

トラス上のあるエルゴード系

名大養 大和一夫

§1. Introduction

測度を保つ smooth な discrete 力学系について考える.

よく知られているように Anosov の力学系はエルゴード性をもち, 更にそのエルゴード性は small perturbation によって不変である. Anosov 力学系の example は n 次元トラス T^n 上の自己同型として, $\mathbb{R}^n$ の hyperbolic 線型変換 (その固有値の絶対値がどれも 1 に等しくない) から ひきおこされるものによって与えられる.

そこで, $\mathbb{R}^n$ の quasi-hyperbolic な線型変換 (その固有値のひとつは 1 に等しく, 残り $(n-1)$ 個の固有値の絶対値はどれも 1 に等しくない) から ひきおこされる T^n の自己同型 (それ自身はつまらないがその generically perturbed system) がどの程度 Anosov 系に似た性質をもつかを考える.

我々の結果は次の様になる: 3次元の場合 ($n > 3$ でも多分同様), quasi-hyperbolic $\phi_0: T^3 \rightarrow T^3$ の generically perturbed system ϕ はエルゴード性をもち,

small perturbation で不変である。更に §4 では ϕ が almost Anosov という性質をもつかどうかについて考える。

§2. perturbed system ϕ に associate した splitting $C \oplus D \oplus E$.

以下、簡単のため $n=3$ とする。 $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ と考え、その点 (の座標) を (x, y, z) とあらわす。 $\phi_0 : T^3 \rightarrow T^3$ を $\phi_0 = \alpha \times \text{id} : T^2 \times T^1 \rightarrow T^2 \times T^1$,
ここで $\alpha : T^2 \rightarrow T^2$ は $\mathbb{R}^2$ の hyperbolic 線型変換からひきおこされるもの (固有値 c, d , $0 < c < 1 < d$, とする) id は T^1 の恒等写像。

とする。このとき T^3 の tangent bundle は

$$TT^3 = C_0^1 \oplus D_0^1 \oplus E_0^1$$

と split して, $\phi_* : TT^3 \rightarrow TT^3$ によって

$$C_0 \rightarrow C_0, D_0 \rightarrow D_0, E_0 \rightarrow E_0$$

がひきおこされ

$$\|\phi_{0*} v\| = c \|v\| \text{ for } v \in C_0,$$

$$\|\phi_{0*} v\| = d \|v\| \text{ for } v \in D_0,$$

$$\|\phi_{0*} v\| = \|v\| \text{ for } v \in E_0.$$

さて, $\varepsilon > 0$ を, $0 < c + \varepsilon < 1 < d - \varepsilon$ をみたすようにとる。 $\phi : T^3 \rightarrow T^3$ を ϕ_0 に十分近い (C^2 -topology) diffeomorphism で volume $dx dy dz$ を保つとする。

Lemma 1. perturbed system ϕ に對して,

$$TT^3 = C^1 \oplus D^1 \oplus E^1 \quad (\text{continuous})$$

と split し、 $\phi_*: TT^3 \rightarrow TT^3$ に對して

$$C \rightarrow C, D \rightarrow D, E \rightarrow E$$

が ひきおこされ,

$$\|\phi_* v\| < (c+\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in C,$$

$$\|\phi_* v\| > (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in D,$$

$$(c+\varepsilon)\|v\| < \|\phi_* v\| < (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in E.$$

さらに、この splitting は ϕ に 連続的に depend する。

Remark 1. line fields C, D は 夫々 T^3 上の dimension 1 の foliation を 定義する。すなわち T^3 の 点に對して、その点をとおり、 C (or D) の 積分曲線 (leaf) が 一意的に存在する。そして C の 各 leaf ($\mathbb{R}^1$ に 同型) は ϕ の 一般化された 安定多様体 になる。 D の 方についても同様。また、 C, D は Anosov の 意味で absolutely continuous.

