

非可逆循環 (Irreversible circulation) に関する二三の問題

京大・理 富田和久

我々の研究室での最近の仕事として 1) 非可逆循環と統計力学的波動関数, 2) 振動の post-critical behaviour 3) Dephased limit cycle を導く変分原理, 4) Saturable absorption と Laser の Undamped Spiking 等をあげることができるが, ここでは, 主として 1), 2) について簡単な報告を行なう。

§ 1. Irreversible Circulation and Statistical Wave Function

閉じた系の熱平衡近傍においては, 詳細釣り合が存在することに基づいて, 揺動の分散 (variance), すなわち時間的 1 点情報がわかれば, それだけで系の動的振舞が予測できるという特殊事情があるが, intrinsic な開放系の熱平衡から遠い状態の場合は, 揺動の動的振舞を推測するには, 分散に加えて, 本質的に時間の 2 点に関係した情報をあらかじめ知っている必要がある。この様な見地から我々は, 開放系特有の 2 点情報量として揺動の循環 (circulation) なる量を用いる提案を行った。^{①②③}

分散と循環とがどちらも不可欠の情報であるとすれば, これを合せて含む 1 つの量が定義されれば, それだけ見通しがよくなると考えられる。そこで, ここではその一つの試みとして, 確率密度に関連した統計的波動関数 (複素確率振巾) を導入する。すなわち分布関数 $P(\eta, t)$ に対して,

$$P(\eta, t) \equiv \Psi^*(\eta, t) \Psi(\eta, t), \quad (1)$$

$$\Psi(\eta, t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} c(t) + \mathcal{Q} \chi(\eta, t) \right\}, \quad (2)$$

$$\chi(\eta, t) = \phi(\eta, t) + i\psi(\eta, t) \quad (3)$$

によって, 統計的波動関数 $\Psi(\eta, t)$ を導入すれば, 時間的 1 点情報である $P(\eta, t)$ によっては一意的に表現することの出来ない循環を $\chi(\eta, t) \equiv \ln \Psi(\eta, t)$ の imaginary part に直接関連づけることが出来る。この場合確率密度は統計的波動関数 $\Psi(\eta, t)$

の振巾によって表現され

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \dot{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4)$$

なる方程式に従って変化し、循環は統計的波動関数の位相に関連づけられ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\dot{\sigma} - 2\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (5)$$

なる方程式に従って変化する。特に steady state の場合には、 ψ は分布の等高線の方
向に向って流れていく性質をもつ。この事情は、磁場の下における Larmor precession と
よく似ているが、開放系における非可逆性の表現として特徴的な事実は、“磁場に相当
する量”の反転が許されないことである。

§ 2. Post-critical behaviour of fluctuation**

非線型自律系としての系の永年運動 (secular motion) を解くことは、post-critical
な領域ではそれ自体が一つの問題であり、reductive perturbation の応用がすで
に報告されているが、次にこの答がえられている場合には、揺動に注目して線型非自律
系としての分散 (variance) を解くことは、必ずしも難しくない。すなわち、con-
trollable parameter p によって表現した臨界点からのずれ $\epsilon \equiv \frac{p - p_c}{p_c}$ が小さいとし
て、内部矛盾を含まない摂動展開を行えば、次のような結果をうる事が出来る。

今本質的特徴を失わぬ範囲で一番簡単な 2 自由度系 (x_1, x_2) を考え、これが永年運
動 $\underline{y}(t)$ と揺動 $\underline{\eta} \equiv \sqrt{D} \underline{\xi}$ の和として表わされるとする。このとき秩序相は

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{C}_1(\underline{y}(t))$$

なる運動方程式に従うが、臨界点の ϵ 近傍であるという事実を用いて展開すれば、秩
序パラメーターとしての角運動量 $\underline{A} \equiv \frac{1}{2} [\underline{y}(t), \dot{\underline{y}}(t)]$ は regression matrix $\underline{K} \equiv \frac{\partial \underline{C}_1(\underline{y})}{\partial \underline{y}}$
を用いて

$$\underline{A} \simeq - \frac{\epsilon^2 r_1^2}{2} \frac{\Delta_0}{K_{12}^{(0)}}$$

