

Fejér-Riesz の不等式

東北大学教養部 望月 望 (Nozomu Mochizuki)

1. 序

標題の不等式は [2] において $H^p(|z| < 1)$ の関数について示されたが, [4] で上半面 $\mathbb{R}_+^2$ の場合にも成立すること被証明された. 即ち, $f \in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}_+} |f(x+iy)|^p dy \leq 2^{-1} \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx$$

が成立するのである. この不等式は, 右辺の有限性から左辺の積分の存在が言えること, 詰り $|f|$ の増大度について何事かを示していることである ([8, p. 35]). [4] では $1 \leq p < \infty$ の場合に議論しているが, [6] の方法によって $0 < p < \infty$ に対して成立することも示される.

さて, $H^p(\mathbb{R}_+^2)$ の高次元へのひとつの拡張は, 2 種 Siegel 領域 D 上の Hardy space $H^p(D)$ である ([5]).

ここでは, (1) に相当する不等式を, 或る種の Siegel 領域上の多重変調和関数の族について考へてみる. 尚, 有界な領域の場合¹⁾については [3], [7] を, 有界でない場合についての他の方向の参考文献については [8] を参照して下さい.

2. 結果.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を, 原点から発する n 本の 1 次独立な半直線の convex hull の内部とする. $\Phi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ を, Ω -hermitian form として Ω と Φ によって定義される $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ の Siegel domain D を考へる. 即ち,

$$D = D(\Omega, \Phi) = \{(Z, W) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} Z - \Phi(W, W) \in \Omega\}$$

とする. ここに, $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 等とする. $\mathbb{R}^n$ 及び $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ 上の Lebesgue 測度を dX, dW と表す. 次に, D 上の実関数 u :

$$u \geq 0, \log u \text{ は plurisubharmonic,}$$

$$M(u, p) := \sup_{Y \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m} u(X + iY + i\Phi(W, W), W) dX dW < \infty,$$

の全体の集合を $LH^p(D)$ と表す ($0 < p < \infty$). この記号を使えば, f が D 上正則で $M(|f|, p) < \infty$ のとき $f \in H^p(D)$ である. $f_j \in H^p(D)$, $j=1, \dots, \ell$, のとき $\sum_{j=1}^{\ell} |f_j| \in LH^p(D)$ である. さて, (1) は次の如く拡張される:

定理. $D = D(\Omega, \Xi) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, $u \in LH^p(D)$, $0 < p < \infty$, とする. このとき, 任意の $X \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\int_{\Omega \times \mathbb{C}^m} u(X + iY + i\Xi(W, W), W)^p dY dW \leq 2^{-n} M(u, p).$$

3. 証明

古典的方法 ([1], [2]) を, 有界でない場合に適用出来る様に改良して $\mathbb{R}_+^2$ の場合に議論をし, ついで Ω 上の tube domain $T\Omega$ 上の議論をし, 更に n 次元 $\mathbb{C}P^1$ 上の Siegel 領域の場合に話を進めて, 最終的な結論を得る. まず, 次の基本的である ([10]).

補題 0. u は $\mathbb{R}_+^2$ で subharmonic, $u \geq 0$, ある $p \geq 1$ に対して次を満たすとする (この u 全体を, $LH^p(\mathbb{R}_+^2)$ と表す):

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} u(x+iy)^p dx < \infty.$$

$\Rightarrow$ とき, 任意の $\rho > 0$ に対して, $x^2 + y^2 \rightarrow \infty, y \geq \rho$, ならば $u(x+iy) \rightarrow 0$ である.

補題 1. $\mathbb{R}_+^2$ 上の正則関数 $f(x+iy)$ に対して 次の成立する: $0 < r < R, 0 < T$ に対し,

$$\begin{aligned} 2) \quad 2 \cdot \int_r^R |f(iy)|^2 dy &\leq \int_{-T}^T |f(x+ir)|^2 dx + \int_{-T}^T |f(x+iR)|^2 dx \\ &\quad + \int_r^R |f(-T+iy)|^2 dy + \int_r^R |f(T+iy)|^2 dy. \end{aligned}$$

証明. $-T+ir, ir, iR, -T+iR; ir, T+ir, T+iR, iR$ をそれぞれ頂点とする二個の長方形に於いて, $f(z)^2$ に Cauchy 積分定理を使って次を得る:

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_r^R f(iy)^2 dy \right| &\leq \int_{-T}^T |f(x+ir)|^2 dx + \int_{-T}^T |f(x+iR)|^2 dx \\ &\quad + \int_r^R |f(-T+iy)|^2 dy + \int_r^R |f(T+iy)|^2 dy. \end{aligned}$$

$f(z)$ が虚軸上実数値をとる場合, これは (2) のものである. 一般の場合には, $g(z) = z^{-1}(f(z) + \overline{f(-\bar{z})})$, $h(z) = (zi)^{-1}(f(z) - \overline{f(-\bar{z})})$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, とおくと 各々に $h(z)$ が成り立つこと, 及び $|f(iy)|^2 = g(iy)^2 + h(iy)^2$, $y \in \mathbb{R}$, $|g(z)|^2 + |h(z)|^2 = z^{-1}(|f(z)|^2 + |f(-\bar{z})|^2)$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, であることから (2) が得られる.