Definition 1. continuous 2-plane field $C \oplus D$ が 点 $p \in T^3$ で non-integrable とは

$\exists \Delta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow T^3$ continuous imbedding

$$(i) \quad \Delta((0, 0)) = p,$$

$$(ii) \quad \Delta([0, 1] \times 0) : C \text{ の ある leaf に 含まれる,}$$

$$(iii) \quad \Delta(1 \times [0, 1]) : D \text{ の ある leaf に 含まれる,}$$

(iv) $\forall t \in [0, 1]$ に対して, $\Delta([0, 1] \times t)$ は C のある leaf に含まれる.

(v) $\exists \Gamma : \text{Im} \Delta \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ continuous

a) $\Gamma|_{\text{Im} \Delta \times 0} = \text{identity}$,

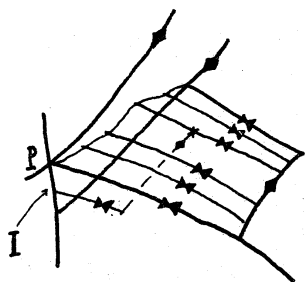
b) $\forall q \in \text{Im} \Delta$ に対して, $\Gamma(q \times [0, 1])$

は D のある leaf に含まれる,

c) $\exists I \subset \mathbb{T}^3$ smooth curve through p ,
各点で E に接している,

$$\Gamma(\Delta(0 \times [0, 1])) = I,$$

$$\Gamma(\text{Im} \Delta \times 1) \subset \bigcup_{q \in I} q \text{ を含む } C \text{ の leaf,}$$



$\star$: C の leaf

$\blacklozenge$: D の leaf

Remark 2. C, D は ϕ に連続的に depend するので
"点 p において non-integrable" という性質は small perturbation
のもとでは不変である.

Theorem 1. $C \oplus D$ が $\mathbb{T}^3$ の各点で non-integrable
ならば ϕ は ergodic である.

Remark 3. " $\mathbb{T}^3$ 上に十分細く分布した有限個の

点で "non-integrable" という仮定だけで Theorem は成立.

Theorem の証明は次の § で与えるとして,
non-integrable $C \oplus D$ をもつ ϕ の例を考えよう.

$\zeta: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ volume preserving, identity に十分近い
diffeomorphism, を次のように定めて, $\phi = \zeta \circ \phi_0$ とおく.

$\phi_0 = \alpha \times id$, $\alpha: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ Anosov で, あたはこを逃がす.

α が fixed points p, q をもつと仮定する. すると平行四辺形
 $P \subset \mathbb{T}^2$ が存在して, 各辺は (un)stable manifold of

p の q の部分集合, P の 4 つの頂点のうち p, q が向い
あう 2 つの頂点, 残りの 2 つは heteroclinic points になる.

$\delta > 0$ 十分小として, $U_\delta(p), U_\delta(q) \subset \mathbb{T}^2$ を考える, ここで
 $U_\delta(p), U_\delta(q)$ は夫々, p, q を中心, 半径 δ の開円板をあわす.

$U_\delta(p) \cap U_\delta(q) = \emptyset$, $U_\delta(p)$ は p 以外の P の頂点を含まない,
 $U_\delta(q)$ は q 以外の P の頂点を含まない. そこで $Z: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

を 0 に十分近い smooth function で

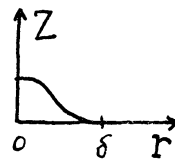
1) $\text{supp}(Z) \subset U_\delta(p) \cup U_\delta(q)$,

2) $Z|_{U_\delta(p)}, Z|_{U_\delta(q)}$ は夫々, 中心 p, q からの距離 r
だけに depend し, r の関数として図のようなもの,
とする. そして求める

$$\zeta: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$$

$$\zeta(x, y, z) = (x, y, z + Z(x, y))$$

と定義する. $\phi = \zeta \circ \phi_0$ が求める性質をもつ
ことが示される.



