

リズム現象の数理: 縮約理論によるアプローチ

蔵本由紀

概要

非平衡散逸系が自発的に生み出すリズムは、軌道の漸近安定性をもつリミットサイクル振動子によって記述される。単一のリミットサイクル振動子はそれ自身すでに解析的記述が一般に不可能な非線形システムである。したがって、リミットサイクル振動子の集団やネットワークの挙動を明らかにすることは途方もなく困難な数学的問題と考えられ、ごく近年までその研究はほとんどお手あげの状態だった。しかし、縮約理論を突破口として長い不毛の時代は終り、今や活気に満ちた新しい時代に入っている。他方、生命科学の飛躍的進歩とともに次々に明らかにされる新事実によって、生命過程におけるリズム間の同期・非同期という現象の重要性はますます疑いようのないものとなってきた。そして、文字どおりの生き物のみならず、あたかも生けるがごとく躍動する多くの自然現象においても、リズムと同期の機構がその根底にあることが広く認められつつある。

この講義では、リズム現象の理論的基礎である二大縮約法、すなわち中心多様体縮約法と位相縮約法についてまず概観する。次いで2振動子間の結合様式の基本タイプについて述べ、振動子集合体のダイナミクスの考察へと進む。結合距離の変化によって振動場はさまざまな様相を見せ、またランダムネスの導入は思いがけない効果をもたらす。このように、振動子集団の挙動は状況に応じてきわめて多彩である。講義ではさまざまな具体例を織り交ぜながら、結合振動子系の多彩な挙動を理解する上で縮約理論がどのように有効に用いられるかを平易に述べたい。ただし、本稿ではページ数の制約もあって応用例については多くを割愛せざるをえず、理論の大筋を述べることにとどめた。

1 リズムの発生

リミットサイクル振動子は、通常 n (≥ 2) 次元の実ベクトル X に対する非線形散逸力学モデル

$$\dot{X} = F(X) \quad (1.1)$$

で記述される。Van der Pol 振動子や、神経振動子のモデルとしてよく知られた FitzHugh-Nagumo のモデル

$$\dot{X} = \epsilon^{-1}(X - X^3 - Y), \quad (1.2)$$

$$\dot{Y} = aX + b \quad (1.3)$$

はその代表的なものである。ただし、振動解をもつためにはパラメタはしかるべき条件をみたさなければならない。上の例に限らず、リミットサイクル振動解を解析的に求めることは一般に不可能であり、結合振動子系となると数学的困難はなおさら大きい。この事実が非平衡散逸系におけるリズム現象の科学の発展を大きく阻んできた。近年、この困難は二つの面から克服されつつある。一つは計算機の発達であり、もう一つは漸近的方法（摂動法）の発展である。本稿では後者をとりあげる。

非線形系に対する摂動法としては、発展方程式の解ではなく方程式そのものに対する摂動法が有効である。そのような摂動理論を縮約理論と呼んでいる。解に対する摂動論では、複雑な現象はどうも議論できない。どのような解が存在するかわからないような運動方程式をまるごと縮約することが必須である。

リミットサイクル振動子系に対する縮約理論として二つのものがある。それは中心多様体縮約法と位相縮約法である [1]。前者は、振動の発生点近傍における小振幅の振動が一般に単純で普遍的な発展則をもつことに着目した理論である。後者はリミットサイクル振動を位相変数のみで近似的に記述しようとする理論である [2]。本講義では、近年その有効性がますます認められ、応用範囲も急速に拡大している位相縮約法を中心に述べる。しかし、中心多様体縮約法も非常に重要なのでそれについてまずいくつかのポイントを述べておきたい。

1.1 単一振動子の縮約

(1.1) 式の F はパラメタ μ を含むとして、同式を $\dot{X} = F(X, \mu)$ と書き、その定常解を常に $X = 0$ ととる。この解のまわりで (1.1) 式を線形化したものを $\dot{X} = L_\mu X$ と書く。定常解の安定性は $n \times n$ ヤコビ行列 L_μ の固有値で決まる。すなわち、正の実部をもつ固有値が一つでもあれば不安定、そうでなければ安定である。振動の発生は、 μ の変化とともに一対の複素共役な固有値の実部が負から正に変わることによって定常解が不安定化するとき起こる。その臨界点を $\mu = 0$ とする。振動解の発生はホップ分岐とよばれる。ホップ分岐点 $\mu = 0$ の近傍で (1.1) 式を

$$\dot{X} = L_0 X + \mu L_1 X + N_2(X, X) + N_3(X, X, X) \quad (1.4)$$

の形に表そう。ここで線形項は臨界点におけるそれ（すなわち $L_0 X$ ）とそこからの微小なずれ $\mu L_1 X$ に分けられている。また、 N_2, N_3 は $F(X)$ を X でテーラー展開したときの2次および3次の非線形項を表す。 μ や X について上記以上の高次項は重要でないの以下では考えない。 $N_2(X, Y)$ は X と Y の交換について対称であり、それぞれの引数について $N_2(aX, Y) = aN_2(X, Y)$ のように線形関係をみたす。 N_3 についても同様の対称性と線形性をもつとする。

ちょうど分岐点における線形化方程式 $\dot{X} = L_0 X$ を非摂動系とみなし、それ以外の効果、すなわち (1.4) 式右辺の第二項以下をすべて微小な摂動項とみなす、というのがホップ分岐点近傍における縮約の基本的考え方である。 L_0 は一対の純虚数の固有値 $\pm i\omega_0$ をもち、他のすべての固有値の実部は負である。したがって、非摂動系では純虚数の固有値をもつ臨界固有ベクトル成分以外の振幅は時間とともにゼロに減衰し、 X の長時間振る舞いを X_0 で表すと X_0 は

$$X_0 = z \exp(i\theta)U + \bar{z} \exp(-i\theta)\bar{U} \quad (1.5)$$

となる。ここに、 $\theta = \omega_0 t$ 、 U は L_0 の臨界固有ベクトル、 z は任意の複素振幅である。またバーは複素共役を表す。(1.5) 式は臨界固有面における調和振動子を表し、中立解と呼ばれる。

縮約理論においては、摂動を受けた中立解とその時間発展を次の形に表現する。

$$X = X_0 + \rho(z, \bar{z}, \theta), \quad (1.6)$$

$$\dot{z} = G(z, \bar{z}). \quad (1.7)$$

ρ と G が未知量（ともに微小）であり、(1.7) がいわゆる縮約方程式である。このように、中立解にあらわれる任意パラメタ（今の場合は z ）をゆっくりと変動する変数と見直し、摂動によるその時間発展を見出すのが縮約法に共通する考え方である。中立解の関数形自体も摂動によって変化し、それが上式では ρ で表されている。そして G と ρ は互いに影響しあっている。 $\rho = 0$ なら、系の時間発展は2次元臨界固有面 M_0 の上で進行するが、 ρ が微小ながら有限であるために実際の時間発展はこの面からややずれた曲面 M の上で進行する。 M_0 を中心多様体と呼ぶ。この縮約法の名称はそこから来ている。

z の時間発展を表す G には θ が含まれていないこと、すなわち、時間があらわに含まれていないことに注意されたい。これは実際にそうなるという「事実」を表しているのではなく、我々の側の「要請」である。このような要請がなぜ可能かというと、 M の上にはあらかじめ座標系が定義されているわけではないからである。 z のある値は M_0 上のある位置を指定するが、それと一対一に対応すべき M 上の点は我々の選択の問題だからである。つまり、 M 上の z 時間発展が時間をあらわに含まないように M 上に座標系 z を導入するのである。じっさい、この要請は以下の理論の中に現れる。

2つの未知量は中立解を出発点として逐次代入的に求められる。したがって、理論に現れる諸量の θ 依存性は、中立解においてそうであるように必ず z とのコンビネーション $z \exp(i\theta)$ （およびその複素共役）として現れる。すなわち、 z を含む量は必ず因子 $\exp(i\theta)$ を伴う。したがって、 G が θ によらないということはそれが $G = g(|z|)z$ の形であることを示唆する。この形によって表される複素 z 面上のリミットサイクル振動子は回転対称性をもつ。すなわち、それは変換 $z \rightarrow z \exp(i\psi)$ に対して方程式が不変な「まん円い」振動子である。

縮約形 (1.6), (1.7) を (1.4) 式に代入した結果を

$$\dot{L}_0 \rho = G \exp(i\theta)U + \bar{G} \exp(-i\theta)\bar{U} + b(z, \bar{z}, \theta) \quad (1.8)$$

の形に整理する。ここに、

$$\tilde{L}_0 = L_0 - \omega_0 \partial_\theta, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} b = & -\mu L_1 X - N_2(X, X) - N_3(X, X, X) \\ & + G \partial_z \rho + \bar{G} \partial_{\bar{z}} \rho. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$U \exp(i\theta)$ と $\bar{U} \exp(-i\theta)$ がともに演算子 $\tilde{L}_0$ の固有値 0 の固有ベクトルになっていることに注意されたい。以下ではあらためてこれらを臨界固有ベクトルと呼ぼう。

(1.8) 式を θ の 2π 周期関数である未知量 ρ に対する非斉次線形微分方程式と見なすのが解法のポイントである。右辺全体が非斉次項である。もちろん非斉次項自体が未知量の ρ と G を含んでいるから真の非斉次線形微分方程式ではないが、ひとまず右辺をあたえられた量と形式的に見なすのである。

(1.8) が解 ρ をもつためには、この「非斉次項」は当然ながら $\tilde{L}_0$ の臨界固有ベクトル成分を含んではならない。左辺にそれが存在しないからである。この条件を可解条件という。ところが、非斉次項には未知量 G および $\bar{G}$ を係数とする臨界固有ベクトル成分が最初の 2 項として存在する。したがって、これらは b に含まれる臨界固有ベクトル成分と打ち消しあわなければならない。この条件から、もし b が既知ならば G と $\bar{G}$ が決まる。 $\tilde{L}_0$ の随伴演算子 $\tilde{L}_0^* = L_0 + \omega_0 \partial_\theta$ の臨界固有ベクトルは、 L_0^* の臨界固有ベクトル U^* を用いて $U^* \exp(-i\theta)$ およびその複素共役であたえられるから、上の条件は

$$G = -(U^* \exp(-i\theta), b)_\theta. \quad (1.11)$$

と表される。ここに $(f, g)_\theta = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) \cdot g(\theta)$ 。あるいは、 b を $b(\theta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b^{(\nu)} \exp(i\nu\theta)$ のようにフーリエ分解すると、(1.11) は

$$G = -U^* \cdot b^{(1)} \quad (1.12)$$

とも書かれる。そして、可解条件が満たされれば、(1.8) の両辺に $\tilde{L}_0^{-1}$ を作用させることでもう一つの未知量 ρ が得られる。

しかし、まだ二つの問題が残っている。ひとつは、 ρ がもし臨界固有ベクトル成分をもっているとしても、 $\tilde{L}_0$ がかかることで恒等的にそれが消えてしまい、したがってそれを決めることができないという問題。もうひとつは、 b が実際には既知量ではないという問題である。第一の問題については、単に ρ は臨界固有ベクトル成分をもたないと要求してよい。この要請は先に述べた要請、すなわち多様体 M_0 と M 上の各点の一対一対応をつけることに対応している。摂動による臨界固有ベクトル成分の振幅のゆるやかな動きは z の運動方程式 (1.7) によってすでに取り込まれている。したがって、中立解からの関数形のずれ ρ 自体はもはやこの成分をもたないとする要請はごく自然な要請である。

第二の問題は、逐次代入による近似解法を用いれば解決される。 b は微小な未知量を含んでいるが、近似の出発点としてはこれらをすべて 0 と置いてよい。これを b_0 とすると、 $b_0 = -\mu L_1 X_0 - N_2(X_0, X_0) - N_3(X_0, X_0, X_0)$ である。これを可解条件 (1.12) に適用すれば、

$$\dot{z} = \mu \sigma z - \beta |z|^2 z \quad (1.13)$$

の形をもつ振幅方程式が得られ、同時に ρ も得られることは容易にわかるであろう。このようにして得られた G と ρ を b の表式にフィードバックして再び可解条件を用いれば修正された G と ρ が得られる。このような逐次近似は任意のステップまで進めることができる。しかし、逐次代入をワンステップ進めるごとに生じる G と ρ への補正は必ずより小さなものになるかという点、一般にそうはならない。じっさい、(1.13) 式の 3 次の項と同等に重要な 3 次の項が次の逐次代入ステップから生じる。これを実行した結果得られる正しい β は

$$\begin{aligned} \beta = & -3(U^* \cdot N_3(U, U, \bar{U})) + 4(U^* \cdot N_2(U, L_0^{-1} N_2(U, \bar{U}))) \\ & + 2(U^* \cdot N_2(\bar{U}, (L_0 - 2i\omega_0)^{-1} N_2(U, U))) \end{aligned} \quad (1.14)$$

である。 b_0 を用いた最低次近似では、上式右辺の第一項しか現れず、2 次の非線形項 N_2 はまったく効いていない。 σ は $\sigma = (U^* \cdot L_1 U)$ であたえられ、 β とともに一般に複素数である。 β の実部が正の場合には 3 次の項

が線形成長を抑えるから (1.13) は意味のあるリミットサイクル振動子を表している。これはホップ分岐点近傍で現れる普遍的な振動子であり、その解析の容易さから便利な振動子モデルとして理論の検証等さまざまな目的で用いられている。

1.2 結合振動子系の縮約

複数の結合した振動子系の縮約となると、話がとたんに難しくなるかという、決してそうではない。たとえば、同じ性質をもつ振動子 1 と 2 が線形に結合した系

$$\dot{X}_1 = F(X_1) + k_{12}X_2 \quad (1.15)$$

を考えよう。\$k_{12}\$ は一般に \$n \times n\$ 行列である。振動子 2 に対しても同様の式が書ける。ただし、結合は十分弱いとする。先に述べた取り扱いでは、分岐点からのずれの効果と非線形効果を摂動と考えたが、今の場合には振動子 2 との結合が摂動として新たに加わることになる。考え方としてはあくまでも摂動を受けた単一振動子の問題（以下では振動子 1 に着目）として取り扱うのである。中立解は (1.5) と同じく

$$X_{1,0} = z_1 \exp(i\theta)U + \bar{z}_1 \exp(-i\theta)\bar{U} \quad (1.16)$$

であるが、このたびは縮約形を

$$X_1 = X_{1,0} + \rho_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \theta), \quad (1.17)$$

$$\dot{z}_1 = G_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \quad (1.18)$$