補題 2. $P(x, y) = \pi^{-1}y(x^2 + y^2)^{-1}$: Poisson kernel, $p > 0$, $u_p(x + iy) = u(x + i(p + y))$ とする. $u \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$ に対して, $u_{p, \varepsilon}(x + iy) = (u_p(x + iy) + \varepsilon)^{1/2}$, $\varepsilon > 0$ とおいて,

$$(3) \quad h_{p, \varepsilon}(x + iy) = \int_{\mathbb{R}} \log u_{p, \varepsilon}(t) P(x - t, y) dt, \quad x + iy \in \mathbb{R}_+^2,$$

とおくと, これは $\mathbb{R}_+^2$ 上, $\log u_{p, \varepsilon}$ の harmonic majorant である.

証明. 上半連続関数は, 連続関数の減少列によって近似される故, u を連続とおいてよい. 補題 0 から, $\log u_{p, \varepsilon}(x + iy) \rightarrow z^{-1} \log \varepsilon$, $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, $y \geq 0$. 従って, $\log u_{p, \varepsilon}(t)$ は $\mathbb{R}$ 上有界で $h_{p, \varepsilon}$ が定義され, $\mathbb{R}_+^2$ 上 harmonic である. subharmonic functions に対する最大値の原理を使えば, これは $\log u_{p, \varepsilon} \leq h_{p, \varepsilon}$ を

を満たすことを示す。

補題 3. $u \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\rho > 0$ とする。このとき、任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する:

$$\int_{\mathbb{R}_+} u_\rho(x+iy) dy \leq z^{-1} \int_{\mathbb{R}} u_\rho(x) dx.$$

証明. $x=0$ と一般性を失わない。 $\varepsilon > 0$ とし, (3) によって $h_{\rho, \varepsilon}$ を定義する。補題 2 から, $u_\rho(z) + \varepsilon \leq \exp(2h_{\rho, \varepsilon}(z)) = |F(z)|^2$; 即ち, $F(z) = \exp(h_{\rho, \varepsilon}(z) + i g_{\rho, \varepsilon}(z))$, $z \in \mathbb{R}_+$, が正則となる様に $g(z)$ をとっておいた。さて, $0 < r < R$, $0 < T$ を任意にとって $F(z)$ に (2) を適用すると,

$$\begin{aligned} 2I(r, R) &:= 2 \int_r^R u_\rho(iy) dy < 2 \int_r^R |F(iy)|^2 dy \\ &\leq \int_{-T}^T |F(x+ir)|^2 dx + \int_{-T}^T |F(x+iR)|^2 dx \\ &\quad + \int_r^R |F(-T+iy)|^2 dy + \int_r^R |F(T+iy)|^2 dy. \end{aligned}$$

不等式 $|F(z)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} u_{\rho, \varepsilon}(t) P(x-t, y) dt \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} u_{\rho, \varepsilon}(t)^2 P(x-t, y) dt$

の各 R を利用して, 次を得る:

$$2 I(r, R) < \int_{-T}^T dx \int_{\mathbb{R}} u_{p,\varepsilon}(t)^2 P(x-t, r) dt + \int_{-T}^T \left(\int_{\mathbb{R}} u_{p,\varepsilon}(t) P(x-t, R) dt \right)^2 dx \\ + \int_r^R dy \int_{\mathbb{R}} u_{p,\varepsilon}(t)^2 P(-T-t, y) dt + \int_r^R dy \int_{\mathbb{R}} u_{p,\varepsilon}(t)^2 P(T-t, y) dt.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とし,

$$2 I(r, R) \leq$$

$$\int_{-T}^T dx \int_{\mathbb{R}} u_p(t) P(x-t, r) dt + \int_{-T}^T \left(\int_{\mathbb{R}} u_p(t)^{1/2} P(x-t, R) dt \right)^2 dx \\ + \int_r^R dy \int_{\mathbb{R}} u_p(t) P(-T-t, y) dt + \int_r^R dy \int_{\mathbb{R}} u_p(t) P(T-t, y) dt$$

$$=: I_1(r, T) + I_2(R, T) + I_3(r, R, T) + I_4(r, R, T).$$

まず, $I_1(r, T) \leq \int_{\mathbb{R}} u_p(t) dt$ は明らかである。次に, $I_j, j=3, 4$, を評価する。

$$v(\mp T, y) = \int_{\mathbb{R}} u_p(t) P(\mp T-t, y) dt$$

と表す。補題 D から $|t| \rightarrow \infty$ のとき $u_p(t) \rightarrow 0$ である故、 $K > 0$ をとり $u_p(t) < R^{-2}$, $|t| > K$, としおく。不等式

