

有限射影空間と $PSL(n, q)$

の特徴づけ

北大 理学部 都筑 俊郎

§ 1. 話をしようと思うこと.

K を q 個の元からなる有限体とし, $SL_n(q)$ で K の元を成分とする $(n \geq 3)$ 次の行列で行列式が 1 のものの作る群を表わし, $PSL_n(q)$ で $SL_n(q)$ をその中心で割った群を表わす.

よく知られているように,

- 1) $PSL_n(q)$ は非可換単純群であり,
- 2) $PSL_n(q)$ は K 上の $n-1$ 次元 (有限) 射影空間 $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ に自然に作用し, $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の (或いは $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ を適当なデザイシと考へたとき) 自己同型群は $PSL_n(q)$ の solvable な拡大である. (このとき $PSL_n(q)$ を -1 の essential part とよぶことにする.)

$PSL_n(q)$ は Chevalley (or Lie type の) 群として A -型の有限単純群とよばれるものであるが, 有限単純群をすべて決定すること (いわゆる単純群の分類問題), もっと一般に

群のある性質をあたえたとき、その性質を満足する群を具体的に構成・表現することは現在の有限群論における中心課題である。 $\text{PSL}_n(q)$, $n \geq 3$, をあたえたとすれば

$\Pi_{n-1}(q)$ が構成され、 $\text{PSL}_n(q)$ はその自己同型群(の essential part)として把握されるが、この過程で我々の興味をひくのは、

3) $\text{PSL}_n(q)$ のどのような性質が $\Pi_{n-1}(q)$ を構成するのに本質的であるか、

4) $\text{PSL}_n(q)$ のどのような性質が $\overbrace{\Pi_{n-1}(q)}^{\text{自己同型群の essential part}}$ とするに本質的であるか、

という問題である。

一般に有限集合 Ω とその部分集合の family $\mathcal{L}$ をあたえて出来る incidence system を“有限幾何”とよぶことにする。(例としては上例の $\Pi_{n-1}(q)$)。有限幾何 Δ の incidence をたもつ 1:1 変換の全体をつくる群を Δ の自己同型群とよぶことにすると、上例 $\text{PSL}_n(q)$ の場合と同様に多くの重要な群は適当な有限幾何の自己同型群(の essential part) としてつかまえることが出来る。従って上にのべた問題は次のように一般化して考えられる。一つの群 G とそれに附随する有限幾何 Δ を考えると、

5) G のどのような性質が Δ の構成に本質的であるか?

6) G のどのような性質が Δ の自己同型群の essential part (を含む) となることに本質的であるか?

例えは "BN part" をもつ群と "Building" に関する J. Tits の理論はこの方向に今までに得られている最大の結果であるが、その他に、個々の群について直接デザインに関係する形での問題が存在する。こゝでは $PSL_n(q)$ とそれに附随する有限幾何についてこの方向に得られている結果と方法を紹介する。以下言葉づかいは Dembowski "Finite Geometry" に従うものとする。

§2 問題をもう少し具体的に設定すれば、

$\mathbb{P}_{n-1}(q)$ からいくつかの incidence system を考へることが出来る。例えは、

1) $\Omega = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の点の全体, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の 1 次元 subspace の全体。このとき $|\Omega| = q^n - 1 / q - 1$, $|\mathcal{L}| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) / (q - 1)(q^2 - 1)$.

2) $\Omega =$ 上と同じ, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の $n-2$ 次元 subspace の全体。このとき $|\mathcal{L}| = (q^n - 1) / q - 1$.

3) $\Omega =$ 上と同じ, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の r 次元 subspace の全体。
こゝに $2 \leq r$, $|\mathcal{L}| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-r+1} - 1) / (q - 1)(q^2 - 1) \cdots (q^{r+1} - 1)$.

更に一般に
4) $\Omega = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の r 次元 subspace の全体, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の s 次元 subspace の全体。こゝに $r < s$.

$\text{PSL}_n(q)$ はこれらの incidence system の自己同型群 (の subgroup) と考へられるが、

1) いずれの場合にも $\Omega, \mathcal{L}$ 上にそれぞれ transitive に作用する、が更に

2) 1) ~ 3) の場合は Ω 上に 2重 transitive に作用し、
2) の場合には $\mathcal{L}$ 上に 2重 transitive に作用している、
といった性質をもっている。

さて有限群 G が $\text{PSL}_n(q)$ に一致する (又は essential part としてふくむ) ということを証明しようとするとき、問題は次のように細分される。

問題(1). G を自己同型群としてもつようない incidence system を構成出来るための条件は?

問題(2). 一般に (又は問題(1) でつくられた) incidence system $\Delta = (\Omega, \mathcal{L})$ が $\text{PSL}_n(q)$ から得られる incidence system と一致するための条件は?

問題(3). $\text{PSL}_n(q)$ の自己同型群 G が与えられたとき、それが $\text{PSL}_n(q)$ をふくむための条件は?

