

Torus embeddings と cusp singularities

東北学院大学 教養部 土橋宏康

§ 0 2次元 cusp 特異点 (V, P) の minimal resolution $\pi: U \rightarrow V$ の例外集合 $X = \pi^{-1}(P)$ は有理曲線の cycle となるから, X の dual graph は S' の単体分割になる。又その各頂点に対応する曲線の self-intersection number を付けておけば, これから X 及び V は完全にわかる。実際 S' の単体分割の各頂点にすべて -2 以下でそのうちの少くとも一つは -2 より小さい整数を付けたものに対して, これを例外集合の dual graph に持つような 2次元 cusp 特異点が一つ決まる。そこで, これの 3次元への一般化として, 例外集合が compact (実) 曲面 T の 3角形分割であるような特異点を torus embeddings を使って構成することを考える。このような特異点の例として, 知られているものでは Hilbert modular cusp 特異点がある。この場合 T は 2次元実 torus となる [4]。この他にも, $g(T) > 1$ となるもの, あるいは T が non-

orientable で $\chi(T) < 0$ となる例も得られる。

§ 1. $N = \mathbb{Z}^n$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とする。 $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ ($\cong (\mathbb{C}^*)^n$), $\text{ord} = -\log | \cdot | : T_N \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ とすれば, $GL(N)$ は T_N に自然に作用し, ord は $GL(N)$ -同変写像となる。

定義 $\mathcal{S} = \{(C, \Gamma) \mid C \text{ は } N_{\mathbb{R}} \text{ の cone, } \Gamma \text{ は } GL(N) \text{ の部分群で, 次の条件 } (*) \text{ を満たす。}\}$

(*) C は Γ -不変, $\text{open non-degenerate } (C \cap \overline{(-C)} = \{0\})$ convex であり, Γ の $D = C/\mathbb{R}_{>0}$ への作用は, 固有不連続かつ固定点を持たず, D/Γ が compact。

定理 1 $(C, \Gamma) \in \mathcal{S}$ に対して, $V \setminus \{P\} \cong \text{ord}^{-1}(C)/\Gamma$ となる n 次元正規孤立特異点 (V, P) が存在する。

証明は [1] の Chapter III §1 Appendix の Theorem とほとんど同様にしてできる。この (V, P) を $\text{Cusp}(C, \Gamma)$ で表わし, $\mathcal{T} = \{\text{Cusp}(C, \Gamma) \mid (C, \Gamma) \in \mathcal{S}\}$ とする。

命題 2 D/Γ が orientable (即ち $\Gamma \subset SL(N)$) なるは, $(V, P) = \text{Cusp}(C, \Gamma)$ は純楕円型特異点 (即ち, $\delta_m(V) = 1$) D/Γ が non-orientable なるは, m が偶数 (奇数) のとき, $\delta_m(V) = 1$ ($= 0$)。 ($\delta_m(V)$ の定義は [5] を見よ。)

証明は, T_N の global coordinate $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ に対して, $dz_1/z_1 \wedge dz_2/z_2 \wedge \dots \wedge dz_n/z_n$ が $SL(N)$ で不変であることから, 容易にできる。

注. $\mathcal{V}$ は Hilbert modular cusp 特異点を含む。 K を有理数体上 n 次の全実な代数体とし、 $x \mapsto x^{(i)}$ を相異なる n 個の K の $\mathbb{R}$ への埋め込みとする。 M を rank n の K の代数的整数からなる部分群、 Λ を rank $(n-1)$ の K の unit のなす群とする。

$$G(M, \Lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \varepsilon \in \Lambda, \mu \in M \right\}$$

