

On differential subordinations

群馬工業高等専門学校 斎藤 斉

HITOSHI SAITOH

Department of Mathematics, Gunma National College of Technology

Maebashi, Gunma 371-8530, Japan

E-mail; saitoh@nat.gunma-ct.ac.jp

December 22, 1999

実数値関数の微分方程式の分野において、重要な応用をもつ differential inequalities の多くの例がある。たとえば、 $I = (-1, 1)$ として次の微分作用素

$$D[f](t) = t^2 f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t) + 6t$$

が、 $0 < D[f](t) < 2$ ($t \in I$) をみたすと仮定する。このとき、 $-1 < f(t) < 2$ ($t \in I$) がわかる。この結果は、次のように表すことができる。

$$D[f](t) < (0, 2) \implies f(I) \subset (-1, 2) \quad (1)$$

Miller と Mocanu は、[6], [7] で実数値関数に対する differential inequalities を含む考えを、複素数値関数に拡張した。ここではこれらの考えを用いて second differential subordination について述べたい。

§ 1 Introduction

前ページで述べた(1)の左の inclusion は natural complex analog $D[f](U) \subset \Omega$ をもつ. この $D[f](z) = z^2 f''(z) + 4z f'(z) + 2f(z) + 6z$ で $U, \Omega \subset \mathbb{C}$ かつ U は単位円板である. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ がこの inclusions をみたせば, (1) と同様次のような表現が得られる.

$$D[f](U) \subset \Omega \implies f(U) \subset \Delta \quad (2)$$

Ω, Δ を $\mathbb{C}$ の任意の集合とし, $p(z)$ は $p(0) = a$ で単位円内 で正則とする. さらに $\psi(r, s, t; z): \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ を考える.

この小論では, 次の表現で問題を考えよう. i.e.,

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z); z) \mid z \in U\} \subset \Omega \implies p(U) \subset \Delta \quad (3)$$

(注) 上の(2)は $\psi(r, s, t; z) = t + 4s + 2r + 6z$ の形をもつ.

ここで subordination について述べておく.

(3)における Ω, Δ は simply connected domain とする. f と F は U で正則とし, F は特に単葉とする. このとき, $f(0) = F(0)$ かつ $f(U) \subset F(U)$ であれば f は F に subordinate であるといふ. $f(z) \prec F(z)$ または $f \prec F$ と書く.

以下のことが知られている.

1) $\Delta \neq \mathbb{C}$ が simply connected で $a \in \Delta$ であれば, U から Δ の上への $g(0) = a$ とする conformal mapping g が存在し,

(3) は 次のように表される.

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \mid z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(z) \prec g(z).$$

また、さらに

2) $\Omega \neq \mathbb{C}$ が simply connected ならば、 U から Ω の上への $h(0) = \psi(a, 0, 0; 0)$ となる conformal mapping h が存在する。

$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ が U で正則ならば (3) は次のように書ける。

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec g(z) \quad (4)$$

以下この小論で用いられる重要な定義を述べる。

定義 1 $\psi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ とし、 h を U で単葉とする。 p が U で正則で、次の (second-order) differential subordination

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z), \quad (5)$$

をみたすとき、 p は differential subordination の解とよばれる。単葉関数 g は (5) をみたすすべての p に対して $p \prec g$ ならば、differential subordination の (解の) dominant という。さらに、(5) のすべての dominants に対して $\widehat{g} \prec g$ をみたす $\widehat{g}$ を (5) の best dominant という。

(注) first-order differential subordination については、以下のことがよく知られている。

(I) Goluzin [2] (1953)

$h(z)$ を convex とし、 $z p'(z) < h(z)$ が成り立つのは

$$p(z) < g(z) = \int_0^z \frac{h(t)}{t} dt \quad \text{となり、} g(z) \text{ は best dominant.}$$

(II) Suffridge [8] (1970)

(I) で " $h(z)$ が starlike" も成り立つ.

(III) Hallenbeck & Ruscheweyh [4] (1975)

$h(z)$ を convex, $\gamma \neq 0, \operatorname{Re} \gamma \geq 0$ とするとき

$$p(z) + \frac{z p'(z)}{\gamma} < h(z) \implies p(z) < g(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z \frac{h(t)}{t^{\gamma-1}} dt$$

ここで、 $g(z)$ は best dominant.

上記の differential subordinations は subordination preserving integral operator という視点もある. ([7]) i.e.,

$$f < g \implies A(f) < A(g) \quad (6)$$

$H = H(U)$ を単位円内で正則な関数の空間で $K \subset H$ とする.

A を $A: K \longrightarrow H$ をある作用素とするとき、どのような条件下で作用素 A は subordination preserving となるか?

