

相対的 Hodge 分解

東大教養, 藤原大輔

§1 序

$m+n$ 次元で, コンパクトで, 向きづけられたリーマン空間を X とす。 X 上の p 次微分型式全体の空間を $\Omega^p(X)$ と書く。 Hodge の有名な定理によると, p 次の de Rham のコホモロジー群 ~~群~~ $H^p(X)$ の各コホモロジー類は, X 上で調和な p 次微分型式で, 一意的に代表される。

X の中に, m 次元の向きづけられた部分多様体 Y があるとき, 相対コホモロジー群 $H^p(X, Y)$ が出来るが, 上の Hodge の定理の真似をして, $H^p(X, Y)$ の各コホモロジー類を代表する微分形式 (あるいはカレント) として, 特別の函数方程式を満たすものと一意に定めるのは可能だろうか? という問題を考えてみたい。

Y 上の p 次の微分型式の全体を $\Omega^p(Y)$ と書く。 すると, 複体の完全列

$$0 \rightarrow \Omega^*(X, Y) \rightarrow \Omega^*(X) \xrightarrow{\iota} \Omega^*(Y) \rightarrow 0$$

がある。 ι は制限写像である。 として 相対 cohomology

群 $H^*(X, Y)$ は、複体 $\Omega^*(X, Y)$ のコホモロジーであった。

上の完全列から、次の基本的な、長い完全列を得る。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 &\longrightarrow H^0(X, Y) \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow H^1(X, Y) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow H^1(Y) \longrightarrow \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\longrightarrow H^p(X, Y) \longrightarrow H^p(X) \longrightarrow H^p(Y) \longrightarrow \\
 &\quad \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

我々が、 $H^p(X, Y)$ を代表するカレントを定めようというとき、自然な要請として、それは、上の長い完全列 (1) に自然な意味をもたせるものでなければならぬ。

そこで、一足と茲に、筆者の得た結論を述べてみよう。

(A) $H^p(X, Y)$ の各コホモロジー類は、 X 上のカレント α であって、 $X-Y$ 上で poly-harmonic. 即ち

$$\Delta^{a+1} \alpha = 0.$$

で、 Y においてある境界条件をみたすものによって完全に代表される。ここで Δ は通常の de Rham-Laplace 作用素で、 a は $\frac{n}{2}$ の整数部、即ち $a = [\frac{n}{2}]$.

この境界条件が、(1) における $H^{p-1}(Y) \rightarrow H^p(X, Y) \rightarrow H^p(X)$ という部分の完全性を与える。

なお、(A) のもっと詳しい説明は後段で説明する。

(B) $H^p(X, Y)$ の各コホモロジー類はまた, X 上のカル
 ント β で, $X-Y$ 上 調和. 即ち

$$\Delta \beta = 0 \quad \text{on } X-Y$$

で Y 上に特異性をもつものでも代表し得る。

(A), (B) の各事項については後段の節により詳しく
 論ずるが, ここでは一時的に注意を書く。それは,
 部分多様体 Y のコホモロジー $H^p(Y)$ の各コホモロジー類の代
 表元として, Hodge のように Y 上の調和微分形式をとることは,
 長い完全列 (1) との関係からは, 適切であり, 正しいこと
 である。 ~~■~~ 長い完全列 (1) が成立すること重視して
 $H^p(Y)$ の代表元を選ぶと, $H^p(Y)$ の各コホモロジー類の代
 表元としては, Y 上の p -微分形式で, Y 上 $2p$ 階の楕円型方程式
 $L\alpha = 0$ をみたすようなもの α をとるべきである。
 ここで L という微分^(複素)作用素は, Y 上の Laplace-de Rham
 作用素と同じ主部をもつ楕円型作用素だが, L の具体的形は
 Y によって異なり, また L は微分作用素ではない。一般に
 は, 部分多様体 Y は X の中で歪んでおりわけだから, これは
 むしろ当然のことであろう。

§2 Hilbert空間の導入. 直交射影法.