の形に仮定する。もちろん、振動子 2 に対しても同様の中立解と縮約形が仮定される。1 振動子問題として扱うのだから、中心多様体 \$M\$ はやはり 2 次元であるが、そこには相互作用する相手方の変数 \$z_2, \bar{z}_2\$ が「パラメタ」として入ることになる。以下の取り扱いは 1 振動子の場合とまったくパラレルである。逐次代入の出発点となる \$b_0\$ には \$k_{12}X_{1,0}\$ が新たに付け加わる。したがって、結合の効果を最低次で取り入れた近似的縮約方程式は

$$\dot{z}_1 = \mu\sigma Z_1 - \beta|z_1|^2 z_1 + \bar{k}_{12}z_2 \quad (1.19)$$

となる。ここに \$\bar{k}_{12}\$ は \$\bar{k}_{12} = U^* k_{12} U\$ であたえられる。\$\sigma\$ と \$\beta\$ の表式は 1 振動子の場合と変わらない。\$z_2\$ に対しては、上式で添字 1 と 2 を入れ替えた発展方程式が成り立つ。

(1.15) で結合項を拡散項 \$D\nabla^2 X\$ で置き換えると

$$\dot{X} = F(X) + D\nabla^2 X \quad (1.20)$$

となり、これは振動反応拡散系を表している。\$D\$ は \$n \times n\$ 拡散行列である。拡散項を局所振動子に対する摂動と見なせば、上式の縮約は前例とまったく同様に行われる。ただし、拡散項が微小な摂動と見なせるためには場の空間変化が十分長波長でなければならない。そのように仮定した上で縮約を実行し、得られた縮約方程式の解の性質からこの仮定の妥当性をチェックするのである。また、このような連続場を扱う場合には、中心多様体 \$M\$ が \$z\$ のいろいろな空間微分をパラメタとして含むと考え、縮約形を

$$X(r, t) = z(r, t) \exp(i\theta)U + \bar{z}(r, t) \exp(-i\theta)\bar{U} + \rho(z, \bar{z}, \nabla z, \nabla \bar{z}, \nabla^2 z, \dots), \quad (1.21)$$

$$\dot{z}(r, t) = G(z, \bar{z}, \nabla z, \nabla \bar{z}, \dots) \quad (1.22)$$

の形に仮定する。逐次代入によると、じっさいそのような形で \$\rho\$ と \$G\$ が求められていく。式 (1.19) との類比から

$$\dot{z} = \mu\sigma z - \beta|z|^2 z + \alpha\nabla^2 z \quad (1.23)$$

が得られることは容易に察しがつくであろう。 α は $\alpha = U^*DU$ であたえられる。(1.23) 式は複素ギンツブルク・ランダウ方程式と呼ばれ、振動場の最も重要なモデルの一つとなっている。時間スケール、振幅 z のスケール、および空間スケールを適当に選ぶことで (1.23) は

$$\dot{z} = (1 + i\omega)z - \beta|z|^2z + \alpha\nabla^2z, \quad (1.24)$$

$$\alpha = 1 + ic_1, \quad \beta = 1 + ic_2 \quad (1.25)$$

とも表される。 ω も適当な回転座標系に移ることで消えるから、本質的にはわずか二つのパラメタ c_1, c_2 を含みきわめて普遍的な方程式に縮約されたわけである。

以上のほかにもさまざまな物理的効果を摂動として取り込むことができ、縮約形の多様な変形版が可能である。たとえば反応拡散系のかわりに非局所結合をもつ振動子系

$$\partial_t X(r, t) = F(X) + \int g(r - r') X(r', t) dr' \quad (1.26)$$

を考えると、その縮約は

$$\partial_t z(r, t) = (1 + i\omega)z - \beta|z|^2z + \alpha \int G(r - r') z(r', t) dr' \quad (1.27)$$

の形をもつ。 $G(r)$ はその全空間積分が 1 に規格化された実の結合関数であり、 α は複素係数である。非局所結合振動子系については第 5 節であらためて述べる。

2 位相縮約法の基本的な考え方

位相縮約法には中心多様体縮約法に対比されるような系統的な縮約法と、より簡便で応用性に富んでいるが最低次近似しか扱えない方法とがある。この講義では後者の簡便な方法に焦点を当てる。

2.1 位相の定義とアイソクロン

(1.1) 式が振動数 ω の安定なリミットサイクル振動解をもつとして、それを 2π 周期関数 $\chi(\omega t)$ で表そう。周期は $T = 2\pi/\omega$ である。振動子の運動を位相だけで記述することはもちろん近似に過ぎないが、周期軌道の安定性が高ければ少々の攪乱によって運動がそこから大きくずれることはないから、位相記述が意味をもつ。あるいは、攪乱が十分弱いときに位相記述が成り立つと言ってもよい。位相記述を行うためにはまず位相を定義しなければならない。周期軌道を C とすると、攪乱によって状態点は多少なりとも C から外れるから、 C 上で位相を定義するだけでは不十分である。 C の近傍だけで定義してもよいが、以下ではいっそのこと n 次元相空間全域にわたって位相 ϕ を定義しよう。これは一種のスカラー場 $\phi(X)$ を相空間に導入することに他ならない。広く採用される自然な定義として、(1.1) 式が常に $\dot{\phi} = \omega$ をみたすという条件を要求する。すなわちこのスカラー場は

$$\dot{\phi} = \text{grad}_X \phi \cdot F(X) = \omega \quad (2.1)$$

という恒等式をみたす。このようにして定義された場 $\phi(X)$ において、 $n-1$ 次元の等位相面 I_ϕ をアイソクロンと呼ぶ (図 1 参照) [3]。相空間はこのようなアイソクロンによってびっしりと埋め尽くされる。どれでもよい一つのアイソクロンを位相 0 のアイソクロン I_0 と定める。 C は I_ϕ を一点 $\chi(\phi)$ で貫いている。

(2.1) 式は、アイソクロンに垂直な方向 (すなわち ϕ が最も急激に変化する方向) への速度ベクトル $F(X)$ の成分だけが ϕ の変化速度にとって有効な成分になっているという当然の結果を示している。

C の安定性とアイソクロンの定義から、アイソクロンが次の性質をもっていることは明らかだろう。

1. 状態点のアンサンブルを考え、初期時刻ですべての状態点が同一のアイソクロン上にあるとすると、その後の任意の時刻においてそれらは共通のアイソクロン上に見出され、かつ時間とともにそれらは 1 点に収束しつつ C に漸近する。

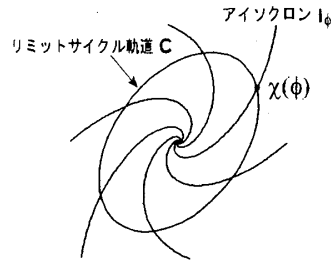


図 1: アイソクロン I_ϕ は $n-1$ 次元の多様体であり, リミットサイクル軌道 C と一点 $\chi(\phi)$ で交わる.

2. 周期 T ごとのストロボ的観測では, 状態点は常に同一のアイソクロン上に見出され, かつ時間とともにそれは C に漸近する.

第二の性質は次のことを意味している. すなわち, このようなストロボ的観測においては, 各アイソクロンは不変多様体, 特に C の安定多様体になっている.

相空間の中に位相が定義できないような特異な点集合が存在する. 唯一のアトラクターが C で, かつ不安定定常点が 1 つだけ存在するという最も典型的な場合を考えると, このような位相特異点の集合 S はアイソクロンと次のような関係をもっている. すなわち, S はすべてのアイソクロンがそこに収束する $n-2$ 次元の “フィラメント” になっている. そして, このフィラメントは不安定定常点の安定多様体になっている.

2.2 摂動を受けた振動子の位相縮約

一つの振動子に外部から弱い摂動 $p(t)$ がかかっているとする. すなわち

$$\dot{X} = F(X) + p(t). \quad (2.2)$$

ϕ の時間発展は

$$\dot{\phi} = \text{grad}_X \phi \cdot (F(X) + p(t)) = \omega + \text{grad}_X \phi \cdot p(t) \quad (2.3)$$

で表され, 付加項 $\text{grad}_X \phi \cdot p(t)$ が現れる. $\text{grad}_X \phi$ はアイソクロン I_ϕ 上の状態点 X における ϕ の勾配ベクトルである. しかし, p が弱い摂動であるかぎり X はほぼ C 上にあるとしてよい. すなわち, 勾配ベクトルは点 $\chi(\phi)$ において計算された勾配ベクトルを用いて,

$$\text{grad}_X \phi \simeq \text{grad}_{\chi(\phi)} \phi \equiv Z(\phi) \quad (2.4)$$

と近似してよい. すなわち (2.3) は

$$\dot{\phi} = \omega + Z(\phi) \cdot p(t) \quad (2.5)$$

となり, p の内容を問わなければ ϕ の運動は ϕ のみで一応記述できたことになる.

2.3 フロケ固有ベクトルとの関係

上の議論で現れた $Z(\phi)$ はきわめて重要な量である. それは外部からの影響を振動子がどのような敏感さで受け取るかを示す「感度関数」である. この量はもちろん ϕ の関数, すなわちどのような位相状態で影響を受け取るかに依存している. 振動子系の具体的な問題においては, もとの力学モデル (1.1) から Z を数値的に計算する必要がしばしば生じるが, その目的のためにも Z といわゆるフロケ固有ベクトルとの関係を知っておくことは有用である.

フロケ固有ベクトルは周期的に変動する係数行列をもつ線形系の固有値問題に現れる。目下の問題では、式(1.1)をリミットサイクル軌道の周りで $X(t) = \chi(\omega t) + \rho(t)$ とおいて線形化した式

$$\dot{\rho} = L(t)\rho \quad (2.6)$$

の固有値問題に現れる。初期ベクトル $\rho(0)$ が時間 T の後に

$$\rho(T) = \exp(\Lambda T)\rho(0) \quad (2.7)$$

のように変換を受けたとしよう。線形系であるから一般にこのように表してよい。 $n \times n$ 行列 Λ の固有ベクトルがフロケ固有ベクトルである。これを u_l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) で表し、その固有値を λ_l とする。また、固有値 λ_l に属する左固有ベクトルを u_l^* とする。これらの固有ベクトルは通常のように規格直交条件をみたすとする。 $\rho(0) = u_l$ なら

$$\rho(T) = \exp(\lambda_l T)\rho(0) \quad (2.8)$$

となることは明らかである。なお、 u_l は一般に C 上の基点 $\chi(\phi)$ に依存する。あるいは ϕ の関数である。したがって、これを明示する場合には u_l を $u_l(\phi)$ と書く。

固有値のうち一つは必ず 0 である。なぜなら、 $\chi(\phi)$ 点で C に接する接線ベクトルを $\rho(0)$ とすると、軌道に沿うこのようなずれは線形近似の範囲では一周後もそのまま保たれ（即ち $\rho(T) = \rho(0)$ ）、したがって (2.7) によって $\rho(0)$ は固有値 0 の固有ベクトル方向に一致するからである。この固有ベクトルを $u_0(\phi)$ とする。具体的には

$$u_0(\phi) = \frac{d\chi(\phi)}{d\phi} \quad (2.9)$$

ととることができる。 C は安定であるから、他のすべての固有値の実部は負である。以下で示したいことは、先に導入した感度ベクトル $Z(\phi)$ が $u_0(\phi)$ に対応する左固有ベクトル $u_0^*(\phi)$ に恒等的に等しいという事実である。

まず、ベクトル $Z(\phi)$ と u_0^* の方向が一致することに注意する。これを見るために、負の実部をもつ $n-1$ 次元の固有ベクトルで張られる固有空間を E_ϕ としよう。この固有空間は時間 T ごとの観測においては状態点 P が常にその上にとどまる、つまり不変多様体になっており、 P は時間とともに C に漸近するから、 E_ϕ は C の安定多様体である。アイソクロン I_ϕ もまた C の安定多様体であることはすでに見たとおりである。 E_ϕ と I_ϕ の唯一の違いは、前者が線形化システムの安定多様体であるという点のみである。このことから E_ϕ は $\chi(\phi)$ 点における I_ϕ の接空間をあたえることがわかる。一方、 $Z(\phi)$ は C 上の $\chi(\phi)$ 点においてアイソクロン I_ϕ に垂直なベクトルであった。したがって、それは同じ点において E_ϕ にも垂直である。つまり、 $Z(\phi)$ とすべての u_l ($l \neq 0$) のスカラー積は 0 であり、したがって $Z(\phi)$ は u_0^* に平行である。よって、これら 2 つのベクトルの長さが等しいこと、あるいは $Z(\phi) \cdot d\chi(\phi)/d\phi = 1$ が示されれば、 $Z(\phi) = u_0^*$ が示されたことになる。これを示すのは簡単である。なぜなら、 $d\chi(\phi)/d\phi$ は点 $\chi(\phi)$ においてある方向 (C に接する方向) への位相勾配 (> 0) の逆数であり、一方 $Z(\phi)$ は同じ点において別の方向 (I_ϕ に直交する方向) への位相勾配 (> 0) のものだからである。以下では特別な固有ベクトル $u_0(\phi)$ と $u_0^*(\phi)$ をそれぞれ $U(\phi)$, $U^*(\phi)$ と記そう。

2.4 摂動 p のいくつかの具体例

(1) 力学系の性質の変化

(1.1) において速度場 $F(X)$ が $F(X) + p(X)$ に変化したとする。これによる ϕ の運動の変化は

$$\dot{\phi} = \omega + Z(\phi)p(X) \simeq \omega + Z(\phi)p(\chi(\phi)) \quad (2.10)$$

となる。一般に振動子系の位相縮約には二つのステップがあって、第一は方程式を位相のみで表すというステップ、第二は以下で述べるいわゆる平均化のステップである。摂動 p が弱いという条件の下でこれらはともに成り立つのであるが、(2.10) 式ではまだ後者の操作がなされていない。それを実行するためには、まず

$$\phi = \omega t + \psi \quad (2.11)$$

によって新しい位相変数 ψ を導入する. ψ は $p = 0$ なら任意の定数だが, 弱い摂動の存在によってゆっくりと変化する変数になる. (2.10) を ψ で書けば

$$\dot{\psi} = Z(\omega t + \psi)p(\chi(\omega t + \psi)). \quad (2.12)$$

このように, 「遅い変数」 ψ の運動方程式の中に ωt で表される相対的に早い周期的時間変化が入っている. その場合, 1 周期にわたる ψ の変化を無視し, ψ を固定した上で (2.12) の右辺を 1 周期にわたって時間平均することが許される. すなわち

$$\dot{\psi} = \delta\omega, \quad (2.13)$$

$$\delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta Z(\theta + \psi)p(\chi(\theta + \psi)). \quad (2.14)$$

このように, 力学系の性質がさまざまに変化しても, それが微小な変化であるかぎり振動数のわずかな変化という効果しかもたらさない.

