

確率的ファクタモデル下での 最適消費・投資問題に対するPIA

一橋大学・経営管理研究科 畑 宏明

Hiroaki Hata

Graduate School of Business Administration

Hitotsubashi University

法政大学・理工学部 安田 和弘

Kazuhiro Yasuda

Faculty of Science and Engineering

Hosei University

Abstract

本稿では、まず最適消費・投資問題に関する結果のサーベイを与える。その後、ファクタモデルに対する最適消費・投資問題の数値計算法として policy improvement / iteration algorithm およびその収束に関する [12] の結果を紹介する。

1 イントロダクション

連続時間モデルを用いた消費および投資に対する期待効用最大化問題は、1970 年前後に Merton [22], [23] によって提案され、簡単な場合に動的計画法を用いて解かれている。Karatzas et al. [16] がより一般の状況で、同じく動的計画法を用いて解いている。一方、マルチンゲール法を用いた最適消費・投資問題へのアプローチが、Cox and Huang [5], Karatzas et al. [18], Pliska [25] などで確立された。動的計画法では、Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式と呼ばれる 2 階の非線形偏微分方程式 (PDE) の解を用いて各戦略を与えることとなるため、複雑な PDE を解くことが求められる。一方、マルチンゲール法はその点を回避できるメリットがある。また、市場が完備であるときより有効である。非完備市場においては、He and Pearson [13], [14] や Karatzas et al. [19] などがマルチンゲール法を用いて取り組んでいる。最適消費・投資問題の満期に対する分類としては有限満期と無限満期がある。動的計画法を用いたアプローチでは、例えば、Liu [21], Berdjane and Pergamenschikov [4], Hata et. al [9] で有限満期を、Fleming and Hernández-Hernández [6], [7], Fleming and Pang [8], Hata and Sheu [10], [11], Nagai [24] で無限満期の場合を、それぞれファクタモデルの設定で考察している。

Policy improvement / iteration algorithm (PIA) は、確率制御問題に対する数値計算法の一つである。Bellman [2], [3] で value iteration algorithm と呼ばれる数値計算アルゴリズムが有限状態空間の問題に対して提案され、Howard [15] で PIA がマルコフ動的計画問題の数値計算法として提案された。これらは機械学習における強化学習で度々用いられており、離散時間の有限状態空間のマルコフ制御問題に対して多く研究されてきた。制御過程が拡散過程の確率制御問題に対する PIA の研究は、1980 年頃に Puterman [26] などがあり、近年では、Bäuerle and Rieder [1], Jacka and Mijatović [17], Kerimkulov et al. [20] などがある。

本稿では、PIAの収束を拡散過程を用いた確率制御問題の一つである、非線形確率ファクタモデルを用いた最適消費・投資問題に対して考察する。本稿の構成は以下の通りである。2節で株価モデルにBlack-Scholesモデルを想定し、ベキ型効用をもつ投資家の消費・投資に対する期待効用最大化問題の値関数および最適戦略の導出のサーベイを与える。3節では、株価モデルにファクタモデルを採用し、2節と同様の問題を考える。この問題に対してPIAを適用したとき、[9]で得られている真の解に収束する結果を与えている[12]のサーベイをする。

2 Black-Scholesモデル下での最適消費・投資問題

本節では最適消費・投資問題の例として、[22]で扱われている、株価がBlack-Scholesモデルに従い、有限満期で消費と満期における富の効用がベキ型効用のときの、期待効用最大化問題のサーベイを与える。効用関数が $u(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$ ($\gamma < 1$, $\gamma \neq 0$)と表されるベキ型効用の場合で紹介する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルター付き完備確率空間とする。1つの安全資産と1つの株を考え、それぞれの価格過程 $\{S_t^0\}$, $\{S_t\}$ が次の方程式に従うとする。

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

ただし、 $r (\geq 0)$ は金利、 $\mu \in \mathbb{R}$ は期待リターン、 $\sigma (> 0)$ はボラティリティを表し、 $\{B_t\}$ は与えられた確率空間上の標準ブラウン運動とする。

$T (> 0)$ を満期とする。また、 $c = \{c_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を消費比率、 $\pi = \{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を株への投資比率とする。ただし、任意の $t \in [0, T]$ に対して $c_t \geq 0$ とする。このとき、投資家の富過程 $\{X_t\}$ は次のようになる。

$$\frac{dX_t^{c,\pi}}{X_t^{c,\pi}} = (1 - \pi_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t} - c_t dt = \{r + \pi_t(\mu - r) - c_t\} dt + \pi_t \sigma dB_t.$$

