

On a conjecture of Arnold

お茶大・理 小野 薫
(Kaoru ONO)

本稿では、深谷賢治氏(京大・理)との共同研究[F0]の概説をする。

多様体上の滑らかな関数についての Morse 理論、特に Morse の不等式の symplectic 版として、Arnold は次の予想も立てた。

(Arnold 予想) 関 symplectic 多様体 (M, ω) の exact symplectomorphism φ に対し、次が成立する。

$$\# \text{Fix}(\varphi) \geq \min \{ \# \text{Crit}(f) \mid f: M \rightarrow \mathbb{R} \ C^\infty \}$$

更に 全ての不動点が非退化であるならば、

$$\# \text{Fix}(\varphi) \geq \min \{ \# \text{Crit}(f) \mid f: M \rightarrow \mathbb{R} \ \text{Morse} \}$$

ここで、 φ の不動点 p が非退化であるとは、 $d\varphi_p$ が 1 を固有値に持たない事である。また、 φ が exact symplectomorphism であるとは、ある $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ があり、 $H_t := H(\cdot, t)$ の定める Hamilton ベクトル場 X_{H_t} の生成する flow の time-one 写像として φ が表される事である。実はこの H は $H(\cdot, t+1) = H(\cdot, t)$ を

満たす様にとる事ができる。 p が φ の不動点であるとすれば、 $t=0$ で p を出発する X_{H_t} の積分曲線が $t=1$ で p に戻ってくる。 逆もいえるので、 φ の不動点は、 次の方程式の 1-周期解と 1対1 に対応している。

$$\dot{x}(t) = X_{H_t}(x(t)) \quad (1)$$

この方程式が、 後述の A_H の Euler-Lagrange 方程式となる事は、 良く知られている。 そこで、 A_H の 臨界点を、 有限次元の場合の Morse 理論の様に さがせる事を期待したい。 実は、 いくつかの困難があり、 すぐにうまくはいかないが、 Conley-Zehnder の仕事 (A_H の有限次元近似) と、 Gromov の pseudoholomorphic curve の理論 に触発され、 Floer は現在 Floer homology と呼ばれるものを創始した。 Floer 自身は、 (M, ω) が monotone と呼ばれる場合に理論を構成し、 後に Hofer-Salamon により、 weakly monotone という class にまで拡張された。 深谷氏との共同研究では、 この条件もはずし、 一般の閉 symplectic 多様体上の周期 Hamilton 系の Floer homology を、 (定係数で) 構成し、 それを計算する事で、 (弱い形の) Arnold予想を、 不動点が非退化である場合に示した。 退化した不動点をもつ場合には、 いくつかの部分的结果が知られているが、 現在一般には open である。 尚、 [FO] の後 G. Liu-Tian,

Hofer-Salamon, Ruan が同様の結果を得たことである。
 我々の議論では、一般の symplectic 多様体の Gromov-Witten
 不変量も構成できる。これについても Li-Tian, Hofer-Salamon,
 Ruan, Siebert が同様の結果を得たことである。

§1. Floer homology

詳しい事は、原論文 或いは [O] 等を参照して載く
 とし、後々為に最小限の事柄を挙げる。

M の null homotopic loop 全体の空間を $\mathcal{L}M$ と書き、
 その被覆空間 $\widetilde{\mathcal{L}M}$ を次で定める。

$$\widetilde{\mathcal{L}M} = \left\{ (x, u) \mid x: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M, u: D^2 \rightarrow M \right. \\ \left. u|_{\partial D^2} = x \text{ (但 } \partial D^2 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \right\} / \sim$$

$$::: (x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \int_{D^2} u^* \omega = \int_{D^2} v^* \omega \\ \int_{D^2} u^* c_1 = \int_{D^2} v^* c_1 \end{cases}$$

と定める。 (c_1 は (M, ω) の第 1 Chern 型式)

被覆変換群 は $\pi_2(M) / \ker I_\omega \cap \ker I_{c_1}$

(但 $I_\omega, I_{c_1}: \pi_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ は ω, c_1 の evaluation.)