(2) 周期外力

振動数 ω_1 の弱い周期外力 $p(\omega_1 t)$ を受けた振動子を考える. $p(\theta)$ は θ の 2π 周期関数である. ω_1 が振動子の自然振動数 ω に近い場合に同期・非同期転移が起きるので, $\delta\omega \equiv \omega - \omega_1$ を $|p|$ と同程度の微小量とする. このたびは (2.11) とはやや違って

$$\phi = \omega_1 t + \psi \quad (2.15)$$

のように外力の周期で変化する部分からのずれを ψ で表すのが便利である. なぜなら, ψ が時間的に一定 (より一般には有界) かドリフトするかで外力に同期するかしないかが判定できるからである. ψ に対する式は

$$\dot{\psi} = \delta\omega + Z(\omega_1 + \psi)p(\omega_1 t). \quad (2.16)$$

再び平均化によって

$$\dot{\psi} = \delta\omega + \Gamma(\psi), \quad (2.17)$$

$$\Gamma(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta Z(\theta + \psi)p(\theta). \quad (2.18)$$

$\Gamma(\psi)$ は 2π 周期関数であり, 外力同期が可能かどうかは (2.17) の定常解が存在するかどうかで決まる. Γ の最大値と最小値をそれぞれ Γ_{max} , Γ_{min} とすると, $\delta\omega$ が $-\Gamma_{max} < \delta\omega < -\Gamma_{min}$ の範囲にあれば同期解が存在する. ただし, ψ の定常解 ψ_0 のうち $\Gamma'(\psi_0) < 0$ をみたすもののみが安定な同期解である. 同期がわずかに破れたとき, すなわちたとえば $\delta\omega = -\Gamma_{min} + \epsilon$ で ϵ が正の微小量るとき, 真の振動数 $\tilde{\omega}$ の ω からのずれが $\sqrt{\epsilon}$ に比例することは容易に示される.

(3) 振動子間結合

同じ性質をもつ一対の振動子が弱く結合している系

$$\dot{X}_1 = F(X_1) + p_{12}(X_1, X_2), \quad (2.19)$$

$$\dot{X}_2 = F(X_2) + p_{21}(X_2, X_1) \quad (2.20)$$

を考えよう. p 中の X_1, X_2 をそれぞれ $\chi(\phi_1), \chi(\phi_2)$ で近似し, 簡単のため $p(\chi(\phi_1), \chi(\phi_2))$ を $p(\phi_1, \phi_2)$ と表記すると, 位相方程式は

$$\dot{\phi}_1 = \omega + Z(\phi_1)p(\phi_1, \phi_2) \quad (2.21)$$

および添字 1 と 2 を入れ替えた式であたえられる. $\phi_{1,2} = \omega t + \psi_{1,2}$ と置き, 平均化操作により

$$\dot{\psi}_1 = \Gamma_{12}(\psi_1 - \psi_2), \quad (2.22)$$

$$\dot{\psi}_2 = \Gamma_{21}(\psi_2 - \psi_1) \quad (2.23)$$

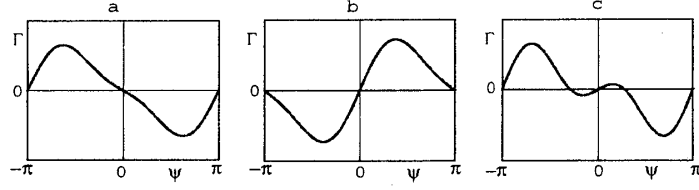


図 2: 位相結合関数の代表的 3 タイプ.

が得られる. ここに

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\psi_\alpha - \psi_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{Z}(\theta + \psi_\alpha) \mathbf{p}_{\alpha\beta}(\theta + \psi_\alpha, \theta + \psi_\beta). \quad (2.24)$$

最低次近似ではさまざまな摂動効果は単に加法的に効くから, 上の結果は多数の振動子が結合した系にただちに拡張できる. また, 振動子間に性質の微小な差があってもそれは自然振動数の差として加法的に効いてくるに過ぎない. したがって互いに似かよった振動子から成る弱結合振動子ネットワーク一般に対して

$$\dot{\psi}_i = \delta\omega_i + \sum_j \Gamma_{ij}(\psi_i - \psi_j) \quad (2.25)$$

あるいはもとの位相変数で書けば

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_j \Gamma_{ij}(\phi_i - \phi_j) \quad (2.26)$$

が得られる.

(4) 結合のタイプ

上に述べたことから, $p_{12} = p_{21}$ のように対称な結合をもつ一対の同一な振動子に対しては, 位相方程式は

$$\dot{\phi}_1 = \omega + \Gamma(\phi_1 - \phi_2), \quad (2.27)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega + \Gamma(\phi_2 - \phi_1) \quad (2.28)$$

の形になる. 振動数が同じだから振動子が互いに同期することは確かであるが, 同期後の位相関係はどうなるだろうか. それは Γ の形に依存する. 上式から位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ は

$$\dot{\psi} = \Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi) \equiv \Gamma_a(\psi) \quad (2.29)$$

に従う. Γ_a の反対称性と 2π 周期性により,

$$\Gamma_a(0) = \Gamma_a(\pm\pi) = 0 \quad (2.30)$$

が成り立つことは明らかである. したがって, $\psi = 0$ と $\psi = \pi$ はともに同期解であるが, その安定性は微係数 $\Gamma'(0)$, $\Gamma'(\pi)$ の符号による. 図 2 の a, b, c, が典型的な三つの場合を示している. 図 2a では $\Gamma'(0) < 0$, $\Gamma'(\pi) > 0$ であるから同位相に同期し, 図 2b では $\Gamma'(0) > 0$, $\Gamma'(\pi) < 0$ であるから位相差 π で同期する. 前者のタイプの結合を順位相結合 (in-phase coupling), 後者を逆位相結合 (anti-phase coupling) とよぶ. より複雑な変化をもつ結合関数に対しては, 位相差 0 と π がともに不安定となって, 0 でも π でもない位相差に安定同期状態が現れる場合があり, このタイプ (out-of-phase coupling) が図 2c に示されている.

(5) 反応拡散系

p が拡散項 $D\nabla^2 X$ の場合, (2.2) は振動反応拡散系を表す. p が微小量であるためには場の空間変動はゆるやかでなければならない. この条件の下に位相縮約は可能で, 位相方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega + \mathbf{Z}(\phi) D \nabla^2 \mathbf{X}_0(\phi) \\ &= \omega + \mathbf{U}^*(\phi) D \mathbf{U}(\phi) \nabla^2 \phi + \mathbf{U}^*(\phi) D \frac{d\mathbf{U}(\phi)}{d\phi} (\nabla \phi)^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

これに平均化操作を施すと定数係数の非線形位相拡散方程式

$$\dot{\phi} = \omega + \nu \nabla^2 \phi + \mu (\nabla \phi)^2 \quad (2.32)$$

が得られる。ここに、 ν, μ は (2.31) の ϕ -dependent な係数を 1 周期にわたって平均したものである。(2.32) は振動場における位相波の議論に広く用いられるもっとも基本的な式の一つとして知られている [4]。なお、位相振動子モデルや同期現象のさまざまな具体例については文献 [5] を併せて参照されたい。

3 位相縮約法の広がり

本節では、前節で説明しきれなかった位相縮約法の種々の側面を眺めることでこの方法に対する理解をさらに深めたい。

3.1 パルス結合神経振動子系の位相縮約

位相縮約の第二ステップである平均化操作は、それ自身かなり強力な方法である。このことを示すために、神経振動子の最も単純なモデルとして広く用いられている leaky integrate-and-fire (LIF) 振動子のパルス結合系を一例としてとりあげ、その位相縮約を実行して位相結合関数 Γ を導出してみよう [6]。

単一の LIF は区間 $0 \leq u \leq 1$ で定義された 1 変数 u に対する式

$$\dot{u} = a - u \quad (3.1)$$

およびリセッティング・ルール「 u が 1 に達した瞬間、無条件に $u = 0$ とリセットする」によって定義される。物理的には、リセットの瞬間が発火興奮が起こる瞬間と解釈される。パラメタ a は 1 に近い値をもち、 $a > 1$ なら u は振動子となる。 a がわずかに 1 より小なら、 $u = a$ は安定点ではあるが弱い刺激で一過性の振動を示す。これはいわゆる興奮系とみなされる。以下では自励発振する前者の場合を考える。周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \int_{u=0}^{u=1} dt = \int_0^1 \frac{du}{a-u} = -\ln(1-a^{-1}) \quad (3.2)$$

となって、 $a \rightarrow 1$ で対数発散する。 $u = 0$ と $u = 1$ を物理的に同一の状態とみなすと、これはちょうど $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ を同一の状態とみなしたように、 u を一種の位相変数と見ることができる。その結果、付加的なりセッティング・ルールは必要でなくなる。つまり LIF モデルはすでに位相モデルになっている。これを標準的な位相モデル $\dot{\phi} = \omega$ に直すには次のような変数変換を行えばよい。

$$\phi = M(u) = -\omega \ln(1-a^{-1}u) \quad (3.3)$$

次に、結合した一対の LIF を考える。それぞれの状態変数を u, u' とする。相互作用としてしばしば α 関数による結合モデルが用いられる。 u に対する式は

$$\dot{u} = a - u + K \sum_n \alpha(t - t_n), \quad u'(t_n) = 0. \quad (3.4)$$

t_n は u' が n 回目に発火した時刻である。 $\alpha(t)$ は α 関数と呼ばれ、 $\alpha(t) = \tau^{-2} t \exp(-t/\tau)$ ($t \geq 0$), $\alpha(t) = 0$ ($t < 0$) で定義される。 $\alpha(t)$ の時間積分は 1 に規格化されている。相手方のニューロンが発火すると、同じ瞬間にその効果を受け取るのではなく、 α 関数で表されるような時間遅れを伴って影響を受ける、ということを (3.4) 式は表している。 τ は遅れの度合いを表すパラメタである。

(3.4) 式に変換 (3.3) を適用しよう。振動子の固有の運動は $\dot{\phi} = \omega$ と単純になるが、変換のツケは結合項に現れる。すなわち、

$$\dot{\phi} = \omega + K \frac{dM}{du} \sum_n \alpha(t - t_n). \quad (3.5)$$

上式を標準形 $\dot{\phi} = \omega + \Gamma(\alpha - \alpha')$ に書き換えることは一見難しそうであるが、以下のようにして可能である。まず、 dM/du を ϕ で表す。

$$\frac{dM}{du} = \frac{\omega}{a-u} = \frac{\omega}{a} \exp\left(\frac{\omega}{\phi}\right) \equiv Z(\phi). \quad (3.6)$$

$Z(\phi)$ は $0 \leq \phi < 2\pi$ で定義されているが、これを $-\infty$ から ∞ までの全域での 2π 周期関数として拡張したものを $\tilde{Z}(\phi)$ と書く。同様に $\alpha(t)$ を全域にわたる T 周期関数として拡張した $\tilde{\alpha}(t)$ を次式で定義する。

$$\tilde{\alpha}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(t - nT). \quad (3.7)$$

例によって $\phi = \omega t + \psi$ と置き、(3.5) 式を

$$\dot{\phi} = \omega + \tilde{Z}(\omega t + \psi) \sum_n \alpha(t - t_n) \quad (3.8)$$

と書く。残る問題は $t - t_n$ を ϕ' で表すことであるが、これは単に

$$t - t_n = \frac{1}{\omega} (\phi'(t) - 2\pi n) \quad (3.9)$$

と置けばよい。なぜなら、この表式は最低次で成り立つべき式 $\dot{\phi} = \omega$ を満たしており、かつ $\phi'(t_n) = 2\pi n$ を満たすからである。よって

$$\begin{aligned} \sum_n \alpha(t - t_n) &= \sum_n \alpha\left(\frac{\omega t + \psi'(t) - 2\pi n}{\omega}\right) = \sum_n \alpha\left(\frac{\omega t + \psi'(t)}{\omega} - nT\right) \\ &= \tilde{\alpha}\left(\frac{\omega t + \psi'(t)}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

が成り立ち、(3.8) は

$$\dot{\psi} = K \tilde{Z}(\omega t + \psi(t)) \tilde{\alpha}\left(\frac{\omega t + \psi'(t)}{\omega}\right) \quad (3.11)$$

に帰着する。再三述べてきた平均化操作を上式に施せば、 $\dot{\psi} = \Gamma(\psi - \psi')$ または

$$\dot{\phi} = \omega + \Gamma(\phi - \phi'), \quad (3.12)$$

$$\Gamma(\psi - \psi') = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{Z}(\theta + \psi) \tilde{\alpha}\left(\frac{\theta + \psi'}{\omega}\right) d\theta \quad (3.13)$$

が得られる。なお、 $\tau \ll T$ の場合には発火と発火の間の α 関数の重なりは無視でき、その近似で上式の積分を実行することは簡単である。また、 δ パルス結合の極限 ($\tau \rightarrow 0$) の場合にも Γ の解析形は簡単に求められる [7]。

3.2 ノイズを含む振動子系の位相縮約

統計的に定義されたランダム力が振動子にかかっている場合にも位相縮約は有効である。以下では、そのような場合の縮約法と応用例を述べる。

ノイズと位相拡散

一つの振動子が弱いランダム力 $\xi(\mathbf{X}, t)$ を加法的に受けているとする。すなわち、

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \xi(\mathbf{X}, t). \quad (3.14)$$

以下では簡単のため ξ は $\mathbf{X}$ によらないとし、かつ ξ の 1 成分 ξ_ν のみが 0 でないとする。これらの制約を外すことは容易であり、以下の議論の本質には関係しない。位相縮約の第一段階を適用すると、上式は

$$\dot{\phi} = \omega + Z(\phi)\xi(t) \quad (3.15)$$

あるいは遅い変数 $\psi = \phi - \omega t$ に対して

$$\dot{\psi} = Z(\omega t + \psi)\xi(t) \quad (3.16)$$

となる。ただし、 Z_ν, ξ_ν を単に Z, ξ と表記した。 ξ は平均が 0 で、相関が

$$\langle \xi(t_0)\xi(t_0 + t) \rangle = C(t) \quad (3.17)$$

であたえられるとする。前述の周期外力を受けた振動子の場合と違って、(3.16) 式にただちに時間的平均化操作を施すことはできない。そこで、同式をまず位相に関する確率分布関数 $P(\psi, t)$ の発展方程式に変換することを考える。これはランダム力が白色ガウスノイズの場合、すなわち

$$C(t) = 2\kappa\delta(t) \quad (3.18)$$

の場合には簡単で、よく知られた事実により (3.16) はフォッカー・プランク方程式

$$\dot{P}(\psi, t) = -\frac{\partial}{\partial \psi}(v(\omega t + \psi)P) + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}(D(\omega t + \psi)P) \quad (3.19)$$