ただし、 $X_0^{c,\pi} = x (> 0)$ とする。

$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単調増加で、上に凸などの適当な条件を満たす効用関数とする。このとき、マートン問題とは次のような最適消費・投資問題のことである。

$$V_0(x) := \sup_{C, \Pi} \mathbb{E}_x \left[\int_0^T e^{-\rho s} u(c_s X_s^{c,\pi}) ds + e^{-\rho T} u(X_T^{c,\pi}) \right].$$

ただし、 $\rho (> 0)$ は割引ファクタとする。また、 $C = \{c_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $\Pi = \{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ は適当な条件を満たす発展的の可測な確率過程 (admissible 制御) のクラス上で考える。以下では、効用関数としてベキ型の効用関数を用いる。

最適戦略を得るために動的計画法を用いることを考える。 $t \in [0, T]$ に対して、

$$V(t, x) := \sup_{C_{t,T}, \Pi_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} u(c_s X_s^{c,\pi}) ds + e^{-\rho(T-t)} u(X_T^{c,\pi}) \right]$$

と定義する．ただし， $C_{t,T} = \{c_s\}_{t \leq s \leq T}$ ， $\Pi_{t,T} = \{\pi_s\}_{t \leq s \leq T}$ とする．このとき，HJB 方程式は次のようになる．

$$\partial_t v + x r D_x v + \sup_{c \geq 0, \pi \in \mathbb{R}} \left[u(cx) - \rho v + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 D_{xx} v + x \{ \pi(\mu - r) - c \} D_x v \right] = 0, \quad v(T, x) = u(x). \quad (2.1)$$

この方程式をベキ型効用の場合に解く．まず，(2.1) の左辺の $\sup$ を達成する戦略 c_t^* ， π_t^* を求めると，

$$c_t^* = \frac{(D_x v)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{x}, \quad \pi_t^* = \frac{(\mu - r) D_x v}{\sigma^2 D_{xx} v} x$$

と求まる．これらを (2.1) に代入することで， $\sup$ を無くした形で HJB 方程式を表すことができる．その解を求めていく．

$$v(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma e^{w(t)}$$

と表せる解を考えると，(2.1) は次のように書き換えられる．

$$\partial_t w + U_\gamma - \rho + (1 - \gamma) e^{-\frac{w}{1-\gamma}} = 0, \quad w(T) = 0.$$

この常微分方程式を解くことで，HJB 方程式の解 $v^*(t, x)$ は次のように与えられる．

$$v^*(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \left\{ e^{-\frac{\rho - U_\gamma}{1-\gamma}(T-t)} + \frac{1-\gamma}{\rho - U_\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\rho - U_\gamma}{1-\gamma}(T-t)} \right) \right\}^{1-\gamma}.$$

ただし， $U_\gamma = \frac{\gamma}{2(1-\gamma)} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} + \gamma r$ とする．また，時刻 t での最適戦略の候補 (c_t^*, π_t^*) も明示的に次のように与えられる．

$$c_t^* = \left\{ e^{-\frac{\rho - U_\gamma}{1-\gamma}(T-t)} + \frac{1-\gamma}{\rho - U_\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\rho - U_\gamma}{1-\gamma}(T-t)} \right) \right\}^{-1}, \quad \pi_t^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

最後に，verification theorem を示すことで値関数 $V(t, x) = v^*(0, x)$ であることと， $\{c_t^*\}$ ， $\{\pi_t^*\}$ が最適戦略であることが示される．

ここでは株価過程が Black-Scholes モデルに従う場合に，動的計画法を用いて HJB 方程式を導出し，その解を求める概略を与えた．モデルが複雑になっても，HJB 方程式の可解性の証明は難しくなるものの，HJB 方程式の導出までは概ね同じである．

3 ファクタモデル下での最適消費・投資問題に対する PIA

ここでは前節の設定から，株価過程をファクタモデルと呼ばれるモデルに拡張した場合の最適消費・投資問題を考える．このような設定では，HJB 方程式の解を明示的に表すことはできないが，Hata et al. [9] で $\gamma < 0$ のときに解決されている．ここでは，Hata

et al. [9] と同様, $\gamma < 0$ の場合を考える. policy improvement algorithm (PIA) と呼ばれる強化学習などで用いられる数値計算アルゴリズムを考え, その逐次的なアルゴリズムで得られるある種の PDE の解が, 真の解に収束することおよびそのオーダーに関する Hata and Yasuda [12] の結果のサーベイを与える.