は、 $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\varepsilon^{(1)} z_1 + \mu^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)} z_n + \mu^{(n)})$ により、上半平面の n 個の直積 $\mathcal{H}^n$ に作用し、 $\mathcal{H}^n / G(M, \Lambda)$ に 1 点 ∞ を付加して得られる正規孤立特異点 $V(M, \Lambda)$ は Hilbert modular cusp 特異点である。このとき $M \cong \mathbb{Z}^n$ であり Λ は $SL(M)$ の部分群。 $K \ni x \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ により導かれる、 $M_{\mathbb{R}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への同型写像を $\iota: M_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ とし、 $C = \iota^{-1}([\mathbb{R}_{>0}]^n)$ とすれば、 $(V(M, \Lambda), \infty) = \text{Cusp}(C, \Lambda)$ である。このとき明らかに $(C/\mathbb{R}_{>0})/\Lambda$ は $(n-1)$ 次元実torus になる。逆に、 $n=3$ のときには、 $(C, \mathcal{P}) \in \mathcal{S}$ に対して $(C/\mathbb{R}_{>0})/\mathcal{P}$ が 2 次元実torus であれば、 $\text{Cusp}(C, \mathcal{P})$ は 3 次元 Hilbert modular cusp 特異点になることがわかる。

§ 2 Duality M を N の dual $\mathbb{Z}$ -module $\text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ とすれば、 $GL(N)$ は M にも自然に作用する。 $(C, \mathcal{P}) \in \mathcal{S}$ に対して C^* を C の dual cone 即ち

$$C^* = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle > 0 \text{ for all } n \in C \}$$

とすれば、明らかに C^* は P -不変な open non-degenerate convex cone になる。次に、 $\Theta(\Theta^*)$ を $C \cap N(C^* \cap M)$ の convex hull とし、 $\Theta^0 = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle \geq 1 \text{ for all } n \in \Theta\}$ とする。明らかに、 Θ^0 は convex であり、 Θ^* を含む。 $\mathcal{S}_0 = \{(C, P) \in \mathcal{S} \mid \Theta^0 = \Theta^*\}$ とする。

補題 3 $(C, P) \in \mathcal{S}(\mathcal{S}_0)$ ならば、 $(C^*, P) \in \mathcal{S}(\mathcal{S}_0)$ 。

証明 $\square(\square^0)$ を $\pi|_{\partial\Theta}: \partial\Theta \xrightarrow{\sim} D(\pi|_{\partial\Theta^0}: \partial\Theta^0 \xrightarrow{\sim} D^* = C^*/\mathbb{R}_{>0})$ により導かれた $D(D^*)$ の cell division とする。但し、 $\pi: N_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \longrightarrow (N_{\mathbb{R}} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \cong S^{n-1}$ 。このとき $\square$ と $\square^0$ は共に P -不変であり、互いに dual である。従って、 P の D^* への作用は、固有不連続であり固定点を持たない。又 D/P が compact であることから、 D^*/P も compact。さらに、 $\Theta^0 = \Theta^*$ であれば、 $(\Theta^*)^0 = (\Theta^0)^0 = \Theta$ 。

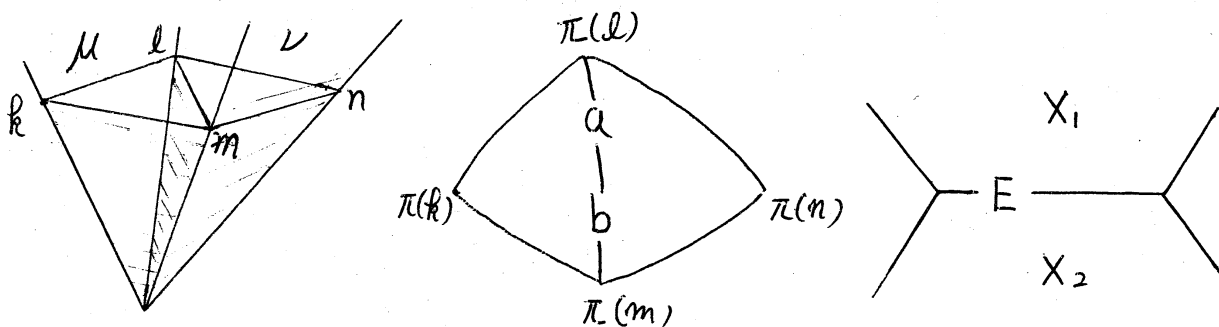
$N_{\mathbb{R}}$ の cone C に対して明らかに $C \subset (C^*)^*$ 。ところが、 $(C, P) \in \mathcal{S}$ ならば、上の補題より $((C^*)^*, P) \in \mathcal{S}$ となり、 $(C/\mathbb{R}_{>0})/P$ 及び $((C^*)^*/\mathbb{R}_{>0})/P$ が、共に compact であることから、 $C = (C^*)^*$ となる。従って $\mathcal{S}$ 及び $\mathcal{S}_0$ は duality を持つ。