に変換される。ここに

$$v(\psi, t) = Z'(\omega t + \psi)Z(\omega t + \psi), \quad (3.20)$$

$$D(\psi, t) = \kappa Z(\omega t + \psi)^2. \quad (3.21)$$

これで平均化が実行できる。すなわち、ゆっくり変化する分布関数 $P(\psi, t)$ の発展方程式の中に ωt を通じての早い周期的変動があるから、分布の運動を止めた上で 1 周期にわたって右辺を時間平均することが許される。その結果、 Z の周期性によってドリフト v は消え、拡散方程式

$$\dot{P}(\psi, t) = D \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}, \quad (3.22)$$

$$D = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta Z(\theta)^2 \quad (3.23)$$

が得られる。

実は、ノイズが白色でなくても (3.15) は定数係数のフォッカー・プランク方程式に変換できる。その直感的な理由は、遅い変数 ψ にとってみれば $C(t)$ の相関時間は実質的に無限小と見ても大差がないからである。拡散項よりも高次の微分が現れない理由は前と同じで、弱い外力の高次相関が無視できることによる。ただし、有色ノイズの場合にはドリフト v は 0 にならない。詳細は省くが結果のみを述べると

$$\dot{P}(\psi, t) = -v \frac{\partial P}{\partial \psi} + D \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} \quad (3.24)$$

が得られ、

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} l |Z_l|^2 \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{I(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (3.25)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} |Z_l|^2 I(l\omega) \quad (3.26)$$

である。ここに、 $\mathcal{P}$ はコーシーの主値を表す。また、

$$Z_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta Z(\theta) \exp(-il\theta), \quad (3.27)$$

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt C(t) \exp(i\omega t) \quad (3.28)$$

である。

フォッカー・プランク方程式 (3.24), (3.22) は元に戻ってランジュバン方程式

$$\dot{\phi} = \omega + v + \xi(t), \quad (3.29)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (3.30)$$

の形にも書けることはもちろんである。このように、位相分布関数への変換を経由して平均化が実行されるのである。

ノイズによる同期現象

最近のトピックスの一つに、ランダム外力への振動子の同期という現象がある。この現象は一見奇妙な現象であるとともに、今後いろいろな応用可能性も出てくるのではないかと期待される。この現象の現実的意義を示す一例として、大脳皮質ニューロンに関する Z.F.Mainen と T.Sejnowski の実験がある [8]。彼らは孤立した単一ニューロンへの入力刺激として 150pA の定電流を流した場合 (A) と、それに加えてランダムにゆらぐ電流をあたえた場合 (B) を比較した。(A) の場合、定電流によってニューロンは興奮をくりかえす振動子として振舞うようになるが、内部的なノイズのために多少とも周期のランダムなゆらぎは避けがたく、多数回の試行による繰り返し発火のパターンを重ね合わせてみると、時間とともに発火のタイミングはばらついてくる。一方、(B) の場合には、ランダムな外力のために発火が非周期的になるのは当然であるが、外力の時系列パターンが同一であるかぎり、何度試行しても発火の時系列パターンは非周期的なりにびたりと重なるのである。複雑な脳内ネットワーク中のニューロンはたえず非周期的な入力刺激の下にあるが、それへの応答が気まぐれではなくきわめて正確なものであることを上の事実は示唆している。あるいは、入力刺激の非周期的な時系列に含まれる情報を保持した応答をニューロンは示すことができると言ってもよい。

上に述べた事実は、外力に対する同期・非同期の言葉を用いて言い直すことができる。これまでに述べてきた同期・非同期概念は周期外力に対するものであったが、この概念を非周期的外力に対して拡張することができる。すなわち、一般に外力下の 1 振動子に対してはリヤプノフ指数を定義することができるが、最大リヤプノフ指数の実部が負のときに限り外力に同期していると見なすのである。上述の実験は、振動子がランダム外力にその意味で同期していることを示している。

単一の振動子のかわりに、独立な二つの同一振動子に共通のランダム外力をかけた実験を行えば、上で定義した同期・非同期の区別は一目瞭然となる。すなわち、二つの振動子が同じように振舞うようになればそれらはランダム外力に同期しており、ばらばらに振舞えば同期が破れている。

Mainen と Sejnowski の実験ではランダム外力の強度は弱いとはいえないが、寺前・田中が示したように、位相縮約法を適用すれば少なくとも弱いランダム外力に対しては振動子は常に同期するという結果が得られる [9]。寺前・田中の方法とは多少異なるが、同じ結果は概略以下のようにして得られる。外力の弱さをあらわに示すために微小パラメタ ϵ を導入して、(3.15) 式を

$$\dot{\phi} = \omega + \epsilon Z(\phi)\xi(t) \quad (3.31)$$

と書く。 ξ は通常の大きさをもつ。上式の一つの解を $\phi(t)$ とし、 $\phi(t) \rightarrow \phi(t) + \psi(t)$ として、 ψ について (3.31) を線形化すると

$$\dot{\psi} = \epsilon Z'(\phi)\xi(t)\psi. \quad (3.32)$$

これは時間的にゆらぐ成長率をもつ線形方程式であり、いわゆる乗法確率過程を表している。リヤプノフ指数 λ は成長率 $\epsilon Z'(\phi)\xi(t)$ の長時間平均であたえられ、ノイズ $\xi(t)$ が統計的に定常なら、それは ξ による統計平均に等しい。すなわち

$$\lambda = \epsilon \langle Z'(\phi(t))\xi(t) \rangle_{\xi}. \quad (3.33)$$

以下では微小な ϵ の仮定の下に λ を近似的に評価する。時間 $t \ll \epsilon^{-1}$ に対して (3.31) を時間積分すると

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t + \epsilon \int_0^t ds Z(\phi(t-s))\xi(t-s)$$

$$\simeq \phi_0 + \omega t + \epsilon \int_0^t ds Z(\phi_0 + \omega t - \omega s) \xi(t-s). \quad (3.34)$$

ただし, $\phi(0) = \phi_0$ とする. よって λ の表式に現れる $Z'(\phi)$ は

$$\begin{aligned} Z'(\phi(t)) &\simeq Z'(\phi_0 + \omega t + \epsilon \int_0^t ds Z(\phi_0 + \omega t - \omega s) \xi(t-s)) \\ &\simeq Z'(\phi_0 + \omega t) + \epsilon Z''(\phi_0 + \omega t) \int_0^t ds Z(\phi_0 + \omega t - \omega s) \xi(t-s). \end{aligned} \quad (3.35)$$

としてよい. ノイズの時間相関 $C(t)$ は有限の相関時間 τ をもち, 上で選んだ t は $t \gg \tau$ を満たすとする. じつさい, ϵ が十分小さければこのような t を選ぶことは可能である. よって, 初期位相 ϕ_0 の確率密度 $P(\phi_0)$ を用いると, λ は

$$\lambda \simeq \int_0^\infty ds C(s) \int_0^{2\pi} d\phi P(\phi_0) Z''(\phi_0 + \omega t) Z(\phi_0 + \omega t - \omega s) \quad (3.36)$$

と表される. 初期位相の分布は最低次の近似で一様分布としてよく, また時間積分の上限 t はノイズの相関時間より十分大きいということからこれを無限大としてよいので

$$\begin{aligned} \lambda &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds C(s) \int_0^{2\pi} d\phi Z''(\phi) Z(\phi - \omega s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds C(s) \int_0^{2\pi} d\phi Z'(\phi) Z'(\phi - \omega s) = -\frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 |Z_l|^2 |\xi_l|^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

となって, $\lambda < 0$ が示されたことになる. なお, 白色ガウスノイズの場合にはフォッカー・プランク方程式による方法からも同様の結果が導かれている [10].

4 集団同期現象と複雑な集団運動

複数の振動子が順位相結合で相互作用すると, 振動子の性質が同一ならば位相は完全に揃い, 一体となって振動する. 振動子間に自然振動数のばらつきがあると, それは位相関係を乱す働きをもつ. ばらつきが大きすぎると振動子は互いに独立に振る舞い, 集団全体としては明確な振動を示さなくなるだろう. 集団のサイズが無限大の極限で, これは一種の相転移現象 (集団引き込み転移) として現れる. 位相振動子モデルを用いてこのような転移現象の存在を最初に主張したのは A. ウィンフリ (1967) である [11]. しかし, ウィンフリのモデルは, 位相縮約の第二段階である平均化を実行した後の標準形になっていないためにその解析的取り扱いが困難であった. 1975 年に筆者が提案したモデル [12] は (位相縮約理論に基づいているわけではないが) 標準化された相互作用形をもっており, かつその最も単純な場合であることから解析的取り扱いが可能である. また, 自然振動数のばらつきかわりに各振動子にノイズがかかった場合でも同様の相転移が現れる [1].

振動子が互いに逆位相結合ないしより一般の位相結合をもつときには, たとえ構成振動子が同一でも集団の振る舞いは必ずしも単純ではない. 複雑な振る舞いの典型としてクラスタリングとスロー・スイッチングという現象がある.

この節では, 前半で集団引き込み転移の理論の概略を述べ, 関連するいくつかの問題に触れたあと, 後半では集団のより複雑なダイナミクスについて述べる.

4.1 集団引き込み転移の可解モデル

いわゆる Kuramoto model と呼ばれるモデルは次式で表される [13].

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i). \quad (4.1)$$

これはどの振動子も他のすべての振動子と同じ強さで相互作用する大域結合系である。位相結合関数は $\Gamma(\psi) = -N^{-1}K \sin \psi$ だから、 $K > 0$ なら（以下そのように仮定する） $\Gamma'(0) < 0$ であり、したがって順位相結合である。自然振動数 ω_i は分布関数 $g(\omega)$ にしたがって分布している。 $g(\omega)$ は ω_0 を中心とするひと山の滑らかな関数とする。たとえば、ローレンツ分布 $\pi^{-1}\gamma/\{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2\}$ はその例である。 $\phi_i \rightarrow \omega_0 t + \phi_i$ と変数を置き換えれば、 ω_i の分布 g は 0 を中心とするひと山分布になる。以下での扱いはそれに従う。理論的には $N \rightarrow \infty$ の極限を考える。

位相 ϕ_i は単位円上の一点で表示できる。すなわち極座標表示によるその角度が ϕ_i である。集団全体の瞬時的状態は、単位円上にばらまかれた N 個の点で表される。集団振動の強度を測る量として、複素オーダーパラメタ $R \exp(i\Theta)$ を次式で導入するのが便利である。

$$R \exp(i\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\phi_j). \quad (4.2)$$

単位円上の N 個の状態点を複素表示したとすれば、オーダーパラメタはその平均値に等しい。あるいは、 N 個の状態点を同一質量の質点と考えれば、オーダーパラメタはその重心の位置に等しい。状態点がまったくランダムに（一様に）分布していれば、 $R = 0$ となって集団としては定常であり、分布に偏りがあれば $R \neq 0$ となり、状態点の「塊」が回転することでオーダーパラメタも回転する。これは集団振動の存在を示している。

(4.1) 式は、オーダーパラメタを用いて

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + KR \sin(\Theta - \phi_i) \quad (4.3)$$

と表される。オーダーパラメタをあたえられた量と見なせば、これは 1 振動子運動の方程式である。しかし、一般に時間変化する $R(t)$, $\Theta(t)$ に対してこれを解析的に解くことは不可能である。幸い、単位円上の位相分布 $f(\phi, t)$ は十分時間が経過した後は定常回転する一定の形の分布に落ち着くことが期待され、その場合オーダーパラメタの振る舞いはきわめて単純なものになる。じっさい、オーダーパラメタは

$$R \exp(i\Theta) = \int_0^{2\pi} f(\phi, t) \exp(i\phi) d\phi \quad (4.4)$$

と書かれるから、分布 $f(\phi, t)$ が一定の形を保ちながらある角速度 Ω で回転するなら、すなわち $f(\phi, t) = f(\phi - \Omega t)$ なら、オーダーパラメタは

$$R = \text{const.}, \quad \Theta = \Omega t + \Theta_0 \quad (4.5)$$

のように振舞う。以下ではそのように仮定する。この仮定の正当性は事後的に確かめられる。系の対称性から、 Ω は振動数分布の中心に一致する、すなわち目下の取り扱いでは 0 に等しいと期待される。よって $\Theta = \Theta_0$ となるが、 $\Theta_0 = 0$ としてよい。これは分布の位相を $\int_0^{2\pi} f(\phi) \sin \phi d\phi = 0$ が成り立つように選ぶことを意味する。したがって、 R は

$$R = \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos \phi d\phi \quad (4.6)$$

となり、これによって (4.3) 式は

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - KR \sin \phi_i \quad (4.7)$$

となる。(4.7) は各 ϕ_i について簡単に解くことができ、その解は R をパラメタとして含む。これらの解の総体が定常分布 $f(\phi)$ を (R の関数として) 決めるから、(4.6) 式の右辺が R で表され、結局 R が R 自身の関数として表されるというセルフ・コンシステントな方程式が得られることになる。

ところが, $t \rightarrow \infty$ における (4.7) の解は一般に定常とは限らない. それにもかかわらず, このような解の総体で構成される分布 $f(\phi)$ の定常性は仮定されている. これは一見奇妙に見えるが, 以下に見るように何の矛盾もない. まず, (4.7) の解が2つのグループ A と B に分かれることに注意する.

グループ A: $|\omega_i| < KR$ が成り立つ部分集団

これは分布 g の比較的中心に近い振動子群に対応し, オーダーパラメタの振動に同期する部分集団である. (4.7) は定常解

$$\phi_i = \sin^{-1} \frac{\omega_i}{KR} \quad (4.8)$$

をもつ. 2つの定常解のうち安定な解は $|\phi_i| < \pi/2$ をみたす解である. 振動子の真の振動数 $\tilde{\omega}_i$ はすべオーダーパラメタの振動数すなわち 0 に等しくなる. この部分集団の位相分布を $f_A(\phi)$ としよう. 各 ϕ_i は ω_i によって決まるから, ω_i の分布 $g(\omega)$ によって $f_A(\phi)$ が決まる. すなわち,

$$f_A(\phi) = g(\omega(\phi)) \left| \frac{d\omega}{d\phi} \right| = KRg(KR \sin \phi) \cos \phi. \quad (4.9)$$

グループ B: $|\omega_i| > KR$ が成り立つ部分集団

これは分布 g の裾を構成する振動子群で, オーダーパラメタの振動に同期できない振動子群に対応している. この場合 (4.7) は定常解をもたず,

$$\phi_i = \tilde{\omega}_i + h(\tilde{\omega}_i t) \quad (4.10)$$

の形のドリフトする解が得られる. 2π 周期関数 h の形もわかるが, 以下の議論では必要ない. 真の振動数 $\tilde{\omega}_i$ は

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \left(\frac{KR}{\omega_i} \right)^2} \quad (4.11)$$

であたえられる. 上式は, 真の周期 $2\pi/\tilde{\omega}_i$ が $\int_0^{2\pi} (d\phi_i/dt)^{-1} d\phi_i$ に等しいことから容易に得られる. 個々の ϕ_i はこのように時間変化するが, その総体から成る位相分布 $f_B(\phi)$ は一定と期待される. なぜなら, 無数の ϕ_i から成る f_B はその統計的ゆらぎが無視できるからである. その結果, f_B は ϕ_i の単位円上の不変密度 (すなわち滞在確立密度) $p(\phi_i, \omega)$ を単に重ね合わせたものであたえられることになる. ある位相点 ϕ における不変密度は, そこを通過する速度に逆比例するから,

$$p(\phi, \omega) \propto \frac{1}{\omega - KR \sin \phi}. \quad (4.12)$$

よって

$$f_B(\phi) = \int_{|\omega/KR| > 1} g(\omega) p(\phi, \omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{KR}^{\infty} x g(x) \frac{\sqrt{x^2 - (KR)^2}}{x^2 - (KR \sin \phi)^2} dx \quad (4.13)$$

上の積分中, 因子 $\sqrt{x^2 - (KR)^2}$ は $p(\phi, \omega)$ の規格化因子である. 実はこのグループの振動子はオーダーパラメタに寄与しない. それは, 偶奇性から

$$\int_0^{2\pi} f_B(\phi) \cos \phi d\phi = 0 \quad (4.14)$$

が恒等的に成り立つからである. よって, オーダーパラメタに対するセルフコンシステント方程式は

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} f_A(\phi) \cos \phi d\phi = KR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(KR \sin \phi) \cos^2 \phi d\phi \equiv S(R) \quad (4.15)$$

となる. なお, 一般の位相結合関数に対しては, 非同期部分集団 B はオーダーパラメタに寄与しない.