§3. Proof of Theorem (概略)

簡単のため, E は smooth と仮定する. すると E を $\dim 1$ の foliation を定義する. T^3 の点 p をとる, C, D, E の leaves を夫々 $L_C(p), L_D(p), L_E(p)$ とあらわす.

さて, $f \in L^2(T^3)$ が ϕ -invariant とする. i.e., $f(\phi(w)) = f(w)$ for $\forall w \in T^3$. Anosov [Steklov (1967)] によると $\exists A \subset T^3$, $\text{mes}(T^3 - A) = 0$,

almost every leaf L of C (or D)

に対して

1) $A \cap L \subset L$, i.e., $\text{mes}_L(L - A \cap L) = 0$,
full

2) f は $A \cap L$ 上ではある constant に等しい.

ところが $C \oplus D$ の non-integrability より

almost every leaf L of E に対しても上の 1), 2)

が成立する.

ことがわかる. そこで

$$A_1 = \left\{ p \in A \mid \begin{array}{l} A \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), A \cap L_D(p) \subset_{\text{full}} L_D(p) \\ A \cap L_E(p) \subset_{\text{full}} L_E(p) \end{array} \right\}$$

とおくと $\text{mes}(T^3 - A_1) = 0$. 更に,

$$A_2 = \left\{ p \in A_1 \mid A_1 \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), \dots \dots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ p \in A_2 \mid A_2 \cap L_C(p) \subset_{\text{full}} L_C(p), \dots \dots \right\}$$

を考え. すると $\text{mes}(T^3 - A_3) = 0$.

今, $p \in A_3$ に対して continuous imbedding

$$\Delta: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow T^3, \quad \Delta(0, 0) = p,$$

$$\Delta(0 \times [-1, 1]) \subset \text{leaf of } D, \quad \Delta([-1, 1] \times t) \subset \text{leaf of } C.$$

を考える. 簡単のため Δ が smooth と仮定すると

$$\text{Im } \Delta \cap A_3 \subset \underset{\text{full}}{\text{Im } \Delta}$$

が意味をもち, して $\text{Im } \Delta \cap A_3$ 上で f は constant.

さらに $\text{Im } \Delta \cap A_2$ の点をとる E の leaf 上で f は almost everywhere constant. して f は p の nbd で almost everywhere constant. 従って T^3 で そうである. ϕ の ergodicity が 証明された.

§ 4. ϕ は almost Anosov ?

ϕ に対して $f: T^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ を 次のように定義する:

$$f(p) = \frac{\|\phi_* v\|}{\|v\|}, \quad v \in E_p (= E \text{ の } p \text{ 上の fibre}) \\ v \neq 0$$

(f は $\phi_*: E \rightarrow E$ の, 各点での倍率を あらわす.)

continuous function $\log f: T^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, Birkhoff
エルゴート定理 より $\exists H \subset T^3$, $\text{mes}(H) = 1$,

$\forall p \in H$ に対して.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{ \log f(p) + \dots + \log f(\phi^{N-1}(p)) \}$$

が 存在し, ϕ が ergodic ならば $\int_{T^3} \log f \, dx dy dz$
に 等しい.

ところで $v \in E_p, v \neq 0$, に 対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\phi_*^N v\|}{\|v\|} \right)^{\frac{1}{N}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(f(p) \cdot f(\phi(p)) \cdots f(\phi^{N-1}(p)) \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{N} \left\{ \log f(p) + \cdots + \log f(\phi^{N-1}(p)) \right\} \\ &= \exp \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dx dy dz \end{aligned}$$

従って, ergodic な ϕ に 対して も

$$(*) \quad \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dx dy dz \neq 0$$

のとき, ϕ は H 上で "Anosov" になっている. このとき ϕ を "almost Anosov" と 呼びたいが, (*) をみたす ϕ の example が 今のところ 見つからない.