注 $n = 2$ のときは、 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \{2\text{-次元の cusp 特異点}\}$ であり、上の duality は中村[2]のそれと一致する。

§ 3 $n=3$ のときの $(C, P) \in \mathcal{A}$ の具体的な構成。以下で [3] の記号と言葉を使う。 $n=3$ とし、 $(C, P) \in \mathcal{A}$ とする。 (N, Σ) を $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = C \cup \{0\}$ となる non-singular cone となる P -不変な r.p.p. decomposition とする。射影 $\pi: N_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \rightarrow S^2$ により、 Σ は D の P -不変な 3 角形分割 Δ を導く。この Δ の各辺の両端に次のようにして整数を付加する。 $\mu = \mathbb{R}_{\geq 0} k + \mathbb{R}_{\geq 0} l + \mathbb{R}_{\geq 0} m$ と $\nu = \mathbb{R}_{\geq 0} l + \mathbb{R}_{\geq 0} m + \mathbb{R}_{\geq 0} n$ を $\mathbb{R}_{\geq 0} l + \mathbb{R}_{\geq 0} m$ を共通の face に持つ Σ の 3 次元 cone とする。 (k, l, m) と (l, m, n) が共に N の基底であることから、次の式を満たす整数 a, b がある。

$$(*) \quad n + k + a l + b m = 0$$

このとき、辺 $\pi(\mathbb{R}_{\geq 0} l + \mathbb{R}_{\geq 0} m)$ の $\pi(l)$ 側に a 、 $\pi(m)$ 側に b を付加する。このようにして付加された整数は、明らかに P の作用で不変である。



$T_{Nemb}(\Sigma)$ は P の作用する非特異代数多様体であり、 $\mathcal{X} = T_{Nemb}(\Sigma) \setminus T_N$ とすると、 $\mathcal{X}$ は有理曲線に沿って正規交叉す

る有理曲面からなり Δ を dual graph に持つ。 $\hat{C} = \text{ord}^{-1}(C)$ とすると、 $\text{Int}(\hat{C}) = \hat{C} \cup \hat{X}$ であり、これに Γ は固有不連続かつ固定点を持たずに作用する。従って $U = \hat{C}/\Gamma$, $X = \hat{X}/\Gamma$ とすれば、 $U \cup X$ は複素多様体であり、 $U = V \setminus \{P\}$ であるが、 $\pi(X) = P$ となる正則写像 $\pi: U \cup X \rightarrow V$ がある、但し $(V, P) = \text{Cusp}(C, \Gamma)$ 。即ち、 X は (V, P) の resolution の例外集合であり、 Δ から導かれた compact な実曲面 D/Γ の 3 角形分割 Δ/Γ は X の dual graph となる。しかも上で定めた各辺の両端の整数 a, b は夫々 $(E|X_2)^2 = X_1^2 \cdot X_2$, $(E|X_1)^2 = X_1 \cdot X_2^2$ に等しい、但し X_1, X_2 は夫々 Δ の頂点 $\pi(l), \pi(m)$ に対応する曲面であり、 $E = X_1 \cdot X_2$ は辺 $\pi(\mathbb{R}_{\geq 0}l + \mathbb{R}_{\geq 0}m)$ に対応する double curve である。