$S(R)$ は S 字型の奇関数であり, $R = 0$ は常に (4.15) の解である. これは集団振動の不在に対応する解である. 結合力 K が十分小さければこの解しか存在しないが, $K > K_c$ では 0 でない非自明な解が現れる. 臨界結合強度 K_c は $S'(0) = 1$ から決まり,

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (4.16)$$

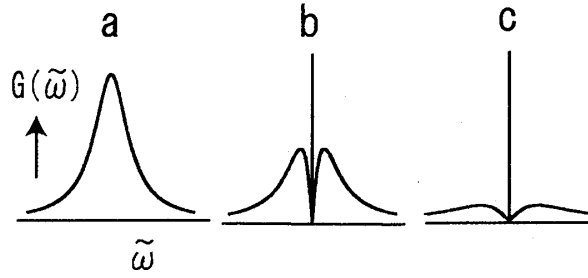


図 3: 振動数 $\tilde{\omega}$ の分布. $K < K_c$ では (a) のように自然振動数の分布 $g(\omega)$ に一致し, $K > K_c$ では (b), (c) のようにデルタ・ピークと凹みのある特徴的な分布を示す. K の増大とともにデルタ・ピークの強度は増し, 連続スペクトル部分の強度は減少する.

であたえられる. $K = K_c$ の近傍では R は小さいと期待されるから, $S(R)$ をテーラー展開すると, (4.15) 式は

$$R - S(R) = R \left(1 - \frac{\pi}{2} K g(0) - \frac{\pi^3}{16} g''(0) R^2 + O(R^4) \right) \quad (4.17)$$

となる. g は対称なひと山分布であるという仮定によって $g''(0) < 0$ だから, $(K - K_c)/K_c \equiv \epsilon$ が十分小さいとき,

$$R = \alpha \sqrt{\epsilon}, \quad (4.18)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{8g(0)}{K_c^2 |g''(0)|}} \quad (4.19)$$

のように, オーダーパラメタは 2 次相転移の古典論と同じく $\sqrt{\epsilon}$ に比例した振る舞いを示す.

集団振動の発生とともに, ボーズ・アインシュタイン凝縮に似て集団の一部が同一の振動数状態に落ち込む一種の振動数凝縮を起こす. 凝縮した振動子の個数を N_A とすると, 全振動子数に対するその割合 $r = N_A/N$ は

$$r = \int_{-KR}^{KR} g(\omega) d\omega = 2KRg(0) + O(R^3) \quad (4.20)$$

のようにほぼ R に比例して増大する. 振動数凝縮が起こると, 真の振動数の分布 $G(\tilde{\omega})$ は自然振動数の分布 $g(\omega)$ とは異なった分布になる. $G(\tilde{\omega})$ はグループ A から来る $G_A(\tilde{\omega})$ とグループ B から来る $G_B(\tilde{\omega})$ の和であたえられ,

$$G_A(\tilde{\omega}) = r\delta(\tilde{\omega}), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} G_B(\tilde{\omega}) &= g(\omega(\tilde{\omega})) \left| \frac{d\omega}{d\tilde{\omega}} \right| \\ &= g\left(\sqrt{\tilde{\omega}^2 + (KR)^2}\right) \frac{|\tilde{\omega}|}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + (KR)^2}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる. 最後の等式では (4.11) を用いた. $K > K_c$ では $G(\tilde{\omega})$ は図 3 に模式的に示すような特徴的なスペクトルをもつ. そこでは A グループ (凝縮体) はデルタ・ピークを作り, B グループは中心に落ち込みをもつ連続スペクトルをあたえる.

$g(\omega)$ がローレンツ分布

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (4.23)$$

であたえられる場合には, オーダーパラメタ, $G(\tilde{\omega})$, 位相分布関数 $f(\phi)$ に対して解析的表式が得られる. 結果のみを示すと, $2\gamma/K \equiv \eta$ として,

$$R = \sqrt{1 - \eta} \quad (\eta \leq 1), \quad 0 \quad (\eta > 1), \quad (4.24)$$

$$r = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{1-\eta}}{\eta}, \quad (\eta \leq 1), \quad 0 \quad (\eta > 1), \quad (4.25)$$

$$G(\tilde{\omega}) = r\delta(\tilde{\omega}) + \frac{\gamma}{\pi} \frac{|\tilde{\omega}|}{\tilde{\omega}^2 + (KR)^2 + \gamma^2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + (KR)^2}}, \quad (4.26)$$

$$f(\phi) = f_A(\phi) + f_B(\phi) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{(KR)^2 + \gamma^2} + KR \cos \phi}{(KR \sin \phi)^2 + \gamma^2}. \quad (4.27)$$

4.2 集団同期理論の進展

以上に述べた集団同期の理論の元型は1975年に既にできあがっていた [12] が, これをめぐってその後さまざまな理論的一般化が試みられ, 現在に至っている. そのうちのいくつかを以下箇条書き的に述べる [14].

1. $g(\omega)$ がダブルピークをもつ場合について

例として, 対称な $g(\omega)$ が

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{(\omega - \omega_0 + \Delta\omega)^2 + \gamma^2} + \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + \gamma^2} \right) \quad (4.28)$$

のようにダブルピークをもつ場合を考えよう. J.D.Crawford によれば [15], $\Delta\omega$ の値によって転移のようすは定性的に異なる. すなわち, その臨界値 $\Delta\omega_c = \gamma$ が存在し, $\Delta\omega < \Delta\omega_c$ では $K = K_c$ で逆分岐 (subcritical bifurcation) が起こり, $\Delta\omega > \Delta\omega_c$ では2つのピーク $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ の近傍から同時に正常分岐 (supercritical bifurcation) が起こって2つの独立な同期クラスターが生じる. K の増大とともにこれらのクラスターはやがて1つに融合する.

2. 分布関数によるアプローチ

先の理論では確率論的な考え方が用いられたが, そうであれば位相分布関数による方法がより自然だと考えられる. ただし, 自然振動数が分布しているシステムなので, 位相分布 $f(\phi, t)$ のみで閉じた記述は得られず, $f(\phi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\phi, \omega, t) g(\omega)$ によって定義される自然振動数ごとの規格化された位相分布 $\rho(\phi, \omega)$ を用いる必要がある. すなわち, 系を無限個の成分をもつ多成分系と見るのである. オーダーパラメタは

$$R = \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\phi, \omega) g(\omega) \cos \phi \quad (4.29)$$

によってあたえられ, ρ は発展方程式

$$\dot{\rho}(\phi, \omega, t) = -\frac{\partial}{\partial \phi}(V\rho), \quad (4.30)$$

$$V(\phi, t) = \omega - K \int_0^{2\pi} d\phi' \sin(\phi - \phi') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \rho(\phi', \omega', t) g(\omega') \quad (4.31)$$

$$= \omega - KR \sin \phi \quad (4.32)$$

に従う. このアプローチの一つの利点はノイズの効果も含めることができるという点にある. 実際, (4.1) に白色ガウスノイズ $\xi_i(t)$ ($\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-t')$) が加わった場合には, (4.30) はフォッカー・プランク方程式

$$\dot{\rho}(\phi, \omega, t) = -\frac{\partial}{\partial \phi}(V\rho) + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} \quad (4.33)$$

に一般化される. 上式は坂口によって解析され, 臨界点近傍でオーダーパラメタに対するセルフコンシステントな方程式

$$R = KR \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{D^2 + \omega^2} g(\omega) d\omega + O(R^2) \right) \quad (4.34)$$

が得られた [16]. 臨界点 K_c は

$$K_c = 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{D^2 + \omega^2} g(\omega) d\omega \right)^2 \quad (4.35)$$

によってあたえられる. 当然ながら, $D \rightarrow 0$ の極限では K_c は (4.16) に一致する.

3. 非同期状態の安定性

$K < K_c$ では $R = 0$ の非同期状態が安定, $K > K_c$ ではこれが不安定化すると同時に $R \neq 0$ の安定な集団振動状態が現れると期待される. $R(t)$ の緩和をシミュレーションで調べた結果もそれを支持している. しかし, (4.30) に基づいて安定性を調べてみると結果はそう単純ではない [17]. 比較的解析が易しい $K < K_c$ について述べると以下ようになる. 非同期状態は一様解 $\rho_0(\phi, \omega) = (2\pi)^{-1}$ に対応している. これが不安定化して集団振動が発生する場合には, 位相分布の基本波成分 $\exp(\pm i\phi)$ がまず不安定成長すると考えられるので,

$$\rho(\phi, \omega, t) = \rho_0 + c(\omega, t) \exp(i\phi) + \bar{c}(\omega, t) \exp(-i\phi) \quad (4.36)$$

と置いて, $c(\omega, t)$ について (4.30) を線形化する. すなわち,

$$\dot{c}(\omega, t) = -i\omega c(\omega, t) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega', t) g(\omega') d\omega' \equiv L. \quad (4.37)$$

これから L のスペクトルを求めると, 連続スペクトル $\lambda = i\omega$ が常に存在すること, および $K > K_c$ で正の離散スペクトルが現れることがわかる. 前者は, $c(\omega') = 0, (\omega' \neq \omega)$ に対応するスペクトルであり, その場合 (4.36) における結合項が消えることから, $\lambda = i\omega$ は明らかである. 後者を求めるには, $c(\omega, t) = b(\omega) \exp(i\lambda t)$ と置いて得られる式

$$\frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\lambda + i\omega} d\omega = 1 \quad (4.38)$$

から結論される [18]. このように, 純虚数の連続スペクトルが存在するという事実から, 直感に反するようであるが $K < K_c$ で非同期状態は中立安定であることがわかる. しかし, これはオーダーパラメタが $K < K_c$ でゼロに減衰するというシミュレーションの事実とは矛盾しない. オーダーパラメタの線形領域でのダイナミクスを調べるために, (4.29) と (4.36) から得られる式

$$R(t) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, t) g(\omega) d\omega \quad (4.39)$$

に注意する. これより (4.37) の結合項は R に比例することがわかり, 同式を積分すれば

$$\dot{c}(\omega, t) = -i\omega c(\omega, t) + \frac{K}{2\pi} \int_0^t \exp(-i\omega\tau) R(t - \tau) d\tau \quad (4.40)$$

となる. これに再び (4.39) を適用すれば, $R(t)$ に対する閉じたダイナミクス

$$R(t) = S(t) + \frac{K}{2} \int_0^t R(t - \tau) \hat{g}(\tau) d\tau \quad (4.41)$$

が得られる. ここに, $S(t) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, 0) g(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$, $\hat{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega$ である. 上式は無衝突プラズマにおけるランダウ減衰の理論に表れる式に類似し, ラプラス変換を用いて $R(t)$ の挙動を一般の場合に解析できる [17]. 簡単な場合として, 初期分布が一様 ($c(\omega, 0) = \pi^{-1}$) で $g(\omega)$ がローレンツ分布 (4.23) であたえられる場合を考えると, $R(t)$ の長時間振る舞いは

$$R(t) = \exp \left(\left(\frac{K}{2} - \gamma \right) t \right) = \exp \left((K - K_c) t \right) \quad (4.42)$$

となり, $K < K_c$ では R は確かに 0 に減衰し, 臨界点近傍でその緩和はスローダウンする.

4. 中心多様体縮約と臨界指数

J.D.Crawford は臨界点近傍で (4.30) に対する中心多様体縮約を実行した [15]. $K < K_c$ で常に虚軸上に連続スペクトルが存在するため, 通常のホップ分岐における縮約のように単純ではないが, オーダーパラメタに対する小振幅方程式の形は正常ホップ分岐の場合と同様に $\dot{R} = \lambda R - \mu R^3$, $\mu > 0$ の形であたえられる. したがって, オーダーパラメタは二次相転移の古典論と同じく, $R \propto (K - K_c)^{1/2}$ のように臨界指数 $1/2$ をもつ.

ところが, ホップ分岐に似た上記のようなオーダーパラメタの振る舞いは, 位相結合関数が $\sin(2(\phi - \phi' + \alpha))$ のように 2 次の高調波成分を持つ場合には成り立たない. じっさい, 大同はセルフコンシステント法によって $R \propto K - K_c$ のように臨界指数が 1 になることを見出した [19]. また, Crawford は一般的な位相結合関数に対する中心多様体縮約の理論を展開し, この事実を含むより一般的な結果を得た [20].

4.3 複雑な集団ダイナミクス

以上は振動子が互いに順位相結合で相互作用しているシステムについての話であった. 順位相ではないより一般の結合をもつ場合には, 自然振動数のばらつきやノイズなどのランダムネスが存在しなくても大域結合振動子集団の挙動はそれほど単純ではない.

$\psi_i \equiv \phi_i - \omega t$ を用いると大域結合振動子系は

$$\dot{\psi}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\psi_i - \psi_j) \quad (4.43)$$

と表される. いくつかの典型的な集団状態を列記すると

- A. 完全に位相が揃った状態 (または 1 クラスター状態)
- B. 位相が一様にばらけた状態
- C. 位相が揃ったいくつかの部分集団に分かれる場合 (クラスター化状態)
- D. それ以外のより複雑な集団状態

となるであろう.