となる。以下の構成はこの群作用と両立することには
 注意されたい。

$$\mathcal{A}_H: \widetilde{\mathcal{L}M} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \varepsilon$$

$$\mathcal{A}_H(x, u) := - \int u^* \omega - \int_0^1 H(x(t), t) dt$$

と定める。 M に D^2 の ω と両立する複素構造 J を入れる

と、 $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ で定まる g_J は Riemann 計量となる。 $\widetilde{LM}$ の接空間は、 x に沿う M のベクトル場のなる空間なので、 g_J を用いて L^2 -内積が与えられる。この計量について、形式的には真の gradient flow line の方程式を書く。

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u(t)) = 0 \quad (2)$$

となる。ここで $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow LM$ と $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ とみればよい。又、 (τ, t) は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の座標である。特に $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ となる時、即ち A_H の臨界点 (1) の解 x とそれと張る disk u の組となる。有限次元の場合の Morse index (Hessian の真の固有値の数) に対応するものとして、Conley-Zehnder index というものが知られている。これは $\mu_{CZ}: \text{Crit}(A_H) \rightarrow \mathbb{Z}$ と書く。

$(x^-, u^-), (x^+, u^+) \in \text{Crit}(A_H)$ をつらぐ (真) gradient flow line は、(2) の解で、 u^-, u, u^+ をとりあわせて得られる $S^2 \cong D^2 \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cup D^2 \rightarrow M$ による ω, c_1 の evaluation が 0 となるものと考え、grad. flow line を用いて、Morse-Smale-Thom-Witten 複体の真似として Floer homology $HF_*(H, J)$ は定義される。即ち $\text{Crit}(A_H)$ を生成元とする自由加群 (の完備化) に critical points をつらぐ grad. flow line の数を号つきで数える事で境界作用素を決める。

(完備化が必要となるのは、1つの (x^-, u^-) から出る、

$\mu_{CZ}(x^-, u^-) - \mu_{CZ}(x^+, u^+) = 1$ とする (x^+, u^+) への grad. flow line が無限個の (x^+, u^+) に対して存在するかも知れないからである。) さて、この定義が意味をもつ為には、

$\mu_{CZ}(x^-, u^-) - \mu_{CZ}(x^+, u^+) = 1$ とする

組 $(x^-, u^-), (x^+, u^+)$ を止めるに、この2つを結ぶ

grad. flow line は (τ 方向の平行移動による $\mathbb{R}$ 作用を除き) 有限個であること、及び $\partial^2 = 0$ とする事を示さなくてはならない。

前出の Floer, Hofer-Salamon の仕事は、然るべき条件下でこれを示した。計算するには

① (H, J) の t 方向に依らない事

"小さい"

② 特に $H(\cdot, t)$ が t に依らない Morse 関数の時、

(1) の解は全て有限次元 Morse 関数の gradient flow line と対応する事

の2点を示せばよい。① については $\partial^2 = 0$ の証明

と同様に進めればよい。② は、monotone の時には Floer,

$c_1 = 0$ 又は最小 Maslov 数 $\geq \frac{1}{2} \dim M$ 以上

の時、Hofer-Salamon, weakly monotone の時、(少し定義を修正して) 筆者により示されていた。

weakly monotone でない時には生ずる困難は、

(2) の解空間 ($/\mathbb{R}$) が compact でない時には、bubble として生ずる有理正則曲線の中に、 c_1 の evaluation が負と

なるものが現れる可能性を排除できない事がある。実は、この様な有理曲線が多重になるものが現れる場合が問題であり、^{*}我々は、これを negative multiple bubble の問題と呼んでいる。以下、これを乗り越える方法のアイデアを紹介する。