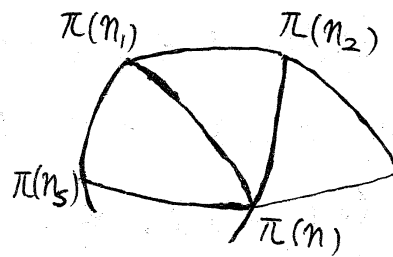
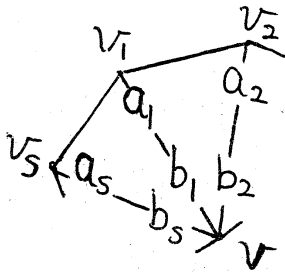
以下では、逆に上のような曲面の 3 角形分割から、 Δ に属する (C, Γ) を構成することを目指す。 T を compact な実曲面、 $\pi: \hat{T} \rightarrow T$ をその普遍被覆面とし、 $\Gamma = \pi_1(T)$ を T の基本群とする。次に、 Δ を $\hat{T}$ の Γ -不変なる 3 角形分割とする。

定義 monodromy condition を満たす Γ -不変な Δ の double $\mathbb{Z}$ -weighting とは、 Δ の各辺の両端に付加された整数で次の 2 つの条件を満たすものをいう。(i) 付加された整数は Γ -不変。(ii) Δ の各頂点 v に対して、 $v_1, v_2, \dots, v_s$ をこの順

に v の回りを取りまく頂点の輪とする。辺 VV_j の V 及び V_j の側に付加された整数を夫々 a_j, b_j とする。 (n, n_1, n_2) を N の基底とすると、

$$(*) \quad n_{j+1} + n_{j-1} + a_j n_j + b_j n = 0 \quad (j=2, 3, \dots, s)$$

により N の点 $n_2, \dots, n_s, n_{s+1}$ が決まる。このとき $n_{s+1} = n_1$ であって、 $\pi(n_1), \pi(n_2), \dots, \pi(n_s)$ が、 $\pi(n)$ の回りをこの順で、丁度 1 回転する。



上の定義を満たす Δ の double $\mathbb{Z}$ -weighting を 1 つ取り、 Δ の 3 角形を 1 つ選ぶ。次に N の基底を 1 つ取り、その 3 つの元を、この 3 角形の各頂点に 1 つづつ対応させる。すると定義の (iii) の条件と γ が単連結であることから、(*) により、写像 $\sigma: \{\Delta \text{ のすべての頂点} \} \rightarrow N$ が決まる。又 (i) の条件から、すべての $\gamma \in \Gamma$ 及び Δ の頂点 v に対して $\rho(\gamma) \cdot \sigma(v) = \sigma(\gamma \cdot v)$ を満たす準同型写像 $\rho: \Gamma \rightarrow GL(N)$ が決まる。さらに、 $\pi \circ \sigma$ を γ に拡張して、 Δ の各 3 角形を S^2 の球面 3 角形に移す局所同相な Γ -同変写像 $f: \Gamma \rightarrow S^2$ を得

ることができる。このとき Δ の各単体 μ に対して $C(\mu) = \pi^{-1}(f(\mu)) \cup \{0\} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot f(\mu)$ とし, $\Sigma = \{C(\mu) \mid \mu \text{ は } \Delta \text{ のすべての単体}\} \cup \{0\}$ とする。

命題 4 f が 1 対 1, $f(\tilde{\tau})$ が spherically convex で S^2 のある半球の完全内部に含まれると仮定する。すると $(C, \rho(P)) \in \mathcal{S}$ であり, (N, Σ) は non-singular cone かつ Γ -不変な r.p.p. decomposition であり, $|\Sigma| = C \cup \{0\}$, 但し $C = \pi^{-1}(f(\tilde{\tau}))$ 。