(1) $H_0 = \{f \in H \mid f(0) = 0\}$ とし、 $A: H_0 \longrightarrow H$ を

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt, \quad F = A(f) \text{ で定義すると}$$

① $g(z): \text{convex} \implies (6) \text{ が成り立つ.} \rightarrow (I)$

② $g(z)$: starlike $\Rightarrow$ (6) が成り立つ. $\rightarrow$ (II)

2) $A: H \rightarrow H$ を

$$F(z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z \frac{f(t)}{t^{\gamma-1}} dt \quad (\gamma \neq 0, \operatorname{Re} \gamma \geq 0), \quad F = A(f) \quad \text{で } z \in \mathbb{D}$$

$g(z)$: convex $\Rightarrow$ (6) が成り立つ. $\rightarrow$ (III)

§ 2 2nd-order differential subordination の応用

Miller & Mocanu は [6] で 2nd-order differential subordination について、次の結果を示した。

定理 A (Miller & Mocanu 1981)

正則関数 $p(z)$ が 2nd-order differential subordination

$$A z^2 p''(z) + B z p'(z) + C p(z) \prec z$$

をみたすとする。ここで $A \geq 0, A+B \geq 0$ かつ $B+C > 0$ とする。

このとき、 $p(z) \prec \frac{z}{B+C}$ で $\frac{z}{B+C}$ は best dominant である。

(注) $z^2 p''(z) + a z p'(z) + b p(z) = 0$ は Euler の微分方程式とよばれる。定理 A で $A=1, B=a, C=b$ とおくと。

$$z^2 p''(z) + a z p'(z) + b p(z) \prec z \Rightarrow p(z) \prec \frac{z}{a+b}$$

($1+a \geq 0, a+b > 0$) が成り立つ。これを Euler type の

2nd-order differential subordination とよぶことにする。

また、Miller & Mocanu は [7] でこれを証明した。

定理 B (Miller & Mocanu 1987)

$h(z)$ は U で convex で, $h(0)=0$ とし, $A \geq 0$ とする. $B(z), C(z)$ は U で正則で次の不等式をみたすとする,

$$\operatorname{Re}\{B(z)\} \geq A + |C(z) - 1| - \operatorname{Re}\{C(z) - 1\} \quad (z \in U).$$

p が U で正則かつ $p(0)=0$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$A z^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec h(z).$$

(注) 定理 B で $A=1$, $B(z)=a$, $C(z)=b$ とおき, $h(z)=z$ とすれば, Euler type の 2nd-order differential subordination を得る.

$$\operatorname{Re} a \geq 1 + |b-1| - \operatorname{Re}(b-1) \quad \text{のとき}$$

$$z^2 p''(z) + a z p'(z) + b p(z) \prec z \Rightarrow p(z) \prec z$$

次の微分方程式は Bessel の微分方程式として有名である.

$$z^2 T''(z) + z T'(z) + (z^2 - \nu^2) T(z) = 0$$

以下では, Bessel type の 2nd-order differential subordination について考えてみる. すなわち

$$A z^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) \prec h(z) \quad (7)$$

定理 1 $h(z)$ を U で convex (univalent) とし $h(0)=0$ とし, $A \geq 0$ とする. $k > 1$ とし, $B(z), C(z)$ は U で正則で

$$\operatorname{Re}\{B(z)\} > A + |C(z) - 1| - \operatorname{Re}\{C(z) - 1\} \quad (z \in U) \quad (8)$$

をみたすとする. p が U で正則で $p(0)=0$ とし, p が 2nd-order differential subordination (7) をみたせば, $p(z) \prec h(z)$ である.

この証明のためには, 次の Miller & Mocanu [6] による補題が必要である.

補題 2 (Miller & Mocanu 1981)

p を U で正則, h を $p(0)=h(0)$ とする $\overline{U}$ 上 convex (univalent) とする. p が h に subordinate しないならば, 以下の3つの条件をみたす $p(|z| < |z_0|) \subset h(U)$ に對して $z_0 \in U$, $w_0 \in \partial U$ と $m \geq 1$ が存在する.

$$(i) \quad p(z_0) = h(w_0),$$

$$(ii) \quad z_0 p'(z_0) = m w_0 h'(w_0), \text{ and}$$

$$(iii) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{z_0^2 p''(z_0)}{w_0 h'(w_0)} \right\} \geq -m.$$

定理 1 の証明

h は U で convex であるから, $h_r(z) = h(rz)$ ($r_0 < r < 1$) とおくと, h_r は $\overline{U}$ で convex である. さらに $p_r(z) = p(rz)$ とおけば, (7) から次を得る.

$$u_r(z) \equiv A z^2 p_r''(z) + B(rz) z p_r'(z) + C(rz) p_r(z) \prec h_r(z) \\ (z \in U, r_0 < r < 1) \quad (9)$$