$y(a^2+y^2)^{-1} < a^{-1}$, $a, y > 0$, を利用すると, 任意の $T > K$ に對して

$$\begin{aligned} v(T, y) &< R^{-2} + \int_{|t| \leq K} u_p(t) P(T-t, y) dt \\ &< R^{-2} + (T-K)^{-1} \int_{\mathbb{R}} u_p(t) dt \end{aligned}$$

を得, これから R を得る:

$$I_j(r, R, T) < R^{-1} + (T-K)^{-1} R \int_{\mathbb{R}} u_p(t) dt, \quad T > K, \quad j=3, 4$$

最後に,

$$G(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u_p(t)^{1/2} P(x-t, y) dt, \quad x+iy \in \mathbb{R}_+^2,$$

と置く. $u_p^{1/2} \in L^2(\mathbb{R})$ 故, 上の Hardy-Littlewood maximal function $V(x)$ 及び constant $C > 0$ があって,

$$G(x, y) \leq C \cdot V(x), \quad y > 0, \quad \text{である.} \quad \text{すなわち } V \in L^2(\mathbb{R}) \text{ である,}$$

また $G(x, R)^2 \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, である. さて,

$$2 I(r, R) \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_p(x) dx + \int_{\mathbb{R}} G(x, R)^2 + 2R^{-1} + 2(T-K)^{-1} R \int_{\mathbb{R}} u_p(x) dx, \quad T > K,$$

に於いて $T \rightarrow \infty$ とし, $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ とし, $r \in \mathbb{R}$ とし:

$$2 \int_{\mathbb{R}_+} u_p(iy) dy \leq \int_{\mathbb{R}} u_p(x) dx.$$

補題 4. $T_\Omega = \{X + iY \in \mathbb{C}^n \mid X \in \mathbb{R}^n, Y \in \Omega\}; u \in L^1(T_\Omega)$,

即ち, T_Ω 上の関数 u , $u \geq 0$, plurisubharmonic と

$$\sup_{Y \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} u(X + iY) dX < \infty$$

とすれば, $u_p(X + iY) = u(X + i\rho + iY)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \Omega$, とする. このとき, 次の式が成り立つ:

$$(4) \quad \int_{\Omega} u_p(X + iY) dY \leq 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u_p(X) dX.$$

証明. Ω には n 個の象限 $\{Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 > 0, \dots, y_n > 0\}$ 上で考えればよいから (複素型多角形を考えるとよい, [10, p. 118] の如く), 初めから Ω が象限としかく. このとき, tube 領域 T_Ω は $\mathbb{R}_+^2 \times \dots \times \mathbb{R}_+^2$ (n 個) である. $\Omega' = \{Y' = (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid y_2, \dots, y_n > 0\}$ とおけば $T_\Omega = \mathbb{R}_+^2 \times T_{\Omega'}$ と, $X + iY \in T_\Omega$ は $(x_1 + iy_1, X' + iY')$ と書ける. すると, $y_1 \in \mathbb{R}_+^2$ を固定した

とせ, $Z' \in T_{\Omega'}$ の関数 $u(z_1, Z')$ は $LH^1(T_{\Omega'})$ に属するものと
 する. $r > 0$ とし $\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_1| \leq r\} \subset \mathbb{R}_+^2$ とし,
 $\delta = \partial_m z_1 - r$ とおく. $Z' = X' + iY' \in T_{\Omega'}$ を固定すると
 $u(w, Z')$ は $w = x_1 + iy_1$ の subharmonic function
 である故,

$$\begin{aligned} u(z_1, Z') &\leq (\pi r^2)^{-1} \int_{\Delta} u(x_1 + iy_1, Z') dx_1 dy_1 \\ &\leq (\pi r^2)^{-1} \int_{\delta}^{2r+\delta} dy_1 \int_{\mathbb{R}} u(x_1 + iy_1, Z') dx_1. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(z_1, Z') dX' &\leq (\pi r^2)^{-1} \int_{\delta}^{2r+\delta} dy_1 \int_{\mathbb{R}^n} u(x_1 + iy_1, Z') dX \\ &\leq (\pi r^2)^{-1} 2r M(u, 1). \end{aligned}$$