証明 命題の仮定から, C は Γ -不変な open non-degenerate convex cone になる。 f が 1 対 1 ならば, f は同相写像であり, ρ も 1 対 1 になる。従って, Γ が T の基本群であることから Γ の $C/\mathbb{R}_{>0} = f(\tilde{\tau})$ への作用は固有不連続であり, 固定点を持たない。又 $(C/\mathbb{R}_{>0})/\Gamma \cong \tilde{\tau}/\Gamma = T$ は compact. f が Γ -不変な同相写像であることから, 明らかに (N, Σ) は Γ -不変な r.p.p. decomposition となり, $C = \cup C(\mu)$ だから $|\Sigma| = C \cup \{0\}$ 。

上のようにして定めた f が, 命題の仮定を満たせば, 定理 1 により正規孤立特異点 $(V, P) = \text{Cusp}(C, \rho(P))$ を得る。しかも, この § の始めに述べたようにして Δ から V の resolution がわかる。

定理5 $\text{monodromy condition}$ を満たす Γ -不変な Δ の double $\mathbb{Z}$ -weighting が、次の2つの条件を満たせば、これから上のようにして導かれた写像 $f: \tilde{\Gamma} \rightarrow S^2$ は命題4の仮定を満足する。(i) Δ の辺に付加された2つの整数の和が、すべて -2 以下。(ii) その上に付加された整数の和が、 -2 である辺をすべて Δ から取り除いたとき、 Δ が胞体分割になる。

この場合、 $\chi(T) < 0$

証明の概略 $\tilde{\Gamma}$ の1点 s を固定し、 $f(s)$ を中心とする S^2 の十分小さい円 S を取る。 S の各点 θ に対し、 W_θ をその像 $f(W_\theta)$ が $f(s)$ と θ を通る S^2 の大円の小弧上にあり、 s を始点とする $\tilde{\Gamma}$ の最も長い曲線とする。 $W = \bigcup_{\theta \in S} W_\theta$, $D = f(W)$ とすると、 W は開集合であり $f|_W: W \rightarrow D$ は同相写像である。 ϕ を $\tilde{\Gamma}$ に拡張して $f = \pi \circ \tau$ を満たす Γ -同変連続写像 $\tau: \tilde{\Gamma} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ を得ることが出来る。しかも条件(ii)の胞体分割を $\square$ としたとき、 $\square$ の各2次元胞体 α に対して $\tau(\alpha)$ が、 $N_{\mathbb{R}}$ のある平面 H 上にあるようにでき、このような τ が一意的に決まる。このとき、 α の適当な近傍 U をとれば、条件(i)(ii)より $U \setminus \alpha$ は H の上(0の反対側)にある。 β を s を含む $\square$ の2次元胞体とすれば、 $\tau(\beta)$ は $N_{\mathbb{R}}$ のある平面上にあるから、すべての $x \in \tau(\beta)$ に対して $\langle m_0, x \rangle = 1$ となる $m_0 \in M$ が1つ決まる。 $k(t) = \langle m_0, \tau(t) \rangle$, $h = k \cdot f|_W^{-1}$

とすれば、夫々 τ と D 上の連続関数となる。 $N_{\mathbb{R}}$ の平面による $\tau(W)$ の切り口を観察することにより次のようなことがわかる。

補題 任意の $t \in W$ に対して $h(t) \geq 1$ であり、1 以上の任意の実数 ℓ に対して $D(\ell) = \{u \in D \mid h(u) \leq \ell\}$ は spherically convex な閉集合であり、 $h^{-1}(\ell)$ を境界に持つ。