状態 A の安定性

集団全体が位相 ψ_c に揃っているとする. その運動は明らかに $\dot{\psi}_c = \Gamma(0)$ で表される. 位相の微小なばらけに対するこの状態の安定性を見るために, $\psi_i = \psi_c + \delta\psi_i$ と置くと, $\delta\psi_i$ に対する線形化方程式は

$$\delta\dot{\psi}_i = -\Gamma(0) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\delta\psi_i - \delta\psi_j) = \Gamma'(0)\delta\psi_i. \quad (4.44)$$

よって, $\Gamma'(0) < 0$ すなわち順位相結合なら状態 A は安定, そうでなければ不安定となってクラスターは崩壊する.

状態 B の安定性

$N \rightarrow \infty$ の極限を考え, 位相分布関数 $f(\psi, t)$ に対する式

$$\dot{f}(\psi, t) = -\frac{\partial}{\partial \psi} (V(\psi, t)f(\psi, t)), \quad (4.45)$$

$$V(\psi, t) = \int_0^{2\pi} d\psi' \Gamma(\psi - \psi') f(\psi', t) \quad (4.46)$$

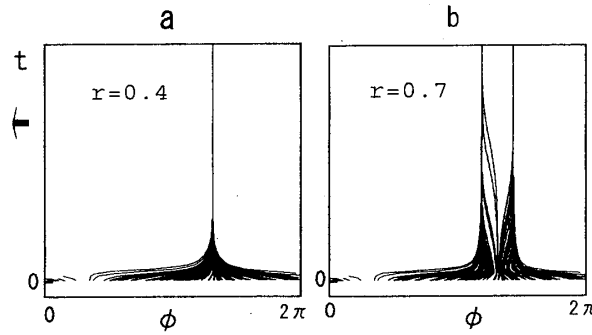


図 4: ランダムな位相分布が時間とともに変化するようす. (a) ではすべての振動子が完全に位相をそろえた 1 クラスター状態に漸近し, (b) では 2 クラスター状態に漸近する. クラスター自体が回転しないように適当な回転座標系に乗った表示を用いている.

に基づいて安定性を調べる. 一様分布 $f_0 = (2\pi)^{-1}$ の周りで $f(\psi, t) = f_0 + \delta f(\psi, t)$ と置き, (4.45) を δf について線形化する. $\delta f(\psi, t) = (2\pi)^{-1} \sum_{l \neq 0} \delta f_l(t) \exp(il\psi)$, $\Gamma(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_l \exp(il\psi)$ によって定義されるフーリエ成分 δf_l , Γ_l を用いると, 線形化方程式は

$$\delta \dot{f}_l = \sigma_l \delta f_l, \quad (4.47)$$

$$\sigma_l = l\Im \Gamma_l - il(\Gamma_0 + \Re \Gamma_l). \quad (4.48)$$

ただし $\Re \Gamma_l$, $\Im \Gamma_l$ はそれぞれ Γ_l の実数, 虚数部分である. すなわち, すべての l に対して $l\Im \Gamma_l$ が負でないかぎり位相の一様分布は不安定である. これは厳しい条件であり, 一般の位相結合関数では満たされない. 一方, 結合が順位相タイプでないという条件は $\Gamma'(0) = \sum_l il\Gamma_l = -2 \sum_{l>0} l\Im \Gamma_l > 0$ であり, 各 l に対してではなく $l\Im \Gamma_l$ の総和が負であれば満たされる. 言い換えれば, 「位相結合関数のいずれのフーリエ成分も順位相結合タイプでない」という特別の場合に限って安定である. 結合関数が $\Gamma(\phi) = -K \sin(\psi + \alpha)$, ($K > 0$) のように基本波成分のみを含む場合には, $|\alpha| < \pi/2$ なら 1 クラスター状態は安定であるかわりに一様位相分布は不安定, $|\alpha| > \pi/2$ なら 1 クラスター状態は不安定で一様位相分布は中立安定である. 後者が漸近安定でなく中立安定である理由は, $l \neq \pm 1$ に対しては $\Re \sigma_l = 0$ が成り立ち, したがって $\delta f_{\pm 1} = 0$ を満たす任意の位相分布が線形化方程式をみたすからである.

2 次の高調波を含む位相結合関数として

$$\Gamma(\psi) = -\sin(\psi + \alpha) + r \sin(2\psi), \quad (r > 0) \quad (4.49)$$

を考えてみよう. $\Gamma'(0) = -\cos \alpha + 2r$, $\Gamma'(\pi) = \cos \alpha + 2r$ だから, $r > \frac{1}{2} \cos \alpha$, $r > -\frac{1}{2} \cos \alpha$ の両条件が満たされる場合には順位相結合でもなく逆位相結合でもない, いわゆる out-of-phase 結合となって振動子対は 0 でも π でもないある位相差で安定化する. たとえば $r = 1/4$ の場合, $\pi/3 < |\alpha| < 2\pi/3$ ならこの条件は満たされる. このような結合をもつ大域結合集団がいかなる挙動を示すかはそれほど自明ではない. 図 4 には $\alpha = 0$ で $r = 0.4$ と $r = 0.7$ の 2 つの場合について集団挙動がどうなるかが示されている. 前者では順位相結合なので, 当然ながら A 状態が実現される. 後者では out-of-phase 結合となるが, 図から明らかなように 2 クラスター状態が実現している. out-of-phase 結合をもつ大域結合集団では 2 クラスター状態やより一般に多クラスター状態がしばしば実現されるが, より複雑な挙動を示す場合があり, その代表的なものが以下に述べるスロー・スイッチング現象である. ただし, 紙数の関係でごく簡単に述べることにする.

スロー・スイッチング

スロー・スイッチング現象は結合が out-of-phase 型でしかも 2 クラスター状態が不安定な場合にしばしば現れる [21, 22]. そこで, 2 クラスター状態とその安定性に関する基本的なことがらをまず述べる. 集団全体が位相 ψ_A , ψ_B をもつ 2 つのクラスターに分裂しているとしよう. 2 点 A, B が円周上を左回りに回転しているイメー

ジを描いて貰えばよい。先行するクラスターを A クラスターとすると、位相差 $\Delta = \psi_A - \psi_B$ は $0 \leq \Delta < \pi$ と制限される。それぞれのクラスターに含まれる振動子数を N_A, N_B とし、 $N_A/N = p, N_B/N = 1 - p$ とする。 p は初期条件によって変わりうるので、同じ 2 クラスター状態とはいっても 1 パラメタの自由度がある。 $\psi_{A,B}$ の運動が

$$\dot{\psi}_A = p\Gamma(0) + (1-p)\Gamma(\Delta), \quad (4.50)$$

$$\dot{\psi}_B = (1-p)\Gamma(0) + p\Gamma(-\Delta) \quad (4.51)$$

に従うことは明らかであろう。これら 2 式の差をとると

$$\dot{\Delta} = (2p-1)\Gamma(0) + (1-p)\Gamma(\Delta) - p\Gamma(-\Delta). \quad (4.52)$$

以下では、2 クラスター状態の意味をより正確にするため、2 つのクラスターが位相差 Δ が一定のまま等速円運動を行っている状態として定義しよう。すると $\dot{\Delta} = 0$ と置くことで Δ と p 関係が得られ

$$p = \frac{\Gamma(0) - \Gamma(\Delta)}{2\Gamma(0) - \Gamma(\Delta) - \Gamma(-\Delta)} \quad (4.53)$$

となる。因みに、クラスターが等サイズ ($p = 1/2$) の場合には、 $\Gamma(\Delta) - \Gamma(-\Delta) = \Gamma_a(\Delta) = 0$ が満たされなければならない。(2.29) と比較すればわかるように、これは振動子対の場合と同じ位相差で 2 つのクラスターが位相ロックすることを示している。このような 2 クラスター状態を S とする。また、反位相に位相ロックした 2 クラスター状態 $\Delta = \pi$ も (4.53) を満たしている。しかし、out-of-phase 型結合ではこの状態は不安定である。この不安定な 2 クラスター状態を T とする。

p を $1/2$ から少しずらすと、対称性の破れから状態 S は 2 種類の 2 クラスター状態に分裂する。これらを S, S' とする。S, S' はそれぞれ先行するクラスターのサイズ p が $1/2$ より大か小かに対応したクラスター状態を表している。状態 T も正確な反位相状態ではなくなるが分裂はなく、不安定なままに持続する。このように、一般に 3 種類の 2 クラスター状態 S, S', T が可能である。以下に述べるように、スロー・スイッチングは T とともに S, S' がいずれも不安定である場合に起こる現象である。なお、 p が $1/2$ から大きくずれると状態 S と S' が対消滅し、T のみが 2 クラスター状態として残る。以下ではこのケースは考えない。

2 クラスター状態の安定性については、以下に述べる 3 つの不安定化タイプがある。

1. 先行クラスターのクラスター内不安定性
2. 後行クラスターのクラスター内不安定性
3. クラスター間不安定性

タイプ 1 は、先行クラスターがばらけて崩壊するタイプの不安定性であり、対応する固有値 λ_1 は $pN - 1$ 重の縮重度をもつ。ここに、因子 -1 はクラスターの重心の自由度に対応している。同様に、タイプ 2 は後行クラスターがばらけて崩壊するタイプの不安定性で、対応する固有値 λ_2 は $(1-p)N - 1$ 重の縮重度をもつ。タイプ 3 では、クラスターはばらけないが、その相対距離 Δ の定常値が不安定となる。対応する固有値 λ_3 に縮退はない。これら 3 タイプの固有値の縮重度の総和に全系の重心の自由度 1 を合わせたものは当然ながら全自由度 N に等しい。

λ_1 および λ_2 に対する表式を求めるには、クラスター A または B からわずかに引き剥がした 1 つの振動子の位相 ψ に対する発展方程式

$$\dot{\psi} = p\Gamma(\psi - \psi_A) + (1-p)\Gamma(\psi - \psi_B) \quad (4.54)$$

を考えればよい。ただし、上式では簡単のため $N \rightarrow \infty$ を仮定している。 $\psi - \psi_A$ についての上式の線形化方程式から $\lambda_1 = p\Gamma'(0) + (1-p)\Gamma'(\Delta)$ が得られ、同様に $\lambda_2 = (1-p)\Gamma'(\Delta) + p\Gamma'(-\Delta)$ が得られる。また、 λ_3 は (4.53) の解 $\Delta_0(p)$ の周りで (4.52) を線形化した式から得られ、 $\lambda_3 = (1-p)\Gamma'(\Delta) + p\Gamma'(-\Delta)$ となる。

3 種類の 2 クラスター状態 S, S', T が同一パラメタの下で共存するとき、一般に T は S と S' の間の分水嶺となっているのでタイプ 3 の不安定性をもつと考えられる。以下ではそのように仮定する。このとき、S と S'

がともにタイプ1の不安定性を示すなら（即ち、先行するクラスターはばらけるが後行するクラスターはばらけないなら）スロー・スイッチングと呼ばれる奇妙な振る舞いが現れる可能性がある。（上の文中「タイプ1」を「タイプ2」に置き換えても以下の話は同様である。）その理由は概略以下のように述べられる。いま、ほとんどばらけていない点状の2つのクラスターA、Bが円周上を回転していると想像しよう。これはSに対応した2クラスター状態である。仮定によって、先行するクラスターAの小さなばらけは増大し、円周上に広がっていく。一方Bクラスターの小さなばらけはますます小さくなり、点クラスターに漸近する。しかし、仮に先行クラスターがばらけさえしなければ2つの点クラスターが回転し続ける2クラスター状態が安定なのだから、現実にはばらけてしまうAクラスターがBクラスターの背後に回って後行クラスターになれば、それは再び点クラスターに収縮し、先行する点クラスターBとともに2つの点状クラスターが回転する2クラスター状態S'が持続するはずである。実際にこれが起こる。しかし、これは真に安定な2クラスター状態ではない。先行することになったBクラスターは点状とはいえ、そのばらけは完全にゼロではなく、先行クラスターになったことでそのばらけは増大しはじめる。そうすると、AとBが入れ替わっただけで状況は元に戻る。そうして今度は溶けたBクラスターがAの背後に回って収縮し、しばらくの間2クラスター状態Sが安定に持続する。このように、系は2つの2クラスター状態SとS'の間の遷移を繰り返す。SとS'はともにN次元状態空間の中の鞍点である。したがって、上記のような振る舞いはこれらの鞍点をつなぐヘテロクリニック・ループの存在を示唆している。先に述べた固有値 λ_1 、 λ_2 の縮重度から、S、S'の不安定多様体の次元はそれぞれ $pN-1$ および $(1-p)N-1$ となるはずである。このようなヘテロクリニック・ループが安定なら、軌道はこれに巻きついていき、SまたはS'の近傍に滞在する時間は限りなく長くなっていく。このような振る舞いをスロー・スイッチングと呼ぶのはそこから来ている。シミュレーションによれば、(4.49)であたえられる結合関数のモデルに対して、適当なパラメタ領域でこのような振る舞いが実際に見られる。

ヘテロクリニック・ループは安定とは限らない。鞍点近傍に限りなく長く滞在する軌道であることから、その安定性はS、S'近傍の軌道拡大率、すなわちそれらのまわりの固有値だけで決まる。S状態における先行および後行クラスターの安定性を表す固有値を λ_1 、 λ_2 、S'状態におけるそれらを λ'_1 、 λ'_2 とすれば、ヘテロクリニック・ループが安定であるための必要十分条件は、鞍点近傍の軌道拡大率の評価から

$$\frac{\lambda_2 \lambda'_2}{\lambda_1 \lambda'_1} > 1 \quad (4.55)$$

となることが簡単な考察からわかる。

大域結合振動子系の実験

J. Hudson が率いる Virginia 大学のグループは、電気化学的振動子を用いた大域結合振動子集団の実験を行っている [23]。硫酸溶液中のニッケル電極に一定の電圧をかけると、電極を流れる電流が電気化学的理由によってリミットサイクル振動を示すことが知られているが、このグループは64個のニッケル電極を用い、適当な配線によってこれらの振動子が大域的に結合したシステムを実現した。配線の抵抗値を変えることによって、振動子間の結合強度と振動子の自然振動数を独立に制御することができる。また、電圧を変えることによって振動子の性質を滑らかな振動から緩和振動型の歪んだ振動まで自由に変化させることができる [24]。したがって、位相モデルが成り立つ弱結合の領域で大域結合集団の集団挙動をさまざまに調べることが可能になった。さらに、彼らはフィードバック制御によって位相結合関数の関数形を自由に変える方法を案出し、実験的研究の自由度はいっそう広がりつつある。集団引き込み転移、クラスター化現象、スロー・スイッチング現象等、理論が先行した諸現象がこのような実験によってすでに検証されている。