同様に, $Z' \in T_{\Omega'}$ を固定すると $z_1 \in \mathbb{R}_+^2$ の関数 $u(z_1, Z')$
 が $LH^1(\mathbb{R}_+^2)$ に属するようになる ([10, p. 116]). さて,
 (4) が $n-1$ のとき成立することも仮定する. $n=1$ のときは
 すでに補題 3 で証明してある故, n のときを言え
 ばよい. $p' = (p_2, \dots, p_n) \in \Omega'$ とおいて,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_p(X+iY) dY &= \int_{R_+} dy_i \int_{\Omega'} u(x_1+i(\rho+y_i), X'+i(\rho'+Y')) dY' \\
&\leq 2^{-(n-1)} \int_{R^{n-1}} dX' \int_{R_+} u(x_1+i(\rho+y_i), X'+i\rho') dy_i \\
&\leq 2^{-n} \int_{R^n} u_p(X) dX.
\end{aligned}$$

定理の証明. $p=1$ としておいて十分である. $\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega$ であり, $W \in \mathbb{C}^m$ を固定して $v(Z; \varepsilon, W) = u(Z+i(\varepsilon+\Phi(W, W)), W)$, $Z=X+iY \in T\Omega$, とおく. このとき, Z の関数として $v(Z; \varepsilon, W) \in L^1 H^1(T\Omega)$ であることは [9] と同じ議論によって言える. 従って, (4) から, 任意の $\rho \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u(X+i(\rho+\varepsilon+Y+\Phi(W, W)), W) dY &\leq \\
&2^{-n} \int_{R^n} u(X+i(\rho+\varepsilon+\Phi(W, W)), W) dX
\end{aligned}$$

を得る. 両辺を dW で積分し, $\rho+\varepsilon$ が任意であることも考慮して 定理の不等式を得る.

4. その他

定理. $D=D(\Omega, \Phi)$, $u \in L^p H^p(D)$, $0 < p < \infty$, とし,

$$\psi(Y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m} u(X + iY + i\Phi(w, w), w)^p dX dw, \quad Y \in \Omega,$$

とおく. このとき, $\psi(Y)$ は Ω の順序で Y の減少関数である. 更に, ある $Y_0 \in \Omega$ で $Y \geq Y_0$, $|Y| \rightarrow \infty$, のとき $\psi(Y) \rightarrow 0$ である.

証明. 略.

さて, $H^p(D)$ の場合を考えると, Fejér-Riesz 不等式の右辺は, 境界関数の積分になる. $f \in H^p(D)$ のとき,

$$f^*(X + i\Phi(w, w), w) = \lim_{Y \rightarrow 0} f(X + iY + i\Phi(w, w), w)$$

が, a.e. $(X, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m$ に對して存在する. $f^* \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m)$ で, $f_Y \rightarrow f^*$ は L^p -収束する ([9]). この事実と上の結果を考慮して, 次のを得る:

定理. $D=D(\Omega, \Phi)$, $f \in H^p(D)$, $0 < p < \infty$, とする. 二

のとき, 任意の $X \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\int_{\Omega \times \mathbb{C}^m} |f(X + iY + i\Phi(W, W), W)|^p dY dW \leq$$

$$2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m} |f^*(X + i\Phi(W, W), W)|^p dX dW.$$

文 献

- [1] E. R. Beckenbach, On a theorem of Fejér and Riesz, *J. London Math. Soc.* 13 (1938), 82-86.
- [2] L. Fejér und J. Riesz, Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, *Math. Z.* 11 (1921), 305-314.
- [3] M. Hasumi and N. Mochizuki, Fejér-Riesz inequality for holomorphic functions of several complex variables, *Tôhoku Math. J.* 33 (1981), 493-501.
- [4] E. Hille and J. D. Tamarkin, On the absolute integrability of Fourier transforms, *Ann. Math.* 25 (1925), 329-352.

- [5] A. Korányi, The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, *Ann. of Math.* 82 (1965), 332-350.
- [6] V. I. Krylov, On functions regular in a half-plane, *Mat. Sb.* 6(48) (1939), English transl.: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 32 (1963), 37-81.
- [7] N. Modizuki, Inequalities of Pejer-Riesz type for holomorphic functions on certain product domains, *Tohoku Math. J.* 34 (1982), 367-372.
- [8] A. Nagel, W. Rudin, and J. Shapiro, Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces, *Ann. of Math.* 116 (1982), 331-360.
- [9] E. M. Stein, Note on the boundary values of holomorphic functions, *Ann. of Math.* 82 (1965), 351-353.
- [10] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

(LXV)