のごとく書かれる。ここに $\Delta \equiv \det \underline{K}$, K_{12} は行列 $\underline{K}$ の (1, 2) 成分を表わし、添字 0 は ϵ
展開の最低次 (0 次) の項を意味している。また、軌道の半径は ϵr_1 で与えられるとし

富田和久

ている。次に揺動を論ずる。この場合は、 $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (r, s)$ によって軌道に上の方角 r と $\parallel$ の方向 s とに座標をえらびかえるのが便利である。この座標系における分散 σ'_{rr} は

$$\sigma'_{rr}(t) \simeq \frac{C_{rr}}{\epsilon^2 [\dot{y}(t)]^2} ;$$

で与えられ、ここに

$$C_{rr} \simeq \frac{1}{2 t_r K^{(2)}} \overline{[\dot{y}(t)]^2 D_{rr}^{(0)}(t)}$$

ただし、 D は dephasing の行列、 $\overline{Q} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt$ ($T=1$ 周期)

1 周期 T にわたっての時間平均をあらわす。 σ'_{rr} 自体の 1 周期平均は

$$\overline{\sigma'_{rr}} \simeq \frac{C_{rr}}{\epsilon^2} \frac{K_{12}^{(0)}}{\Delta_0^{3/2}}$$

で与えられる。

同様にして

$$\sigma'_{rs}(t) \simeq \frac{C_{rr}}{\epsilon^2 r_1^2} \left\{ C_{rs} - \left(\frac{K_{12}^{(0)}}{\Delta_0^2} \right) K_{ss}^{(0)}(t) \right\}$$

がえられ、両者を組合せることによって、残留循環 α' は

$$\overline{\alpha'} = - \frac{C_{rr}}{\epsilon^2 r_1^2} \frac{K_{12}^{(0)}}{\Delta_0} \left(1 + \frac{K_{21}^{(0)} - K_{12}^{(0)}}{2 \Delta_0^{1/2}} \right)$$

となる。従って

$$\overline{\alpha'} \cdot \overline{A} \simeq - \frac{1}{4 \Delta_0} \overline{\dot{y}(t)^2 D_{rr}^{(0)}(t)} (2 \Delta_0^{1/2} + K_{21}^{(0)} - K_{12}^{(0)})$$

なる関係がえられる。これは $\overline{\alpha'}$ と $\overline{A}$ とが系の循環をあらわすという意味で元来同性質の量であり、臨界点においてその役割を交代することを示している。

なお、揺ぎの計算に対しても reductive perturbation の方法を適用して、系統的に論ずることが出来るが、これについては研究室の増山君が続いて報告する。

参 考 文 献

- 1) K. Tomita and H. Tomita, Physics Letters **46A**, 265 (1973) ; Progr. Theor. Phys. **51**,

1931 (1974).

- 2) K. Tomita, T. Ohta and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. **52**, 737 (1974).
- 3) K. Tomita, T. Ohta and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. **52**, (1974).

附記：§ 1 については北原和夫君，§ 2 については太田隆夫君の寄与が大きい。

Reductive Perturbation による「揺ぎ」の計算

京大・理* 増山博行

Kuramoto - Tsuzuki によって化学反応モデルに reductive perturbation が応用された。この方法で転移点近傍の「揺ぎ」が系統的に求まる。すなわち，ある外部変数 P が臨界値 P_c を越えると，secular motion $\mathbf{y}$ が一様状態の branch から，時間的もしくは空間的振動が除々に成長していく場合， $\mathbf{y}$ は ε の巾で展開される。($\varepsilon^2 = \frac{P-P_c}{P_c}$) そして $0(\varepsilon)$ の項の振巾 W は TDGL 型方程式の解として与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial T} W = \left(\alpha + \delta \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right) W - \beta W^2 W^*$$

ここで， $T = \varepsilon^2 t$, $R = \varepsilon r$ 。 $\mathbf{y}$ が分ると，「揺ぎ」 σ を与える方程式に，reductive perturbation を施すことによって， $\sigma = \varepsilon^{-2} (\xi + 0(\varepsilon))$ の形で σ が求まる。PLN モデルで具体的に計算した結果は，hard mode insta の場合既に求められている数値計算値とよく合っている。

soft mode insta. の場合も計算した。詳細は別の機会に発表の予定。