補題 2 を用いて、 $p_r(z) < h_r(z)$ ($r_0 < r < 1$) を示す。

p_r が z に対して ($r_0 < r < 1$) に対して h_r は subordinate ではないとする。

補題 2 より、 $z_0 \in U$, $w_0 \in \partial U$, $m \geq 1$ が存在して、

$$p_r(z_0) = h_r(w_0), \quad z_0 p'_r(z_0) = m w_0 h'_r(w_0),$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z_0^2 p''_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \right\} \geq -m \quad (10)$$

が成り立つ。

$$V \equiv \frac{u_r(z_0) - h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \quad \text{とおけば (9) より}$$

$$V = \frac{A z_0^2 p''_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)} + \frac{B(z_0) z_0 p'_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)} + \frac{C(z_0) p_r(z_0) - h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \quad (11)$$

$$\therefore z'' \quad u_r(z_0) = h_r(w_0) + V w_0 h'_r(w_0) \quad (12)$$

である。 $\operatorname{Re} V > 0$ を示せば矛盾を導ける。 h_r は convex である。

$h_r(0) = 0$ であるから

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{w_0 h'_r(w_0)}{h_r(w_0)} \right\} \geq \frac{1}{2} \quad (|w_0| = 1),$$

$$\text{または} \quad \left| \frac{h_r(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} - 1 \right| \leq 1. \quad (13)$$

また、次のことが成り立つ。

W, Z は複素数とし、 $|Z-1| < 1$ とする。このとき

$$\operatorname{Re} WZ = \operatorname{Re} W + \operatorname{Re} W(Z-1) \geq \operatorname{Re} W - |W|.$$

この不等式で

$$W = C(rz_0) - 1, \quad Z = \frac{hr(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \quad \text{とおくと (13) から}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ (C(rz_0) - 1) \cdot \frac{hr(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \right\} \geq \operatorname{Re} \{ C(rz_0) - 1 \} - |C(rz_0) - 1| \quad (14)$$

を得る. (11)において, (8), (10), (14)を用いる

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} kV &= Ak \operatorname{Re} \left\{ \frac{z_0^2 p''_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \right\} + k \operatorname{Re} \left\{ B(rz_0) \frac{z_0 p'_r(z_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \right\} \\ &\quad + k \operatorname{Re} \left\{ \frac{C(rz_0) p_r(z_0) - hr(w_0)}{w_0 h'_r(w_0)} \right\} \end{aligned}$$

$$> Ak(-m) + km \{ A + |C(rz_0) - 1| - \operatorname{Re} [C(rz_0) - 1] \}$$

$$+ k \{ \operatorname{Re} [C(rz_0) - 1] - |C(rz_0) - 1| \}$$

$$= k(m-1) \{ |C(rz_0) - 1| - \operatorname{Re} [C(rz_0) - 1] \}$$

$$\geq 0, \quad \text{i.e., } |\arg V| < \frac{\pi}{2}.$$

(12)で convex domain $h_r(U)$ の境界に $w_0 h'_r(w_0)$ が垂直であるということを用いて, $u_r(z_0) \notin h_r(U)$ を得る. これは,

(9) に矛盾する. よってすべての r ($r_0 < r < 1$) に対して,

$p_r \prec h_r$ でなければならない. $r \rightarrow 1^-$ とすることにより,

目的の $p(z) \prec h(z)$ を得る. (証明終)

(注) Brown [1] は Bessel の微分方程式の解である Bessel function についての正則性, 単葉性, spiral-like について,

調べている。また ν が実かつ正のときの星型性についても述べている。

定理 1 において、特別の場合として次の系を得る。

(Bessel type α 2nd-order differential subordinations)

$$\text{系 3} \quad z^2 p''(z) + z p'(z) + (z^2 - \nu^2) p(z) < z \Rightarrow p(z) < z$$

$$\text{系 4} \quad z^2 p''(z) + z p'(z) + (z^2 - \nu^2) p(z) < \frac{z}{1-z} \Rightarrow p(z) < \frac{z}{1-z}$$

References

1. Brown, R.K., Univalent solutions of $W'' + pW = 0$, Canad. J. Math. 14 (1962), 69-78.
2. Goluzin, G.M., On the majorization principle in function theory, Dok. Akad. Nauk. SSSR 42 (1953), 647-650.
3. Goodman, A.W., Univalent Functions, Vol. 1, 2, Marinar, Tampa, Florida 1983.
4. Hallenbeck, D.J. and Ruscheweyh St., Subordination by convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 191-195.
5. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Second order differential inequalities in the complex plane, J. Math. Anal. & Appl. 65 (1978), 289-305.

6. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Differential subordinations and univalent functions, Michigan Math. J. 28 (1981), 157-171.
7. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Differential subordinations and inequalities in the complex plane, J. Diff. Equa. 67 (1987), 199-211.
8. Suffridge, T. J., Some remarks on convex maps of the unit disc, Duke Math. J. 37 (1970), 775-777.