§3 知られている結果・予想など

以下例えは 結果(2.*) とかくときは、§2 の問題(2) に関連した結果 という 意味である。 また 1961 年 A. Wagner

によって propose された次の問題は有名である。 ([9])

問題 (3.1) G が $\Pi_{n-1}(q)$ の $\overbrace{\text{真の全体}}^{\text{全体}}$ 上に 2 重 transitive

$$\implies G \supseteq \text{PSL}_n(q) \quad ?$$

これについては 1 つの反例を除いて成立つように予想されている。 今までに得られている結果は、

結果 (3.1) $3 \leq n \leq 9$

$$\implies G \supseteq \text{PSL}_n(q), \text{ また}$$

$$n=4, q=2, G=A_7$$

$3 \leq n \leq 5$ の場合は A. Wagner - Ostrom ([5])

$n=6, 7$ は D. G. Higman (unpublished, [4] 参照)

$n=8, 9$ は M. Kantor ([4])

類似の問題として、

問題 (3.2) G が $\Pi_{n-1}(q)$ の r 次元 ($r \geq 1$) subspace 全体の集合の上に transitive

$$\implies G = ?$$

問題 (3.1) は問題 (2) の場合に自然に拡張される。

問題 (2.1) $D=(\Omega, \mathcal{L})$ を projective design (パラメータ: v, k, λ) とし, $G \leq \text{Aut } D$ が Ω 上に 2 重 transitive に作用している

$$\implies D, G \text{ の構造は如何?}$$

結果 (2.1) M. Kantor [4] D の parameter $v = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$k = q^{n-1}/q-1, \lambda = q^{n-2}/q-1 \Rightarrow D = \mathbb{P}_{n-1}(q).$$

$\mathbb{P}_{n-2}(q)$ の subspace の列 $S_0, S_1, \dots, S_{n-2}$ (S_i は i -次元 subspace) を nest と呼ぶ。

結果 (3.2 D G Higman [2]) G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の nest 全体への集合として transitive

$$\Rightarrow (n, q) = (3, 2), (3, 8), (4, 2) \text{ の場合を除く}$$

$$G \geq \text{PSL}_n(q)$$

つまり $D = (\Omega, \mathcal{L})$ の直線 ℓ (ただし ℓ は 2 点 $x, y \in \Omega$ を通る直線) を $\ell = \bigcap_{x, y \in \ell} B$ と定義すると

結果 (2.2 Dembowski-Wagner [1]) D のパラメータ b, r, k, λ とすると 2, 次の条件は同値。

1) $D = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の点と hyperplane のつくるデザイン

2) 任意の直線 ℓ と任意の $B \in \mathcal{L}$ に対して $\ell \cap B \neq \emptyset$

3) 任意の直線 ℓ に対して $|\ell| = b - \lambda / r - \lambda$

結果 (3.3 Perin [7]) G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の i -次元 $\mathcal{L}$ subspace 全体への集合として transitive に作用, $(n, q) \neq (even, 2)$

$$\Rightarrow G \geq \text{PSL}_n(q)$$

結果 (1.1 N. Ito [3]) $G = (G, \Omega)$ は集合 Ω 上の 2 重 transitive 置換群, $G \geq H$ such that $[G:H] = |\Omega|$ かつ $H \neq G_v (= \{g \in G \mid g \cdot v = v\})$ for $v \in \Omega$

$\Omega \supset \exists B$ such that B is H 's orbit (i.e. $B \ni i \mapsto \bar{i}$ and $B = \{i^H \mid i \in H\}$) and H is B -faithful and

$\Rightarrow \exists n, \exists q$ such that G is $\mathbb{P}_{n-1}(q)$'s self-similar group and $G \geq \text{PSL}_n(q)$

結果 (1.2 M. O'Nan [6]) $(G, \Omega) = 2$ -transitive permutation group, $\Omega \ni i \mapsto \bar{i}$ and G_i is abelian normal subgroup A and $\Omega - \{i\}$ is semi-regular and

$\Rightarrow \exists n, \exists q$ such that G is $\mathbb{P}_{n-1}(q)$'s self-similar group and $G \geq \text{PSL}_n(q)$

結果 (1.3 T. Tsuzuku [8]) $(G, \Omega) = 2$ -transitive permutation group, $|\Omega| = 1 + p + p^2$, p is prime, $|G| \equiv 0 \pmod{p^3}$, $\not\equiv 0 \pmod{p^4}$

$\Rightarrow G$ is $\mathbb{P}_2(p)$'s self-similar group and $G \geq \text{PSL}_3(p)$.

or $G = A_7$.

結果 (1.4 T. Tsuzuku [8]) $(G, \Omega) = 2$ -transitive permutation group, $|\Omega| = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $q = \text{prime } p$ or $\underbrace{p^2}_{n \geq 3}$, G 's Sylow p -subgroup is P and $(P, \Omega) \cong (\tilde{P}, \mathbb{P}_{n-1}(q))$
 $\Rightarrow \text{PSL}_n(q)$'s Sylow p -subgroup is $\tilde{P}$

$\Rightarrow G$ is $\mathbb{P}_{n-1}(q)$'s self-similar group and $G \geq \text{PSL}_n(q)$

or $G = A_7$.

以上をほかに勿論いくつかの結果は存在するが(たとえば;
 G が Γ 上の automorphism として特別に述べられてゐる,
 以上の条件からの結果など), それらについては 下記文献
 のほか,

Dembowski: Finite Geometry, Springer

を挙げてたい。

- [1] Dembowski-Wagner, Arch. Math. 11 ¹⁹⁶⁰ (465-469)
- [2] D. G. Higman, Ill. J. Math. 6, 1962 (434-446)
- [3] N. Ito, Arch. Math. 18, 1967 (564-570)
- [4] M. Kantor, Math. Zeit. 122, 1971 (61-62)
- [4] " , On 2-transitive collineation groups... (to appear)
- [4'] " , Line-transitive collineation groups... (to appear)
- [5] Császár-Wagner, Math. Z. 71, 1959 (186-194)
- [6] M. O'Nan, Math. Z. 127, 1972 (301-314)
- [7] Perin, Math. Z. 126, 1972 (135-142)
- [8] Suzuki, J. Algebra. 8, 1968 (143-147)
- [8'] " , (to appear)
- [9] Wagner, Math. Z. 76, 1961 (411-426)