D は $\bigcup_{\ell \geq 1} D(\ell)$ に等しいから、spherically convex であり、半球 $\pi(\{x \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_0, x \rangle > 0\})$ の完全内部に含まれる。次に W の任意の点列 $\{t_j\}$ を考える。これが τ の点 t に収束するとすれば、 h は連続だから $\{h(t_j)\}$ は上限 ℓ_0 を持つ。 $\{f(t_j)\} \subset D(\ell_0)$ であり、 $D(\ell_0)$ は閉集合だから $f(t) \in D(\ell_0) \subset D$ となる。 $f|_W$ は同相写像であったから、

$$t = \lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} f|_W^{-1} \circ f(t_j) = f|_W^{-1} \circ f(t) \in W.$$

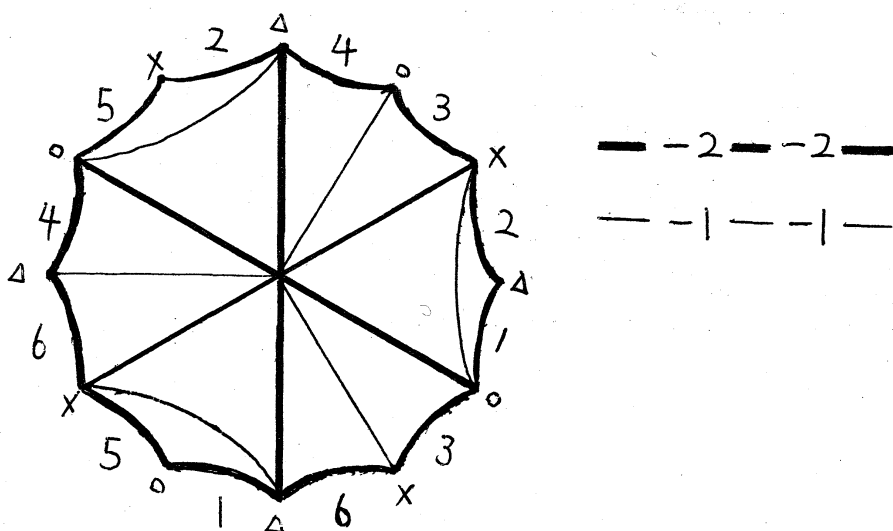
従って W は閉集合であるから $\tau = W$ 。又、簡単な計算により $12 \chi(T) = \sum_{\Delta/P \text{ のすべての辺}} (2 + \text{辺上に付加された整数の和})$ となることがわかる。すると条件 (i)(ii) より明らかに $\chi(T) < 0$ 。

§4 例 1. Δ_1 を 2 次球面 S^2 の 8 面体分割とする。 T を Δ_1 のすべての頂点で分岐する S^2 の 2 重被覆面とし、 Δ_2 を Δ_1 から導かれた T の 3 角形分割とする。すると T は

$g(T) = 2$ の compact orientable な曲面となる。 Δ を Δ_2 から導かれた T の普遍被覆面 π 上の 3 角形分割とし, $P = \pi_1(T)$ とする。図 1 の Δ_1 上の整数を Δ に引き戻すことにより Δ 上の P -不変な double $\mathbb{Z}$ -weighting を得る。これが monodromy condition 及び定理 5 の条件を満たすことは、容易に確かめられる。

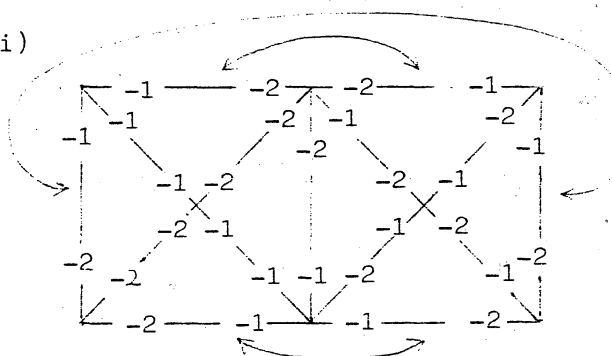
例 2. T 及び Δ_1 を図 2 の図形の同じ番号のついた辺, 同じ記号のついた頂点どうしを貼り合わせることによって得られる曲面とその上の 3 角形分割とする。このとき T は $\chi(T) = -2$ の compact non-orientable な曲面となる。次に図の太線の両端に -2 , 細線の両端には -1 を付加すれば, monodromy condition を満たす Δ_1 上の double $\mathbb{Z}$ -weighting が得られる。

