

複素射影空間内の平行部分多様体について

筑波大数学系 高木亮一

正則断面曲率 c の $N\text{-dim}_{\mathbb{C}}$ 複素射影空間を $P_N(c)$ とする。
最初に, Lie 群の表現論を用いて, $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体を構成しよう。 $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 環とする。 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{f}$ を 1 つ選び, $\mathfrak{f}$ に関する $\mathfrak{g}$ の 0 でない root の全体を Δ とおく。 Δ に適当な順序を与え, Π を単純 root の全体とする。 Π の任意の部分集合 Π_0 ($\neq \Pi$) に対し,

$$\Delta_0 = \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi_0} n_{\alpha} \alpha \in \Delta ; n_{\alpha} \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおく。 $\alpha \in \Delta$ に対する $\mathfrak{g}$ の root 空間を $\mathfrak{g}_{\alpha}$ とし,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{f} + \sum_{\alpha \in \Delta_0 \cup \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

とおくと, これは $\mathfrak{g}$ の Lie 部分環である。 G を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の中心のない連結複素 Lie 群とし, U を $\mathfrak{u}$ に対応する G の連結複素部分群とすれば, 単連結複素等質多様体 $M = M(\Pi, \Pi_0) = G/U$ が得られる。 G_0 を G の極大 compact Lie 部分群とすれば, $M = G_0 / (G_0 \cap U)$ と表されるから, M は compact である。次に, M を $P_N(c)$ に埋め込もう。

命題 1 ([1], [3], [5], [6]). 任意の $\rho: \Pi - \Pi_0 \rightarrow \mathbb{Z}^+$

に対し 2 , $N \in \mathbb{Z}^+$ と equivariant Kähler 埋め込み

$f_P : M(\pi, \pi_0) \rightarrow P_N(\mathbb{C})$ が存在する。

証明。 $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in \pi}$ を π に対応する weight の基本系とする。
 $\sum_{\alpha \in \pi - \pi_0} p(\alpha) \Lambda_\alpha$ を最高 weight とするような表現

$$\tilde{\rho}_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(N+1, \mathbb{C})$$

が一意的に存在する。 $\tilde{G}$ を G の普遍被覆とすれば, $\tilde{\rho}_1$ は準同型 $\rho_1 : \tilde{G} \rightarrow SL(N+1, \mathbb{C})$ を引起し, さらに次の図形が交換するような準同型 $\rho_2 : G \rightarrow PL(N+1, \mathbb{C})$ を引起す。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\rho_1} & SL(N+1, \mathbb{C}) \\ \pi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi \\ G & \xrightarrow{\rho_2} & PL(N+1, \mathbb{C}), \end{array}$$

ここに π は被覆準同型である。 G_0 の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ に対応する $\tilde{G}$ の連結 Lie 部分群を $\tilde{G}_0$ とすれば, 上図は次の交換図形を引起す。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_0 & \xrightarrow{\rho} & SU(N+1) \\ \pi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi \\ G_0 & \xrightarrow{\rho_3} & PU(N+1) \end{array}$$

最高 weight vector $e_0 \in \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$ を用いて, M の $P_N(\mathbb{C})$

への埋め込み f_p が

$$f_p(xV) = p(x)[e_0], x \in G$$

によって定義できる。上図より f_p は所定の性質をもつことがわかる。 g.e.d.

よって、特に $(f_p, M(\pi, \pi_0))$ は $P_N(c)$ の等質 Kähler 部分多様体となっている。この逆も成立つ。すなわち、

定理 2 ([6])。 $P_N(c)$ の任意の等質 Kähler 部分多様体は命題 1 で構成した $(f_p, M(\pi, \pi_0))$ のどれかと一致する。