§2. 倉西構造とその摂動

$(x^\pm, u^\pm)$ をつなぐ (2) の解空間を $\widetilde{\mathcal{M}}(x^+, u^+; x^-, u^-)$ と書き、 $\mathbb{R}$ で割った空間を $\mathcal{M}(x^+, u^+; x^-, u^-)$ と書くことにする。(2) は、Fredholm 写像の零点を表す方程式であるから、Fredholm 写像 についての倉西の方法が適用できる。即ち、局所的には Fredholm 写像は、全射 (無限次元) 線型写像と、有限次元の像をもつ写像の“和”に分解する。従って、零点集合として、有限次元空間の間の写像の零点集合として記述される。 $\mathbb{R}^n$ の任意の閉部分集合は滑らかな関数の零点として書かれる事を思い出すと、(横断性が成立していない状況では) 単に、零点集合のみをみても、有効な情報は得られない事がお判りであろう。そこで、上に述べた有限次元空間の間の写像 (倉西写像) を“定義方程式”として情報に加味する事を考える。(Seiberg-Witten 理論での古田氏の仕事も参照されたい。) アイデアの1つは、この倉西写像

^{*} 横断性が一般には保障されない事が問題である。

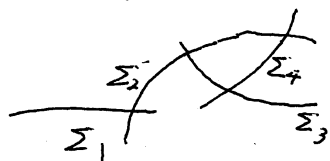
を 0 と横断的になる様に振動し、その零点集合として
 “きれいな”空間を得ようというものである。ここでの
 問題は、倉西の方法は局所的なものなので、解空間
 全体の上で、うまく両立する振動をとることができるか
 という事である。我々の場合は更に次の2つの
 困難がある。

① bubble が起る時、その極限として現れる対象
 は、もとの写像空間から はみ出している。

② (bubble として現れる有理曲線もあるのだ)
 定義域の自己同型の部分群が、極限の対象の固定
 化群となるが、これが自明でない場合もあり得る。
 これらの問題に対処する為に、Kontsevich による stable map
 の概念を引用しよう。リーマン面のモジュライ空間をコン
 パクト化する時に、非特異なもの以外に、stable curve という
 ものもつけ加える。stable curve とは、いくつかの非特異
 リーマン面が、高々二重点で交わっているもので、その正則自己同
 型群が有限群となるものの事である。我々は、正則写像
 或いは (2) の解 (connecting orbit) のモジュライ空間を扱って
 いるので、その定義域のみを考えても不十分である。stable
 map とは、高々二重点のみを特異点として持つ複素曲線から
 の正則写像で、かつ、定義域の複素曲線の正則自己同型で、

その写像との合成がその写像自身となるものたちの成す群が有限となるもの事である。はじめで耳にされる方も多...
と思うので、少し説明をつけ加えることにする。

$\Sigma = \cup \Sigma_j$ Σ_j たちは下図の様、高(=重点)を
持つてゐるとする。



Σ_j は 非特異曲線 (即ちリーマン面)

Σ 上の正則写像 $f: \Sigma \rightarrow M$ とは各 Σ_j への制限が J に
關して正則写像となる事である。 Σ の正則自己同型とは

Σ の同相写像 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ で、各 Σ_j への制限は正則とな
るもののこと。このとき $f \circ \varphi = f$ となる φ が有限個
しかない時、 $f: \Sigma \rightarrow M$ を stable map と呼ぶ。(より一般

には、marked point 付きで考える事ができ、それによつて
stable map のモデライ空間の位相(及び位相的性質)を論ず
ることが出来る [FO]。) この有限性の条件は具体的に言

換えると、 Σ_j の genus が 2 以上であれば、その成分
については条件なし。 Σ_j の genus が 1 の成分では $f|_{\Sigma_j}$
が定値写像でないか、又は二重点 (「一般の場合」は marked point を
よ...) を少なくとも 1 つ含む事、 Σ_j の genus が 0 の成分では
 $f|_{\Sigma_j}$ が定値写像でないか、又は二重点 (「一般の場合」は二重点
と marked points が合せて) 3 つ以上含む事が成立することと
stability は同値である。