$\mathcal{D}^p(X, Y)$ に次のような内積 $[,]$ を定義する.

$$(2.1) \quad [\alpha, \beta] = (\Delta_0^{\frac{p}{2}} \alpha, \Delta_0^{\frac{p}{2}} \beta) + (H_0 \alpha, H_0 \beta).$$

但し, $(,)$ は微分形式の通常の L^2 内積. Δ_0 は X 上の通常の Laplace-de Rham 作用素, $H_0 \alpha$ は微分形式 α の調和部分. この内積 $[,]$ で $\mathcal{D}^p(X, Y)$ を完備にして, Hilbert空間 $W_a^p(X)$ を作る. これは, 実は L^2 の意味で a 回微分可能な p 次カレント全体の作るソボレフ空間である. 一般に, a 回 L^2 微分可能な p 次カレントの作るソボレフ空間を $W_a^p(X)$ と書くことにする.

$W_a^p(X)$ において外微分演算 d を定義し, その定義域を $D(d)$ とす. その adjoint を d^* とし, 定義域を $D(d^*)$ と書く.

$D(d) \cap D(d^*)$ を決定するため, まず, $D(d^*)$ をみる.

定理 2.1

$W_a^{p+1}(X)$ のカレント α が, $D(d^*)$ に入る必要十分条件は $W_a^p(X)$ のカレント γ と, Y 上のカレント $T \in W_{-a-1+\frac{m}{2}}^p(Y)$ が存在して,

$$(2.2) \quad \delta_0 \alpha - \gamma = G_0^a(T \otimes \delta_Y) + H_0(T \otimes \delta_Y).$$

が成立すること. このとき $d^* \alpha = \gamma$. そして

$$\delta' T \in W_{-a-1+\frac{m}{2}}^{p-1}(Y).$$

ここで, δ_0 は通常調和積分論に出て来る δ -作用素.
 G_0 は Δ_0 に対するグリーン作用素. (cf. [1]).
 δ' は Y 上の δ -作用素. また Y 上のカレント T に対し,
 $T \otimes \delta_Y$ は 次のように定義される X 上のカレント.

$\varphi \in p$ -form として

$$\langle \varphi, T \otimes \delta_Y \rangle = \int_Y \varphi|_Y \wedge *'T.$$

但し $*'$ は Y 上の metric に関する $*$ 作用素。

次に 空間

$$(2.3) \quad \dot{V}^{p-1} = \{ G_0^{a+1}(T \otimes \delta_Y) \mid T \in W_{-a-1+\frac{n}{2}}^p(Y), \delta' T \in W_{-a-1+\frac{n}{2}}^{p-1}(Y) \}$$

を導入しよう. すると

定理 2.2

次のベクトル空間の系列は, 完全列である。

$$(2.4) \quad 0 \longrightarrow D(d) \cap D(d^*) \longrightarrow W_{a+1}^p(X) + d_0 V^{p-1} \xrightarrow{\quad \delta \quad} W_{a+1-\frac{n}{2}}^p(X) \longrightarrow 0$$

δ は制限写像。

従って $\alpha \in D(d) \cap D(d^*)$ かつ $\alpha \neq 0$ ならば $\alpha|_Y = 0$ である。

さて一般化された Laplacian, $L = dd^* + d^*d$ を導入し, p -次元からなる L の kernel を $\text{Ker}^p L$ と書く。Weyl の直交射影の方法と、定理 2.2 を使うと、five-lemma を使って、

定理 2.3

$$\text{Ker}^p L \cong H^p(X, Y).$$

§3 主定理

定理 2.3 によれば, $\text{Ker } L$ を具体的に書き出せば, 我々の仕事は終ることになる.

そのために, Y 上のカレントに依り, 擬微分作用素 P と Q と 下式で定義する.

$$(3.1) \quad P : T \longrightarrow G_0^{q+1}(T \otimes \delta_Y) |_Y$$

$$(3.2) \quad Q : T \longrightarrow H_0(T \otimes \delta_Y) |_Y.$$

あきらかに Q は ~~finite~~ of finite rank. また

命題 3.1

P は Y 上 $L^2(Y)$ の意味で, 自己共役で > 0 , 可逆な楕円型作用素, 位数 $-2q-2+n$.