注意 3 Calabi [2] の一意性定理によつて、定理 2 は局所的にも成立つ。

さて、 $(f_p, M(\pi, \pi_0))$ が対称空間 (従つて Hermitian となる) のとき、その次数を計算してみよう。一般に M を $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体とするとき、 M のカッセル基本形式の m 回の共変微分 tensor を H^m で表す。 $M \ni x$ において、 H_x^m は $T_x(M) \times \cdots \times T_x(M)$ (m 個) から $P_N(c)$ における M の法ベクトル空間 $N_x(M)$ への対称多重線型写像と考えられる。次式をみたす $d = d(x) \in \mathbb{Z}^+$ が唯一つ存在することがわかる。

$$I_m(H_x^{d-2}) \subseteq I_m(H_x^{d-1}) = I_m(H_x^d).$$

この d を x における M の次数という。明かには, $(f_p, M(\pi, \pi_0))$ の次数は $x \in M$ に依らない。

定理 4 ([3]). $P_N(c)$ の対称 Kähler 部分多様体上では,

$$m \neq l \text{ なら, } \mathcal{I}_m(H^m) \perp \mathcal{I}_l(H^l).$$

定理 5 ([5]). $M = M(\pi, \pi_0)$ を既約成分が m 個の対称空間とし, それぞれの成分の階数を, $r_1, \dots, r_m$ とする。

このとき必ず $\# \{ \pi - \pi_0 \} = m$ となるが, $\mathcal{I}_m(p) =$

$(p_1, \dots, p_m)$ とおくと, $(f_p, M(\pi, \pi_0))$ の次数は

$$p_1 r_1 + \dots + p_m r_m$$

に等しい。

ここで, M を $P_N(c)$ の 2 基本形式が平行な Kähler 部分多様体とすれば, Gauss の公式より M は局所対称となるから, 定理 5 と注意 3 より, $p_1 r_1 + \dots + p_m r_m \leq 2$ を解いて, 次の場合だけが可能であることがわかる。

$$(A) \quad m=1, \quad p_1=r_1=1$$

$$(B) \quad m=1, \quad p_1=2, \quad r_1=1$$

$$(C) \quad m=2, \quad p_1=p_2=1, \quad r_1=r_2=1$$

$$(D) \quad m=1, \quad p_1=1, \quad r_1=2$$

これらを順に等質空間の形で書けば,

$$(1) P_n(c) = SU(n+1)/S(U(n) \times U(1)),$$

$$(2) P_n(c/2),$$

$$(3) P_n(c) \times P_m(c),$$

$$(4) SO(n+2)/SO(n) \times SO(2),$$

$$(5) SU(s+2)/S(U(s) \times U(2)),$$

$$(6) SO(10)/U(5),$$

$$(7) E_6/Spin(10) \times T,$$

となる。よって、階数が1または2の compact Hermitian 対称空間であるといえる。

以上、表現論の立場から $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体、特に $H^2 = 0$ なるものを述べてきたが、対称 Kähler 部分多様体は代数的に簡潔に述べることもできる。すなわち、

定理 6 ([4]). $P_N(c)$ の対称 Kähler 部分多様体はすべて2次の代数方程式で与えられる。

従って、この定義方程式を $g_1 = 0, \dots, g_r = 0$ とすれば、原理的には M の幾何学が $g_1, \dots, g_r$ と対応しているわけである。この対応関係を明らかにすることは興味ある問題と思われる。

文 献

- [1] A. Borel and A. Weil, *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts*, Séminaire Bourbaki (Exposé by J. P. Serre) : 1954.
- [2] E. Calabi, *Isometric imbedding of complex manifolds*, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 1-23.
- [3] H. Nakagawa and R. Takagi, *On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space*, *J. Math. Soc. Japan*, 28 (1976), 638-667.
- [4] Y. Sakane and M. Takeuchi, *On defining equations of symmetric submanifolds in complex projective spaces*, to appear.
- [5] R. Takagi and M. Takeuchi, *Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space*, *Osaka Math. J.*, 14 (1977), 501-518.
- [6] M. Takeuchi, *Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces*,

J. Math. Soc. Japan, 4(1978), 171-219.