5 非局所結合系の諸問題

振動子の大量として理論的に最も扱いやすい系は前節で述べた大域結合系であろう。そこでは、各振動子が無数の振動子と結合しているために平均場理論が正確に成り立ち、したがって問題を「1振動子問題+セルフコンシステンシー条件」という形に定式化することができるからである。しかし、大域結合系は空間的自由

度を欠いた理想化されたモデルであり、現実の振動子集団の振る舞いを理解する上で大きな助けにはなっても厳しい限界がある。そこで、大域結合系の上記のようなメリットを失わずかつ空間自由度を許容するような集団モデルというものが可能かと問いたくなる。本節で述べる非局所結合モデルはこの条件をみたし、その考察を通じて振動子集団の新しい側面のいくつかが明らかになる。以下では、非局所結合振動子の代表的な縮約モデルと、それが示す二つの新奇な現象についてその概略を述べる。

5.1 非局所結合振動子系のモデル

リミットサイクル振動子 $\dot{X} = F(X)$ が非局所に結合したモデル

$$\dot{X}(r, t) = F(X) + \int \hat{G}(r - r') X(r', t) dr' \quad (5.1)$$

を考えよう。結合関数 $\hat{G}$ は一般に $n \times n$ 行列であり、結合振動子対の相対距離のみ依存し、長距離では十分すみやかに減衰するものとする。系のサイズは結合半径より十分大と仮定する。また、必要に応じて振動子の性質が均一でない系や加法的ノイズを含む系に一般化することも可能である。(5.1) のような連続場のモデルでは、結合半径がゼロでないかぎりその内部には無数の局所振動子が含まれる。したがって平均場理論の扱いが厳密に正しくなる。この事実は後で述べる具体例においてフルに活用される。

弱結合の場合、(5.1) に対して位相縮約が適用でき、その結果が

$$\dot{\phi}(r, t) = \omega + \int G(r - r') \Gamma(\phi(r, t) - \phi(r', t)) dr' \quad (5.2)$$

の形であたえられることは第2節の議論から明らかであろう。以下ではこれを非局所結合位相モデルと呼ぶ。 $G(r)$ の全空間積分は1に規格化されているとする。

個別振動子がホップ分岐点近傍にある場合には、(5.1) に対して中心多様体縮約を適用することも可能である。ただし、第1節で見たように、一般に結合振動子系の中心多様体縮約においては、弱結合の仮定が必要である。同節の議論を適用すれば、複素ギンツブルク・ランダウ方程式の拡散項を非局所結合で置き換えた式

$$\dot{z}(r, t) = (1 + i\omega)z - (1 + ic_2)|z|^2 z + K(1 + ic_1) \int G(|r - r'|) (z(r') - z(r)) dr' \quad (5.3)$$

が得られることはもはや説明を要しないだろう。以下では $K > 0$ と仮定する。 z の空間変化の特性波長 λ_p が結合半径 r_c よりも十分長ければ、上式の積分において $z(r') = z(r) + (r' - r) \partial_r z(r) + \dots$ テーラー展開してよいから、非局所結合を拡散結合で近似でき、その結果 (5.3) は通常の複素ギンツブルク・ランダウ方程式となる。もちろん、後者の解析結果が前提条件 $\lambda_p \gg r_c$ をみたしているかどうかの一貫性チェックは常に必要である。

(5.3) に対して再度弱結合を仮定すると位相縮約が適用でき、(5.2) において $\Gamma(\psi)$ が正弦関数であたえられるモデル

$$\dot{\phi} = \omega + \int G(|r - r'|) \sin(\phi(r, t) - \phi(r', t) + \alpha) dr' \quad (5.4)$$

が得られる。

(5.1) のような非局所結合モデルが適用できる状況はいろいろ考えられるが、特別な場合として、同式が次のような形をもつ振動子集団モデルの縮約形になっていることに注意する [25]。

$$\dot{X}_i = F(X_i) + g(X_i, S(r_i, t)), \quad (5.5)$$

$$\tau \dot{S}(r, t) = -\gamma S + D \nabla^2 S + \sum_{j=1}^N h(S, X_j) \delta(r - r_j). \quad (5.6)$$

このモデルは細胞性粘菌や解糖反応下の酵母細胞集団のような振動性細胞集団に似た仮想的振動子集団を表している。個別細胞に対応するリミットサイクル振動子 ($\dot{X} = F(X)$) が空間に分散しており、局所濃度 $S(r, t)$

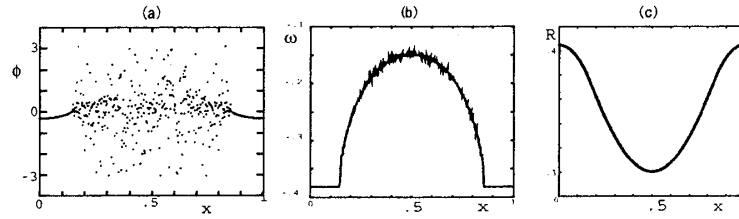


図 5: 非局所結合位相モデル (5.4) から得られた 1 次元のキメラパターン. (a) 個別振動子の位相分布 (スナッピングショット), (b) 個別振動子の振動数分布, (c) オーダーパラメタ R のパターン.

で表される拡散性物質によって振動子間相互作用が媒介されている. (5.5) の最終項は S の局所濃度による振動子の振る舞いの変化を表し, (5.6) の最終項は, 右辺第一項によるこの拡散物質の消失を補うべく各細胞からそれが生成される効果を表している. 上のモデルでは細胞相互の直接的相互作用はないと仮定しているが, それを含めた一般化は可能である. なお, 以下での議論の都合上, S の変化速度を表す時間スケール τ を (5.6) にあらわに導入しておいた.

細胞が十分密にかつ一様に分布しているなら, $\mathbf{X}_i$ を連続変数 $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ に置き換えることができ, また, 細胞の数密度 $n(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ を一定値 n_0 で置き換えることができる. その結果, (5.5), (5.6) は反応拡散モデル

$$\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, S), \quad (5.7)$$

$$\tau \dot{S} = -\gamma S + \nabla^2 S + n_0 h(S, \mathbf{X}) \quad (5.8)$$

に帰着する.

通常, 反応拡散系は局所結合系の代表のように考えられているが, 必ずしもそうではない. 事実 (5.7), (5.8) においては振動子は実効的には非局所に相互作用している. それは拡散物質 S を消去してみれば明らかである. S の発展方程式は線形であるから, 一般に S を消去することは可能である. 特に, $\tau \rightarrow 0$, すなわち S が非常に早く変化する場合には S を断熱消去できるので, (5.1) の形をもつ非局所結合系が得られる.

5.2 キメラ状態

非局所結合振動場に固有なパターンとしてキメラ状態と呼ばれる特異なパターンがある [26, 27]. これを非局所結合位相モデル (5.4) で考えてみよう. まず注意すべきことは, たとえ (5.4) のような連続空間のモデルであっても, 非局所結合系では振動子の状態に関する空間連続性は一般に保障されないという事実である. じつさい, キメラ構造は個別振動子がばらばらに振舞うインコヒーレントな領域と空間的に連続なパターンを示すコヒーレントな領域とが共存した状態である. 比較的単純な例として, (5.4) が示す 1 次元キメラを図 5 に示す. $G(y) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\kappa y)$, $\alpha = 1.457$, および周期境界条件を仮定している. $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ なので一様振動状態は安定である. しかし, さまざまな非一様状態を初期状態にとると, 系は図 5a のように, 中央領域 (C とする) でインコヒーレントな振る舞いを示し, 境界付近 (P とする) ではそれと明確に区分されたコヒーレントな振る舞いを示す. 領域 C では, 図 5b に示すように振動子は互いに異なった振動数で振動している (同期が破れている). したがって, 位相分布はランダムになるが, 分布の統計性は定常に見える. 一方, 領域 P では振動子は互いに同期し, 共通の振動数で振動している.

このような奇妙なパターンが現れる理由は, 適当なオーダーパラメタを導入すると容易に理解できる. 大域結合位相振動子系と類比的に, 複素オーダーパラメタ $R \exp(i\Theta)$ を

$$R(x, t) \exp(i\Theta(x, t)) = \int dx' G(x - x') \exp(i\phi(x', t)) \quad (5.9)$$

によって定義しよう。大域結合系のオーダーパラメタとの唯一の違いは G という重み関数がかかっていることである。これによって (5.4) は

$$\dot{\phi}(x, t) = \omega - R(x, t) \sin(\phi(x, t) - \Theta(x, t) + \alpha) \quad (5.10)$$

と書かれ、再び形式的に 1 振動子問題になる。シミュレーションによると、キメラ状態での R はひと山の対称な定常パターン $R_0(x)$ を示し、それは図 5c のように、中央で小さく周辺で大きくなっている。また、 $\Theta(x, t)$ は R を上下逆転させたような対称パターン $\Theta_0(x)$ をもち、

$$\Theta(x, t) = \Theta_0(x) + \Omega t \quad (5.11)$$

のように一定速度 Ω でドリフトしている。 R_0 のプロフィールから次のことがわかる。すなわち、C 領域では個別振動子はオーダーパラメタによる強制振動外力が弱いためそれに同期できない。しかたがって R_0 の局所的な値に依存した振動数で互いに独立に振動する。これに対して P 領域ではオーダーパラメタによる強制力が強いのでその振動数 Ω に同期する。同期と非同期を分かちオーダーパラメタの臨界値を R_{th} とし、それに対応する空間点を $x = \pm x_c$ としよう。上記のような定性的考察を基にして、大域結合系の集団同期理論とほとんど同じ理論を以下のように定式化することができる。

遅い位相変数 $\psi(x, t) \equiv \phi(x, t) - \Omega t$ を用いると、 $R(x, t) = R_0(x)$ および (5.11) の仮定の下に (5.9), (5.10) はそれぞれ

$$R_0(x) \exp(i\Theta_0(x)) = \int dx' G(x - x') \exp(i\psi(x', t)), \quad (5.12)$$

$$\dot{\psi}(x, t) = \omega - \Omega - R_0(x) \sin(\psi(x, t) - \Theta_0(x) + \alpha) \quad (5.13)$$

となる。 $R < R_{th}$ なら (5.13) は平衡解

$$\psi_e(x) = \sin^{-1}\left(\frac{\omega - \Omega}{R_0(x)}\right) + \Theta_0(x) - \alpha \quad (5.14)$$

をもち、 $R < R_{th}$ ならドリフト解 $\psi_d(x, t)$ をもつ。シミュレーションで得られた $R_0(x)$ の対称なひと山パターンから、(5.12) の空間積分は P 領域と C 領域に区分され

$$\begin{aligned} R_0(x) \exp(i\Theta_0(x)) &= \int_{|x| > x_c} G(x - x') \exp(i\psi_e(x')) dx' \\ &+ \int_{|x| < x_c} G(x - x') \exp(i\psi_d(x', t)) dx' \end{aligned} \quad (5.15)$$

と書ける。上式右辺に ψ_e と ψ_d の表式を適用すればよいのだが、前者に関しては問題なく (5.14) をそのまま代入すればよいのに対して、後者は時間依存解であるために直接その表式を代入することはできない（時間的に一定な同式左辺と見かけ上矛盾する）。大域結合系でも同じ問題があることはすでに見たとおりであるが、そこで行ったのと同様に因子 $\exp(i\psi_d)$ をその統計平均 $\langle \exp(i\psi_d) \rangle$ で置き換えることでこの問題は解決される。統計平均は ψ_d のドリフト速度に逆比例する確率密度を用いて計算される。これを実行すると、オーダーパラメタがそれ自身の汎関数で表されるセルフコンシステントな汎関数方程式

$$R_0(x) \exp(i\Theta_0(x)) = H(R_0(x'), \Theta_0(x'), \Omega) \quad (5.16)$$

が得られる。この式は数値的にしか解くことはできない。また、 Ω も未知量であり、その特別な値に対してのみ (5.16) は解をもつ。したがって、(5.16) は一種の非線形固有値問題とみなされる。(5.16) の数値解はシミュレーションで得られたオーダーパラメタのプロフィール $R_0(x)$ を正確に再現する。このようにして $R_0(x)$ がわかれば、(5.13) から真の振動数 $\bar{\omega}(x)$ の空間分布もわかり、これについてもシミュレーションの結果を非常によく再現する。なお、上記のような 1 次元キメラ構造の理論の拡張版が Abrams と Strogatz によって提出

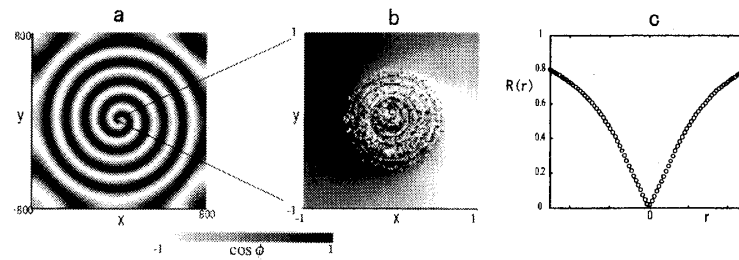


図 6: キメラ構造をもつらせん波パターン. (a) のように全体のパターンは正常ならせん波パターンに似ているが, 中心付近では (b) のように振動子の位相はまったくばらばらになっている. オーダーパラメタの振幅 R の動径方向に沿ってのプロフィールは, (c) のように正常ならせん波と何ら変わらない.

されている [28]. 「キメラ」という名称も彼らの発案による.

回転らせん波のキメラ状態

上に述べた 1 次元のキメラパターンは, キメラが生じる理由とその理論的取り扱い法をわかりやすく示す一例となっているが, 物理的にそれほど現実味のあるパターンとは思えない. より興味深い例として, 2 次元回転らせん波のキメラ状態がある. 2 次元系において適当な初期条件の下で非局所結合位相方程式 (5.4) のシミュレーションを行い, 得られたパターンが図 6 に示されている. 結合強度は $G(r) = (2\pi)^{-1}\kappa^2 K_0(\kappa r)$ と仮定している. ここに, $K_0(r)$ は第二種変形ベッセル関数で, (5.7), (5.8) タイプのモデルで S を断熱消去したとき, 2 次元系で現れる非局所結合がちょうどこの形をもっている. 図のパターンは一見ふつうのらせん波パターンと変わらないが, コア付近を拡大して見ると異常性があることがわかる. すなわち, 円形にくりぬかれた領域の内部がインコヒーレントになっており, そこでは振動子がばらばらに振舞っている. オーダーパラメタの振幅 $R(r)$ は, 境界効果による小さな歪みを別にすればほぼ等方的 ($R(r) = R_0(r)$) で, 図 6c のように中心でほぼゼロになっている. この事実から, キメラが生じる理由が前例と同様に解釈できることは説明を要しないだろう. キメラらせん波の理論的扱いも前例と本質的に異なることなく, オーダーパラメタに対するセルフコンシステントな方程式は, シミュレーションで得られたオーダーパラメタのプロフィールや振動数の空間分布を非常に良く再現する.