株価モデルとして外生的な確率的ファクタに依存したモデル (ファクタモデル) を用いる. 多資産でも成り立つがここでは簡単のため 1 つの危険資産, 1 つのファクタの場合を述べていく. 安全資産, 1 個の株, 1 個の外生的ファクタとして, それぞれは次のような各方程式に従うとする.

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= r(Y_t)S_t^0 dt, & dS_t &= S_t \left\{ \mu(Y_t)dt + \Sigma(Y_t)dB_t^k \right\}, & dY_t &= g(Y_t)dt + \Lambda(Y_t)dB_t, \\ S_0^0 &= s_0^0, & S_0 &= s_0, & Y_0 &= y. \end{aligned}$$

ただし, $\{B_t\}$ はフィルタ付き完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\})$ 上で定義された N ($\in \mathbb{N}$) 次元標準ブラウン運動とし, $\mu, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Sigma, \Lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times N}$ はリプシッツ関数とし, Σ, Λ は次を満たすとする. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 次を満たす正の定数 C_1, C_2 が存在するとする;

$$C_1 \leq \Sigma(x)\Sigma(x)^* \leq C_2, \quad C_1 \leq \Lambda(x)\Lambda(x)^* \leq C_2.$$

ただし, 行列 A に対して A^* はその転置とする. また, r は非負有界ななめらか関数で, その導関数も有界とする. これらから得られる富過程 $\{X_t\}$ は, $X_0 = x$ で,

$$\frac{dX_t}{X_t} = (1 - \pi_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t} - c_t dt = [r(Y_t) + \pi_t \{\mu(Y_t) - r(Y_t)\} - c_t] dt + \pi_t \Sigma(Y_t) dB_t$$

となる. ただし, $c = \{c_t\}$, $\pi = \{\pi_t\}$ は適当な可積分条件を満たす 1 次元の発展的可測な過程であり, それぞれ消費率と危険資産への投資比率を表すとする.

満期を $T > 0$ とし, リスク回避度を $\gamma \in (-\infty, 0)$ とすると, 問題は

$$V(0, x, y) := \sup_{(c, \pi) \in \mathcal{A}_T} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\rho s} \frac{1}{\gamma} (c_s X_s^{c, \pi})^\gamma ds + e^{-\rho T} \frac{1}{\gamma} (X_T^{c, \pi})^\gamma \right]$$

となる. ただし, $\mathcal{A}_T$ は, 発展的可測である (c, π) の許容可能な戦略の集合とし, $\rho > 0$ とする. ここで, 一般にベキ型効用では $0 < \gamma < 1$ も考えるが, 本研究では扱わない.

[9] で用いられている適当な測度変換から確率測度 $\mathbb{P}^\pi$ を得る. この $\mathbb{P}^\pi$ を用いて問題を書き換え, 制御の集合を広げた問題を考える. そこから得られる次の問題を考える.

$$v(t, y) := \inf_{(c, \pi) \in \mathcal{A}_{t,T}^1} \mathbb{E}^\pi \left[\int_t^T e^{-\rho(s-t)} c_s^\gamma e^{\gamma \int_t^s \{\ell_u - c_u\} du} ds + e^{-\rho(T-t)} e^{\gamma \int_t^T \{\ell_s - c_s\} ds} \right]. \quad (3.1)$$

ただし, $\mathbb{E}^\pi$ は $\mathbb{P}^\pi$ による期待値を表し, $\mathcal{A}_{t,T}^1$ は, 発展的可測である (c, π) である測度変換が可能な許容可能な戦略の集合とする. また,

$$\ell(y, \pi) := -\frac{1-\gamma}{2} \Sigma(y)\Sigma(y)^* \pi^2 + (\mu(y) - r(y))\pi + r(y), \quad \ell_t := \ell(Y_t, \pi_t)$$