前出の2つの困難①, ②への対応策は次の通りである。
 bubble が起こる時, その極限は $R \times R/\mathbb{Z} \rightarrow M$ (②の解)
 に, いくつかの有理曲線がついてくるものである。(この時
 「図形的」には三重点以上の特異点が見える可能性を危惧され
 るかもしれないが, 実は, 定値有理曲線を考慮すると, 高い
 二重点のみという範囲でおさまる。これには, 如何に stable map
 のモデュライ空間に位相を入れるかという事が関わる。残念な
 がら省略させて置く。[FO] 参照) 逆に 極限に現れ得
 る対象^{*}) (②の解と有理曲線から成る連結集合) が与えら
 れた時, その「近傍」をうまく記述できないかを考えなければ
 ならない。典型的な問題は, 交わる2つの複素曲線に
 対し, これに収束する(既約)複素曲線があるかである。
 大変都合よく, 様々な横断性が満たされている場合の,
 解析的証明は, [M-S]の付録に述べられている。(これは
 量子コホモロジーの結合律の為に用いられる。) 我々の場合
 は横断性の仮定が保障されないのだ, そのまま用いる訳
 にはいかないのだがあるが, 多少の修正をすることで, stable
 map 或いは stable connecting orbit のモデュライ空間の近傍
 を倉西写像で記述する事ができる。(「障害束」付きの
 はりあわせの議論と標語的に言える。) これが ①の
 困難は OK である。②については, stability が stable
^{*}) stable connecting orbit と呼ぶ。

map, stable connecting orbit の自己同型群が有限となる事を意味している事が重要な点である。一般的設定で考えると、(有限次元での) ベクトル束 $E \rightarrow B$ とその切断 s (倉西写像) が与えられ、更に有限群 Γ がこれらを保ちて作用しているとする。 s の Γ -同変な摂動で、0 と横断的なものがあるかと問えば、一般には No である。そこで、一価だけではなく多価の摂動を考える事で、この点を乗り越える。(ここで Γ が有限群である事が本質的である) この零点集合は、枝ごとに有理数の重みをつけて考えるのが自然である事はお判り戴けると思う。あとは、この局所的構成をうまく大域化でき、(コンパクト性は別に示すので) ④係数の cycle が得られるという事が筋である。ここで重要なのは、局所的倉西モデル $E \overset{\Delta}{\hookrightarrow} B$ に対し、その「仮想次元」 $\dim B - \dim E$ がモデュライ空間の全ての点で一定であるという条件である。^{*} (これは Atiyah-Singer の指数定理と、考えられている写像空間は、実2次元の定義域の写像空間であるという事実により保障される。) 詳しくは述べないが、倉西モデルをよりあわせて記述される構造を倉西構造と呼ぶ。局所的倉西写像と多価同変切断として“順々に”摂動する事で、倉西構造から、

④-cycle を得る事ができる。特に 仮想次元が 0 である
^{*} 書き忘れたのだが、「向き」の概念も欠かせない。[F0] 参照

れば、有理数を得る。特に φ の定義が $\mathbb{Q}$ 上で行われていた事になる。

§ 3. 結論

我々の定理を述べて、終りにする。

定理 φ を 閉 symplectic 多様体 (M, ω) 上の exact symplectomorphism とする。 φ の不動点 $\varphi(x) = x$ が全て非退化であるとする、次の成り立つ。

$$\# \text{Fix}(\varphi) \geq \sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(M; \mathbb{Q}).$$

参考文献

[Floer] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Comm. Math. Phys. 120 (1989) 575-611

[FO] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, preprint

[H-S] H. Hofer and D. Salamon, Floer homology and Novikov rings, Floer Memorial Volume, Birkhäuser 1995, 483-525

[Kontsevich] M. Kontsevich, Enumeration of rational curves by torus action, "Moduli space of surfaces" Birkhäuser 1995, 335-368

[O] K. Ono, Symplectic Floer homology, Surveys in Geom. "Symplectic ~~Geometry~~", 1995

——, On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. math. 119 (1995) 519-537

[M-S] D. McDuff and D. Salamon, J Holomorphic curves and quantum cohomology, AMS 1995