく分けて2つのモデルが考えられている。一つは前核形成理論で、過飽和モデルがそれである。このモデルでは、中心からイオンが拡散していくとき、過飽和溶解度積に達した所でコロイド（核）が析出する。核が出来れば濃度は平衡溶解度積まで下がるので、その周りでは核形成が押えられる。そして、もっと離れた所で拡散によりイオン濃度が過飽和溶解度積に再び達した所で、またコロイドが析出する。これを周期的に繰り返すことで、周期的沈殿パ

ターンが生ずる。もう一つは後核形成理論で、不安定性モデルがそれである。このモデルでは一旦生じたコロイドが大きさの違いで成長速度が異なる為に競合し (Ostwald ripening), このときの不安定性で、周期的パターンが生まれるとする。どちらのモデルでも太陽系とのアナロジーを組み立てられるが、この報告では前者の過飽和モデルの立場をまず取ることにする。

太陽系形成のシナリオは諸説があるが、京都モデルで説明しよう。原始太陽星雲が生まれ、その中で固体のダストが成長し、それが次第に赤道面に沈積してゆき、赤道面上の物質密度 ρ が増加する (図 1)。 ρ がある臨界密度 ρ_c を越した所で重力不安定が起こって、それまで一様であったダスト層は約 10^{18} g の微惑星に分裂する。その微惑星が衝突集積を繰り返して成長し、現在の惑星になる。重力不安定による分裂は $10^4 \sim 10^5$ 年のタイムスケールで内側から外に向かって進行すると想像されている。これまでの太陽系形成シナリオではこの時間のずれは無視され、分裂が続けて起こり、微惑星がほぼ一様に分布した状態から出発して原始惑星の成長が始まる。この時間のずれを考慮すると分裂以後の過程にどのような違いがでるだろうか。

表 1 に太陽系とリーゼガング現象との対応表を掲げる。リーゼガングリングを作るイオンが内から外に拡散するのに対して、太陽星雲のダストではそのようなことはない。その代わりにダストの赤道面への沈積速度が太陽からの距離の逆べきに比例すると仮定すれば、赤道面上で物質密度の勾配が生じて、内から外への拡散と同じ効果を生む。このことを反応拡散方程式であらわせば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + k r^{-\beta} \quad (1)$$

$$\rho_c = \rho_0 r^{-\gamma} \quad (2)$$

$$\rho \rightarrow 0, \quad \text{if } \rho \geq \rho_c \quad (3)$$

(1) の D はダストの半径方向への拡散係数、 $k r^{-\beta}$ が距離の逆べきを仮定したダストの赤道面への沈積速度である。(2) の形を取った理由は後に述べる。(3) は重力不安定で微惑星が出来るとその場所のダストは微惑星に吸いとられてダストの密度が 0 になることを示している。無次元化した方程式

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = d \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + x^{-\beta}$$

$$c_0 = x^{-\gamma}$$

を $c=0$ at $x=0$ の境界条件で解くと、この系は縞状の沈殿を内から外へと作って行く。ここで、 d は数値計算の都合上残したパラメーターで、この方程式の定性的な性質は殆んど $\Delta = \beta - \gamma$ によって決まる。特に、 $\Delta = 2$ の前後で沈澱帯はボーデの法則と同じ空間則を持つパターンとなる。ここでもとに戻って、この反応方程式の形の妥当性を検討し、パラメーターの定量的な推定をしよう。

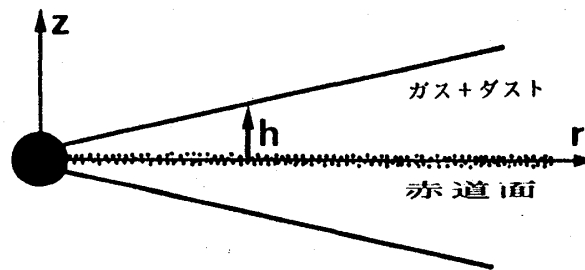


図 1

図 1 に示す太陽を取り巻く円盤の厚さはその場所のガスの熱運動の平均速度 $\bar{v}$ とケプラー角速度の関数で、 $h = \bar{v} / \sqrt{3} \Omega$, $\bar{v} \propto T^{1/2}$, $T \propto r^{-1}$, $\Omega \propto r^{-3/2}$ より (T は温度)、 $h \propto r$ となる。円盤内の物質の分布は現在有る惑星を作るのに最低限必要な物質の分布とすると、表面密度 ρ_s にして、 $\rho_s \propto r^{-3/2}$ である。 z 方向の密度は一様とすると、体積密度 ρ_v は $\rho_v = \rho_s / h \propto r^{-5/2}$ となる。これが定常分布であり、拡散はこの分布からのずれに対しておこると考えた方が良いので、実効体積密度を $\rho_s = \rho_v / r^{-5/2}$ と規格化して定義する。重力不安定をおこす臨界密度は $\rho_R \propto \Omega^2 \propto r^{-3}$ なので、規格化した密度に直すと、 $\rho_c = \rho_R / r^{-5/2} \propto r^{-1/2}$ である。 r は $\Lambda \cdot U$ 単位にすると、地球近傍 ($r = 1$) で ρ_R は初期 ($t = 0$) のダスト密度の約 10^4 倍と見積もられているので、 $\rho_c = 10^4 r^{-1/2}$ 、即ち式 (2) で $\rho_0 = 10^4$, $\gamma = 0.5$ と推定される。