とする. (3.1) の関数が $v(t, y) = e^{W(t, y)}$ と表せるとすると, $v(t, y)$ の HJB 方程式から, $W(t, y)$ が従う方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \Lambda(y) \Lambda(y)^* D^2 W + \frac{1}{2} \Lambda(y) \Lambda(y)^* (DW)^2 \\ + g(y) DW - \rho + \inf_{c \geq 0} (-\gamma c + c^\gamma e^{-W}) + \inf_{\pi \in \mathbb{R}} [\gamma \{\ell(y, \pi) + \pi \Sigma(y) \Lambda(y)^* DW\}] = 0, \end{aligned}$$

$W(T, y) = 0$ である. この解を $\widehat{W}$ とすると, 値関数 $V(0, x, y)$, 最適消費戦略 $\widehat{c}(t, y)$ および最適投資戦略 $\widehat{\pi}(t, y)$ が適当な条件の下, 次のように与えられることが [9] の Theorem 4.1 で知られている.

$$\begin{aligned} V(0, x, y) &= \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{\widehat{W}(0, y)}, \quad \widehat{c}(t, Y_t) = e^{-\frac{\widehat{W}(t, Y_t)}{1-\gamma}}, \\ \widehat{\pi}(t, Y_t) &= \frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{\Sigma(Y_t) \Sigma(Y_t)^*} \left\{ \mu(Y_t) - r(Y_t) + \Sigma(Y_t) \Lambda(Y_t)^* D\widehat{W}(t, Y_t) \right\}. \end{aligned}$$

上述の問題に対する PIA を具体的に与える.

アルゴリズム

1. $l = 0$ とし, 最初の戦略を $(c_t^{(l)}, \pi_t^{(l)}) \equiv (1, 0)$ とする.

2. $V^{(l)}(t, x, y) = \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{W^{(l)}(t, y)}$ とし, $W^{(l)}$ は次の解とする.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(l)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Lambda(y) \Lambda(y)^* D^2 W^{(l)} + \frac{1}{2} \Lambda(y) \Lambda(y)^* (DW^{(l)})^2 \\ + g(y) DW^{(l)} - \rho - \gamma c^{(l)} + (c^{(l)})^\gamma e^{-W^{(l)}} + \gamma \left\{ \ell(y, \pi^{(l)}) + \pi^{(l)} \Sigma(y) \Lambda(y)^* DW^{(l)} \right\} = 0, \\ W^{(l)}(T, y) = 0. \end{aligned}$$

3. $c_t^{(l+1)} = c^{(l+1)}(t, Y_t)$, $\pi_t^{(l+1)} = \pi^{(l+1)}(t, Y_t)$ とする. ただし,

$$\begin{aligned} c^{(l+1)}(t, y) &= \arg \inf_{c \geq 0} \left\{ -\gamma c + c^\gamma e^{-W^{(l)}(t, y)} \right\}, \\ \pi^{(l+1)}(t, y) &= \arg \inf_{\pi \in \mathbb{R}} \left[\gamma \left\{ \ell(y, \pi) + \pi \Sigma(y) \Lambda(y)^* DW^{(l)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

4. l を $l+1$ として 2. に戻る. これを繰り返す.

このアルゴリズムを用いたとき, 次の収束に関する結果が示される.

定理 3.1 ([12] の Theorem 4) $N = 1$ とすると, 任意の $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ に対して,

$$0 \leq W^{(l)}(t, y) - \widehat{W}(t, y) \leq \left(\frac{-\gamma}{1-\gamma} \right)^l \left(W^{(0)}(t, y) - \widehat{W}(t, y) \right)$$

が成り立つ.

このことから、任意の $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して、 $V^{(l)}(t, x, y)$ が、 $l \rightarrow \infty$ のとき $V(t, x, y)$ に収束することが示される。この結果において、株価過程およびファクタ過程のドリフト係数 μ , g に有界性を仮定していないのが一つのポイントである。

ここでは、 $N = 1$ の市場が完備な場合のみ述べたが、[12] では多資産の設定で、市場が非完備の場合に対しても適当な条件の下、同様の結果が得られることが示されている。

また、[12] では、 $N = 2$ で、ファクタ過程にオルンシュタイン・ウーレンベック過程を仮定し、 $\mu(y) = y$, $\Sigma(y) = \text{定数}$, $r(y) = \text{定数}$ とした場合の数値実験結果を与えている。この設定は [12] の Theorem 4 の仮定の範疇に入り、市場が非完備な場合になる。その数値結果として、繰り返しのステップ数がかなり少ない段階で、相応の精度で収束することが示されている。