位相振動子モデルでらせんパターンを論じることは通常は許されないと考えられている. それはらせん波の回転中心が位相特異点 (位相が定義できない点) だからである. しかし, これは場の空間的連続性を前提とした場合の話であり, 連続性が破れればこの例のように位相特異点が存在しないらせんパターンが可能である. 因みに, オーダーパラメタについて言えば, 回転中心でその振幅はゼロだから, そこは位相特異点になっている. このような特異ならせん波は位相モデルに固有なものではない. じっさい, 振幅自由度を含む非局所結合複素ギンツブルク・ランダウ方程式 (5.3) や, (5.7) と (5.8) であたえられる反応拡散モデルに対してさえ, 適当なパラメタ条件の下で図 6 と同様のキメラらせん波が得られることが確認されている [27].

5.3 ノイズを含む系の長距離コヒーレンス

(5.2) で表される非局所結合位相振動子モデルに外部ノイズがかかった系

$$\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = \omega + \int G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \Gamma(\phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}', t)) d\mathbf{r}' + \xi(\mathbf{r}, t) \quad (5.17)$$

は, さまざまな理論解析が可能なモデルで, これを用いて振動場の長距離コヒーレンスの発生や乱流状態 (時空カオス) 等を論じることができる [29, 30]. ここに, ノイズは平均値 0 の白色ガウスノイズで, $\langle \xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r}', t) \rangle = 2D\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')$ とする. 以下では簡単のため 1 次元系を考えるが, 一般次元でも議論の本質はまったく変わらない. (5.17) の解析的取り扱いが可能な理由は, 先にも述べたとおり平均場理論が適用できるからであるが, 具体的は以下のとおりである.

空間自由度を含む位相分布関数 $f(\phi, x, t)$ を用いると (5.17) は

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(x, t) &= \omega + \int dx' G(x - x') \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi - \phi') f(\phi', x', t) + \xi(x, t), \\ &\equiv V(\phi, x, t) + \xi(x, t)\end{aligned}\quad (5.18)$$

と表される。これは形式的にはドリフト速度 $V(\phi, x, t)$ をもちランダム外力を受けた1振動子のダイナミクスを表すとみなされるので、 $f(\phi, x, t)$ はフォッカー・プランク方程式

$$\begin{aligned}\dot{f}(\phi, x, t) &= -\frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left(\omega + \int dx' G(x - x') \int_0^{2\pi} d\phi' \Gamma(\phi - \phi') f(\phi', x', t) \right) f(\phi, x, t) \right\} \\ &\quad + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f(\phi, x, t)\end{aligned}\quad (5.19)$$

に従う。(4.30)についてもそうであったが、ドリフト項自身が分布関数を含むので、このような方程式は非線形フォッカー・プランク方程式と呼ばれる。非線形フォッカー・プランク方程式は散逸を含む決定論的な非線形発展方程式であり、通常の散逸力学系に対してと同様に分岐解析やさまざまな縮約法が適用できる。以下では、これまでも繰り返し述べてきた中心多様体縮約法と位相縮約法が (5.19) にどのように適用されるか、またそれによって何がわかるかについて簡潔に述べたい。

長距離コヒーレンスの発生と中心多様体縮約

位相振動子モデルはいうまでもなく安定なリミットサイクル振動の存在を前提としており、したがって順位相結合をもつ同一の位相振動子から成る集団は完全に位相がそろった集団振動を示す。しかし、ノイズが存在するとこのようなコヒーレンスは不完全になり、ノイズ強度がある限界を超えると長距離のコヒーレンスは失われると期待される。このような、ノイズを含む系での集団振動の消失・発生は (5.19) の解のホップ分岐に対応している。したがって、ホップ分岐点近傍で同式に中心多様体縮約を適用することによってこのような転移のようすを詳しく知ることができる。

(5.19) の自明な一様解 $f_0 = (2\pi)^{-1}$ は集団振動が消失したインコヒーレントな状態に対応している。 $f(\phi, x, t) = f_0 + \eta(\phi, x, t)$ と置いてその安定性を調べよう。ノイズのない場合の安定性解析は第4節で述べたとおりであるが、今の場合にはノイズを含みかつ位相結合関数は順位相型と仮定している。 η と Γ のフーリエ成分 $\eta_l(x, t)$, Γ_l を用いると (5.19) は

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_l(x, t) &= -\{l^2 D + il(\omega + \Gamma_0)\} \eta_l(x, t) - il\Gamma_l \int dx' G(x - x') \eta_l(x', t) \\ &\quad - il \int dx' G(x - x') \sum_{l \neq 0, m} \Gamma_m \eta_m(x', t) \eta_{l-m}(x, t)\end{aligned}\quad (5.20)$$

となる。ノイズ強度 D を制御パラメタと見て、これを小さくしていくとき、 $l = \pm\lambda$ に対して最初の振動不安定性が現れるとする。たとえば指数関数のような典型的な結合強度 $G(x)$ に対しては、その空間フーリエ成分の中で一様な成分が最大振幅をもつが、その場合には $\eta_{\pm\lambda}(x)$ の空間フーリエ成分の中で空間一様モードが最初に不安定化することは容易にわかる。したがって、臨界点近傍では $\eta_{\pm\lambda}$ を主成分とする場 $\eta(x, t)$ の空間変化はきわめて緩やかになると期待される。その結果、(5.20) の非線形項における G を単独に空間積分することが許され、同式は

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_l(x, t) &\simeq \sigma_l(x, t) \eta_l(x, t) - il \sum_{m \neq 0, l} \Gamma_m \eta_m(x, t) \eta_{l-m}(x, t) \\ &\quad - il\Gamma_l \int dx' G(x - x') (\eta_l(x', t) - \eta_l(x, t)),\end{aligned}\quad (5.21)$$

$$\sigma_l = (l\Im\Gamma_l - l^2 D) - il(\omega + \Gamma_0 + \Re\Gamma_l)\quad (5.22)$$

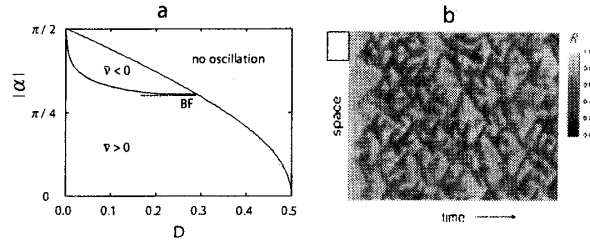


図 7: ノイズを含む非局所結合位相モデル (5.17) が示す乱流状態. 空間は 1 次元で, $\Gamma(\psi) = -\sin(\psi + \alpha)$, $G(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$ を仮定. (a) ノイズ強度 D と α の 2 次元パラメタ空間で実効的な位相拡散係数 ν が負となる領域が存在し, そこで系は乱流状態となる. (b) 乱流状態においてオーダーパラメタの振幅 R が示す時空パターン.

と近似される. (5.21) の最終項は大域結合の極限で消える. また, この項は η の長波長性から拡散近似してよい. それによって系は本質的に反応拡散系となる. 詳細は省くが,

$$\eta(\phi, x, t) = (2\pi)^{-1} \left\{ z(x, t) \exp(i(\lambda\phi - \Omega t)) + c.c. \right\} + \text{small correction} \quad (5.23)$$

と置いて, 中心多様体縮約法の常道に従うことにより, 複素ギンツブルク・ランダウ方程式

$$\dot{A} = (D_c - D)\lambda^2 A - g|A|^2 A + d \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (5.24)$$

が得られる. ここに

$$d = -i\lambda\Gamma_\lambda, \quad (5.25)$$

$$g = \frac{\lambda\Gamma_\lambda(\Gamma_{2\lambda} + \Gamma_{-\lambda})}{2\Im\Gamma_\lambda - i(\Re\Gamma_\lambda - \Gamma_{2\lambda})}. \quad (5.26)$$

d, g ともに位相結合関数だけで決まることに注意されたい. 複素ギンツブルク・ランダウ方程式の空間一様振動解は条件によって不安定化するが, これはベンジャミン・フェア (BF) 不安定性と呼ばれ, これが起これると場は時空カオス化する [4]. $\Im d / \Re d = a$, $\Im g / \Re g = b$ と置くと, BF 不安定が起これるための条件は

$$1 + ab < 0 \quad (5.27)$$

であたえられる. 具体的な位相結合関数のいくつかに対してこの条件が満たされるか否かを調べることは興味がある. 最も単純な順位相結合関数として $\Gamma(\phi) = -K \sin(\phi + \alpha)$, ($K > 0$, $|\alpha| < \pi/2$) を考えると, $d = \exp(i\alpha)/2$, $g = (4\cos\alpha + 2i\sin\alpha)^{-1}$ となって, $\tan^2\alpha > 2$, すなわち $0.9553 \dots < |\alpha| < \pi/2$ で BF 不安定であり, 場は乱流化する. ノイズが存在しなければ一様振動は完全に安定であるから, このような乱流状態を noise-induced turbulence と呼ぶことができよう.

集団振動相における位相縮約

ホップ分岐点から離れて, 集団振動が十分発達した状態においては, 非線形フォッカー・プランク方程式に対して位相縮約を適用することができる. そのような解析によって, 前小節で述べた noise-induced turbulence がホップ分岐点においてのみならず一般にどのような条件下で起こるかがわかる.

空間的に一様な集団振動は, (5.19) の空間一様なドリフト解 $f_0(\phi - \Omega t + \Theta)$ に対応している. ここに, Θ は任意定数である. この場合位相縮約とは, このような一様振動状態がゆるやかな空間的変調を受けた場合, その時空変動を記述する発展方程式を導出することを意味している. 第 2 節で述べたアイディアに従えば, これは任意定数 Θ をゆるやかな時空変化をもつ場の変数 $\Theta(x, t)$ と見直すことで可能となる. もちろん, このように拡張されたドリフト解 $f_0(\phi - \Omega t + \Theta(x, t))$ は (5.19) の厳密な解とはなりえないが, このような f がある意味で最大限 (5.19) を満たすように $\Theta(x, t)$ の発展則を決めてやるのである. $f_0(\phi - \Omega t + \Theta(x, t))$ を (5.19)

に代入すると、 Θ の緩やかな空間変化に起因する微小項が加法的に現れる。この微小項を摂動項と見なすと、最低次近似で Θ に対する非線形拡散方程式

$$\dot{\Theta}(x, t) = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 \quad (5.28)$$

が得られる。係数 ν, μ は、 f_0 の関数形および (5.19) の線形化方程式の固有関数、特にゼロ固有値に対応する固有関数で表現できる。そして、これらはすべて位相結合関数に含まれるパラメタおよびノイズ強度 D で表される。 $\nu < 0$ ならば一様振動解は不安定である。したがって、BF 不安定性条件を系のパラメタに関係づける一般的表式が得られることになる。本稿では述べるスペースがなかったが、高次近似まで系統的に進むことのできる位相縮約法を適用すれば、 $\nu < 0$ の場合に重要となる高次項（4次微分項）を含むいわゆる Kuramoto-Sivashinsky 方程式が得られる。

例として、 $\Gamma(\phi) = -\sin(\phi + \alpha)$, ($|\alpha| < \pi/2$) について解析した結果を図 7 に示そう。結合強度を単位結合半径をもつ指数関数 $G(x) = \exp(-|x|)/2$ とすると、系に含まれるパラメタは α とノイズ強度 D のみである。これらで張られる 2 次元パラメタ空間で ν の正負がどのように変わるかを示したのが図 7a である。また、乱流領域におけるパターンの一例を図 7b に示す。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, New York, 1984) (Dover, New York, 2003).
- [2] 蔵本由紀 「リズム現象の世界」(蔵本編, 東大出版会, 2005) 第 4 章.
- [3] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York, 1980) (Springer, Second Edition, New York, 2001).
- [4] 森肇, 蔵本由紀 「散逸構造とカオス」(岩波講座 現代の物理学, 岩波書店, 1994) .
- [5] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [6] H. Kori, Phys.Rev.E **68**, 021919 (2003).
- [7] Y. Kuramoto, Physica D **50**, 15 (1991).
- [8] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, Science **268**, 1503 (1995).
- [9] J.-N. Teramae and D. Tanaka, Phys.Rev.Lett. **93**, 204103 (2004); Prog.Theor.Phys.Suppl. No.161, 360 (2006).
- [10] H. Nakao, K. Arai and K. Kawamura, Phys.Rev.Lett. **98**, 184101 (2007).
- [11] A. T. Winfree, J.Theor.Biol. **16**, 15 (1967).
- [12] Y. Kuramoto, Lecture Notes in Phys. No.39, ed. H. Araki, (Springer, New York, 1975), p.420.
- [13] J. A. Acebrón et al., Rev.Mod.Phys. **77**, 137 (2005).
- [14] S. H. Strogatz, Physica D **143**, 1 (2000).
- [15] J. D. Crawford, J.Stat.Phys. **74**, 1047 (1994).
- [16] H. Sakaguchi, Prog.Theor.Phys. **79**, 39 (1988).

- [17] S. H. Strogatz, R. E. Mirollo and P. C. Matthews, Phys.Rev.Lett. **68**, 2730 (1992).
- [18] S. H. Strogatz, R. E. Mirollo, J.Stat.Phys. **63**, 613 (1991).
- [19] H. Daido, Phys.Rev.Lett. **73**, 760 (1994).
- [20] J. D. Crawford, Phys.Rev.Lett. **74**, 4341 (1994); J. D. Crawford and K. T. R.Davies, Physica D **125**, 1 (1999).
- [21] D. Hansel, G. Mato and C. Meunier, Phys.Rev.E **48**, 3470 (1993).
- [22] H. Kori and Y. Kuramoto, Phys.Rev.E **63**, 046214 (2001).
- [23] I. Z. Kiss, W. Wang and J. L. Hudson, J.Phys.Chem. B **103**, 11433 (1999); I. Z. Kiss, Y. Zhai and J. L. Hudson, Science **296**, 1676 (2002).
- [24] I. Z. Kiss et al. Science (2007) in press.
- [25] Y. Kuramoto, Prog.Theor.Phys. **94**, 321 (1995).
- [26] Y. Kuramoto and D. Battogtokh, Nonlin.Phenom.Complex Syst. **5**, 380 (2002).
- [27] S. Shima and Y. Kuramoto, Phys.Rev.E **69**, 036213 (2004).
- [28] D. M. Abrams and S. H. Strogatz, Phys.Rev.Lett. **93**, 174102 (2004).
- [29] Y. Shiogai and Y. Kuramoto, Prog.Theor.Phys.Suppl. No.150, 435 (2003).
- [30] Y. Kawamura, H. Nakao and Y. Kuramoto, Phys.Rev.E **75**, 036209 (2007).