沈積により赤道面上のダスト密度が増加する速度は正しくは $k r^{-\beta}$ というような単純な形ではないだろう。同じサイズのダストの沈積速度を考えれば、距離 r に関して指数関数的に減少すると思われるが、ダストのサイズが成長するので、時間の関数でもあり、詳しくは数値シミュレーションをしなければならな

いが、ここでは $k r^{-\beta}$ の形を仮定する。重力不安定が内側から進むには $\beta > \gamma$ でなくてはならず、地球近傍で分裂が $t = 10^4$ 年でおこったとすれば、 $k > 1$ である。問題は拡散係数の推定である。重力散乱による拡散では D が小さすぎるが、円盤内の運動は乱流であるとする考えもあるので、そうならば D は大きくなる。また縞状構造の形成に参与する物質移動は重力不安定が内から外に伝わることに抗する外から内への流れなので、散乱や乱流による拡散の他にガス抵抗によるダストの太陽への落下も寄与するだろう。この速度は粒子サイズによるので複雑である。そういった不確定性があるので、ここでは D は未知パラメータとして残すことにする。

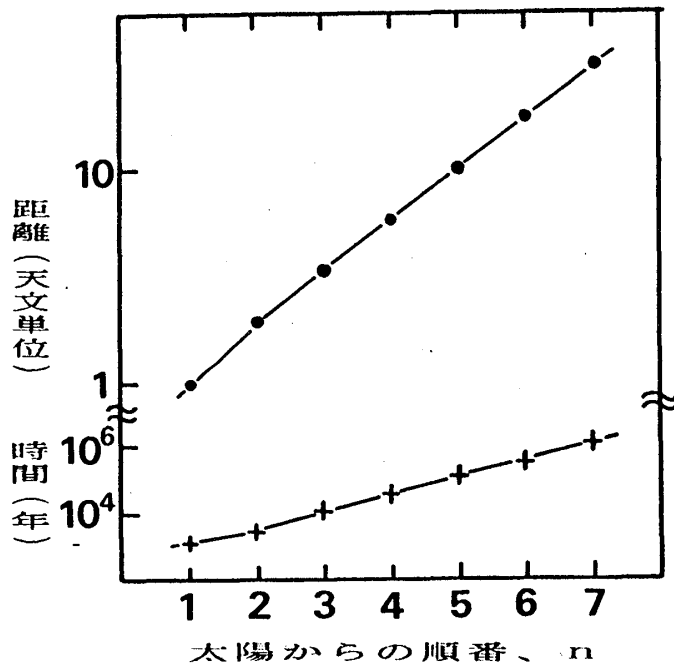


図2 重力不安定の起こる距離と時間、
 $\beta - \gamma = 2.0$ の時。

図2に、 $\Delta = 2.0$ 、 $D = 10^4$ とした時の計算結果を示す。 Δ や D を変えて、より太陽系形成のシナリオに近い結果を出すことは出来る。 D がもっと小さいと縞の間隔が狭まるので、実質的には重力不安定が連続的に内から外へ進むのと変わらなくなる。その時でも、前核形成の構造は出来ないが、後核形成のオストワルド・ライプニング (始原惑星の runaway growth) によって、リーゼガングと同じ縞状構造が生まれる可能性がある。この報告では、現象の実例としてボーデの法則を扱ったが、主張したいのは重力系を反応拡散系

と見なせるという点である。重力が支配して且つ非線形の散逸が有る系の挙動を反応拡散方程式で記述する方法は、少なくとも定性的な予測をしてその系を理解する点で、また実験の困難な重力系を実験室でシミュレート出来る点で有効であろう。そのことは観測事実を説明することよりも、まだ観測されていないが他の天体で起っているかも知れない現象を予測することに役立つと思われる。

表 1

<u>重力</u>	<u>反応拡散</u>
太陽系	リーゼガングリング
ボーデの法則	空間則
$D = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n$	$x_{n+1} / x_n = \text{一定}$
重力不安定	沈澱反応
ダスト	イオン
微惑星	コロイド
重力散乱、ガス抵抗	拡散
重力不安定で微惑星が出来る時に構造が出来る	前-核形成理論 (過飽和モデル)
微惑星が衝突集積する時に構造が出来る (runaway growth)	後-核形成理論 (不安定性モデル、 Ostwald ripening)