図 2

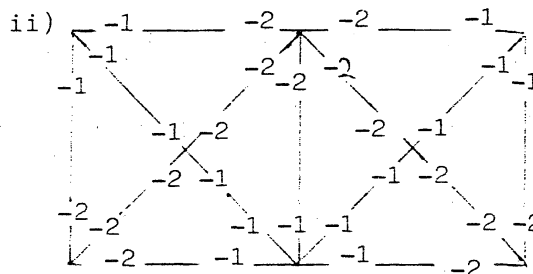


 1

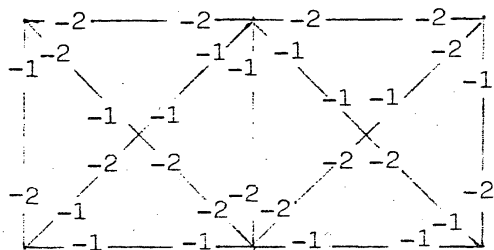
i)



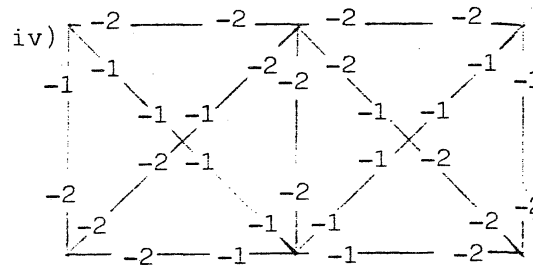
ii)



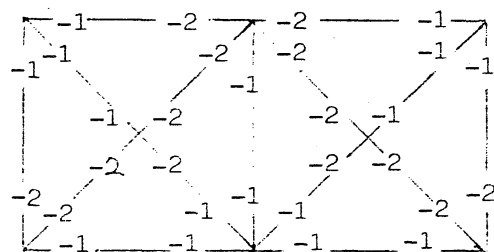
iii)



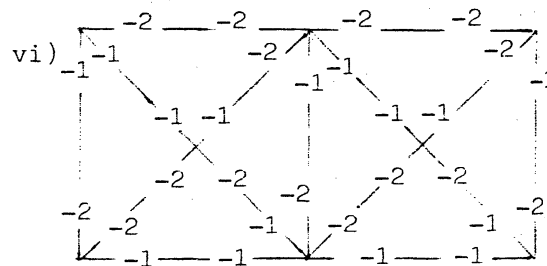
iv)



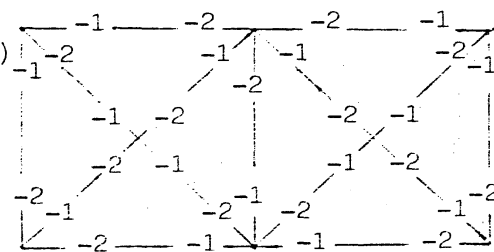
v)



vi)



vii)



文献

- [1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai,
Smooth compactification of locally symmetric varieties,
Math. Sci. Press, Brooklin, 1975
- [2] I. Nakamura, Inoue-Hirzebruch surfaces and a
duality of hyperbolic unimodular singularities, I.
Math. Ann., 252, 221-235 (1980).
- [3] T. Oda, Lectures on torus embedding and applications,
Tata Inst. of Fund. Res., 1978.
- [4] E. Thomas and A. T. Vasquez, On the resolution
of cusp singularities and the Shintani decomposition
in totally real cubic number fields, Math. Ann.,
247, 1-20 (1980).
- [5] K. Watanabe, On pluri genera of normal isolated
singularities I, Math. Ann., 250, 65-94 (1980).