謝辞：

Hiroaki Hata's research is supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C), No. 20K11690, from Japan Society for the Promotion of Science. Kazuhiro Yasuda's research is supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C), No. 21K03355, from Japan Society for the Promotion of Science. And this work was also supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

- [1] Bäuerle, N., and Rieder, U.: Control improvement for jump-diffusion processes with applications to finance, *Appl. Math. Optim.*, **65**, 1–14 (2012).
- [2] Bellman, R.: Functional equations in the theory of dynamic programming V. Positivity and quasilinearity, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **41**, 743–746 (1955).
- [3] Bellman, R.: *Dynamic programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1957).
- [4] Berdjane, B., and Pergamenschikov, S.: Optimal consumption and investment for markets with random coefficients, *Finance Stochast.*, **17**, 419–446 (2013).
- [5] Cox, J.C., and Huang, C.-F.: Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process., *J. Econ. Theory.*, **49** (1), 33–83 (1989).
- [6] Fleming, W.H., and Hernández-Hernández, D.: An optimal consumption model with stochastic volatility, *Finance Stochast.*, **7**, 245–262 (2003).
- [7] Fleming, W.H., and Hernández-Hernández, D.: The tradeoff between consumption and investment in incomplete financial markets, *Appl. Math. Optim.*, **52**, 219–235 (2005).
- [8] Fleming, W.H., and Pang, T.: An application of stochastic control theory to financial economics, *SIAM J. Control Optim.*, **43**, 502–531 (2004).
- [9] Hata, H., Nagai, H., and Sheu, S.-J.: An optimal consumption problem for general factor models, *SIAM J. Cont. Optim.*, **56**, 3149–3183, (2018).
- [10] Hata, H., and Sheu, S.-J.: On the Hamilton–Jacobi–Bellman equation for an optimal consumption problem: I. Existence of solution, *SIAM J. Control Optim.*, **50**, 2373–2400 (2012).

- [11] Hata, H., and Sheu, S.-J.: On the Hamilton–Jacobi–Bellman equation for an optimal consumption problem: II. Verification theorem, *SIAM J. Control Optim.*, **50**, 2401–2430 (2012).
- [12] Hata, H., and Yasuda, K.: Policy improvement algorithm for an optimal consumption and investment problem under general stochastic factor models, *submitted* (2023).
- [13] He, H., and Pearson, N.D.: Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the finite-dimensional case., *Math. Finance.*, **1**, 1–10 (1991)
- [14] He, H., and Pearson, N.D.: Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the infinite-dimensional case., *J. Econom. Theory.*, **54**, 259–304 (1991).
- [15] Howard, A.: *Dynamic programming and Markov processes*, MIT press, Cambridge (1960)
- [16] Karatzas, I., Lehoczky, J.P., Sethi, S.P., Shreve, S.: Explicit solution of a general consumption/investment problem, *Math. Oper. Res.* **11**, 261–294 (1986).
- [17] Jacka, S.D., and Mijatović, A.: On the policy improvement algorithm in continuous time, *Stochastics*, **89**, 348–359 (2017).
- [18] Karatzas, I., Lehoczky, J.P., and Shreve, S.: Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon., *SIAM J. Cont. Optim.*, **25**, 1557–1586 (1987).
- [19] Karatzas, I., Lehoczky, J.P., Shreve, S., and Xu, G.-L.: Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market., *SIAM J. Cont. Optim.*, **29**, 702–730 (1991).
- [20] Kerimkulov, B., Šiška, D., and Szpruch, L.: Exponential convergence and stability of Howard’s policy improvement algorithm for controlled diffusions, *SIAM J. Cont. Optim.* **58**, 1314–1340 (2020).
- [21] Liu, J.: Portfolio selection in stochastic environments, *Rev. Financ. Stud.* **20**, 1–39 (2007).
- [22] Merton, R.C.: Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case, *Review of Economics and Statistics*, **51**(3), 247–257 (1969).
- [23] Merton, R.C.: Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model, *J. Econom. Theory.* **3**, 373–413 (1971).
- [24] Nagai, H.: H-J-B equations of optimal consumption-investment and verification theorems, *Appl. Math. Optim.* **71**, 608–669 (2015).
- [25] Pliska, S.R.: A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios., *Math. Oper. Res.*, **11**, 239–246 (1986)
- [26] Puterman, M.L.: On the convergence of policy iteration for controlled diffusions, *Journal of optimization theory and applications*, **33**, 137–144 (1981).