よって P は微分作用素でない。

さて

$$(3.3) \quad \delta'_1 = P \delta'_1 P^{-1}$$

$$(3.4) \quad \pi = Q P^{-1}$$

を定義する。

定理 3.2

方程式 $L\alpha = (dd^* + d^*d)\alpha = f$ は次の方程式系と同値, 但し S, T は Y 上のカレント.

$$(3.5) \begin{cases} f = \Delta_0 \alpha - d_0 G_0^a (S \otimes \delta_Y) - G_0^a (T \otimes \delta_Y) - H_0 (T \otimes \delta_Y) \\ (G_0 f)|_Y = -(H_0 \alpha)|_Y - d' P S - P T \\ (\delta_0 G_0 f)|_Y = \pi P S + d' \delta'_1 P S - \delta'_1 P T. \end{cases}$$

但し d' は Y 上のカレントに依る外微分作用素。

従って $e < 1$ に

定理 3.3

$\alpha \in \text{Ker}^p L$ なる必要十分条件は、
 Y 上のカレント S が存在して、

$$(3.6) \begin{cases} \Delta_0 \alpha = d_0 G_0^a (S \otimes \delta_Y) \\ 0 = (H_0 \alpha)|_Y + d' P S \\ 0 = d' \delta'_1 P S \\ 0 = \pi P S \end{cases}$$

が成立するものである。

定理 2.3 と考えあわせて、§1 の主張 (A) も次の形で得る。

定理 3.4

$H^p(X, Y)$ のエホロビークー類は (3.6) をみたす
カレント α によって一意的に代表される。

注意 3.5 $W_a^p(X)$ の各カレント α は $X-Y$ 上の
カレント γ と次式によって同一視される。

$$\gamma = (\Delta_0^a \alpha + H_0 \alpha)|_{X-Y}.$$

いま α として定理 3.4 の α をとると、 γ は

$$\Delta_0 \gamma = 0 \quad \text{on } X-Y.$$

$$|\gamma(x)| = O(r^{1-n}) \quad \text{をみたす。}$$

但し r は $x \in X-Y$ から Y までの距離。

従って §1 の主張 (B) を得た。

ところで、定理 3.4 で得た結論で、長い完全列
(1) を説明するには 次のことに注意する。

P は Y 上可逆な作用素だから Y 上のカレント
中に、内積 $\langle, \rangle$ を

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_Y P^{-1} \alpha \wedge * \beta$$

によって定義する。通常調和積分論で行う計
論と、上の内積をつかって行うと。

定理 3.6

Y の de-Rham 2-形式コホモロジー群 $H^p(Y)$ は
 Y 上のカレント (p 次) で

$$(d'\delta' + \delta'd')T = 0$$

をみたすもの全体と同型。

長い完全列で $H^p(Y)$ を定理 3.6 によって解釈すると、定理 3.4 と 3.3 が、長い完全列 (1) に自然な解釈を与えては極く見易い。

文献.

- L (1) De De Rham, Variete differentiables, Hermann, 1955.
- (2) Kodaira, K, Harmonic d fields in Riemannian manifolds.
Ann. Math. vol 50 (1949) pp. 587-665.
- (3) Weyl, H. The method of orthogonal projection in potential theory, Duke mathematical journal vol 7. pp. 411-444. (1940).

ここで一般化された Laplacian $L = dd^* + d^*d$ を導入して、 p 次カレントからなる L の kernel を $\text{Ker}^p L$ と書くことにする。Weyl-小平の直交分解定理 (cf []) ~~と~~ 定理 2.2 を使って

定理 2.3

$$\text{Ker}^p L \cong H^p(X, Y).$$

さて、 $\text{Ker}^p L$ を具体的に書き出そう。そのために Y 上のカレントに働く擬微分作用素 P を次式で定義する。

$$(2.5) \quad P: T \longrightarrow G_0^{a+1}(T \otimes \delta_Y)|_Y.$$

あると。

命題 2.4

P は self-adjoint > 0 で可逆な楕円型作用素で位数は $-2a - 2 + n$.

これを使って、

$$(2.6) \quad \delta'_1 = P \delta' P^{-1}.$$

$$(2.7) \quad \pi = Q P^{-1}$$

と置く。但し Q とは Y 上のカレントに働く作用素で

$$(2.8) \quad Q: S \longrightarrow H_0(\delta \otimes \delta_Y)|_Y.$$