

指差型非線形性の橋田型境界値問題:

解の枝の大域的接続

都立大・理 鈴木貴(Takashi SUZUKI)

§1. Introduction.

非線形橋田型境界値問題は数理解析学における定常状態を記述するものとして、又微分幾何学における種々の計量場の変形を表わすものとして古くより興味の対象とされ研究が続けられて来た。特にパラメータ依存問題において自明解が分岐、折れ曲がり等を経て特徴的な解に成長していく様子が実際の問題において重要な意味を持っており、又その解析から幾多の重要な数学的理論が導かれてきている。

このような現象を説明するためには次の3つの段階を踏まなくてはならないだろう:

1. 局所解析: パラメータの小さな変化により自明解から少し近い非自明解が生成される状況を解析する。
2. 漸近解析: パラメータを大きく変化させる時の解の究極の行き先(特異極限)を求め、逆にその状況からパラメータをもとめて古典解を構成する(特異振動)。
3. 大域解析: 局所解析、漸近解析で得られた解がどのように結合しているかを解析する。

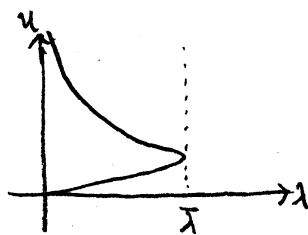
非線形性を与えられた時にこれらの解析を行う場合の最も

基本的な obstruction は空間の次元であり、次いで領域の位相的性質。最後に幾何的性質といった具合になる。困難なのは大域解析である。実際従来は荷理法を基礎とする位相的方法しか存在しなかったのだと思うが、今回はこれに対してより特殊な状況でより詳しいことをあかき 幾何的方法を提案した。即ちこの方法は再編 (rearrangement) という手段によって問題を既知の問題 (例えば radial case) に引きもどすものである。

考えるのは λ を正の定数とする次の方程式である：

$$(1.1) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad (\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \text{有界}), \quad u=0 \quad (\text{on } \partial\Omega; \text{滑らか})$$

これは燃焼や星の構造に関連した数理物理モデルであり、常微分方程式取扱かいによる回転対称解の構造の研究 (円板については Gelfand, I.M., AMS Transl. 1 (2) 29 (1963) 285-381, Joseph, D.D.-Lundgren, T.S., ARMA 49 (1973) 241-269, 円環については Lin, S.S. & Nagasaki, K.-Suzuki, T. ; to appear) や陰関数定理に基づいた局所解析 (Grandall, M.G. - Rabinowitz, P.H., ARMA 58 (1975) 207-218) が行われてきた。即ち Ω が円板の場合に解は自明解 $(\lambda, u) = (0, 0)$ を出発して $\lambda > 0$ の方向に延びたあと一度折れ曲がり最終的に $\lambda \downarrow 0$ とした時に特異極限 $4 \log \frac{1}{|\Omega|}$ を持つ。これはすべて回



度折れ曲がり最終的に $\lambda \downarrow 0$ とした時に特異極限 $4 \log \frac{1}{|\Omega|}$ を持つ。これはすべて回

転対称でありこれ以外に解はない。一方円環の場合には対称解の分岐図は同じであるが折れ曲がった枝に於て解は $\lambda < 0$ の時全ての内点において $+\infty$ になる。そのために "全ての mode において" 対称性破壊が起こる。対称解から分岐した非対称解の枝はその mode m を大域的に保存する。尚一般の領域でも自明解 $(\lambda, u) = (0, 0)$ から出発して折れ曲がる所までは同じであることがわかる。

これにおいて (1.1) は幾何学的構造 (即ち Gauss 曲率一定の曲面を表わすこと) 及び関数論的構造 (即ち Liouville 積分を持つこと) をもつことが知られており前者は Bundle の理論 (Bandle, C., *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, 1980) 後者は Weston-Moseley 理論 (Weston, V.H., *SIAM J. Math. Anal.*, 9 (1978) 1030-1053, Moseley, J.L., *ibid.*, 14 (1983) 719-735) が含まれている。後者は主に漸近解析において用いられてきておりここでは大域解析に前者を応用することを試みてみたい。

尚、関数論的構造に基づく漸近解析は最近の筆者と長崎憲一との研究も生んだ。以下の話と関係するのでその内容を要約してある； (1.1) の解 (λ, u) に対し

$$(1.2) \quad \Sigma = 1 \int_{\Omega} e^u dx$$

は $\lambda < 0$ において a. 0 ; b. $8\pi m$ ($m=1, 2, \dots$) ; c. $+\infty$

にしか集積しない。その時解は a. 自明解 0 に一様収束する; b. 有限 m 個の点のみで爆発する (finite point blow-up); c. 全ての内点において $+\infty$ となる (entire blow-up) となる。
b の場合、極限関数は

$$(1.3) \quad u_0(x) = 8\pi \sum_{j=1}^m G(x, \kappa_j)$$

であり爆発点 $\{\kappa_j\}$ は

$$(1.4) \quad \nabla_x K(\kappa_j, \kappa_j) = \sum_{\ell \neq j} \nabla_x G(\kappa_\ell, \kappa_j) \quad (1 \leq j \leq m)$$

をみたす。但し $G = G(x, y)$ は Ω における Dirichlet 条件下の $-\Delta$ の Green 関数であり $K(x, y) = G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \log |x - y|$ 。

前記の radial case にもどってみると、 Ω が円板の場合には b の $m=1$ が起こっており、円環の場合の回転対称解では c が起こっている。先に触れた円環上の m -mode の回転非対称解は m 点爆発を起こすだろうと予想できる。

Waston-Hosoya 理論は逆に単連結領域上 m 点爆発する解を特異摂動法によって構成したものである。今回述べるのは、もし Σ が 下は 8π に近づくのであればその特異極限 $(\lambda, u) = (0, 8\pi G(x, \kappa))$ は自明解 $(\lambda, u) = (0, 0)$ と唯一回の折れ曲がりによって結合するということである。円板の場合には当然そのようにならざるより従って上述の事実の証明は先に述べた

幾何的方法によつてなされるのである。

bのような現象は bubble と呼ばれ、幾何学における非線形問題。例えば H-system (Brezis, H. - Coron, J.M., ARMA 89 (1986) 21-56) や 山辺型問題 (Ray, O., C.R. 305 (1987) 591-594) において発見され解明されてきたものである。従来の研究は確率論から刺激を受けた P.L. Lions の concentration compactness の論法を基礎としていた。我々の手法は関数論を主体としたものであり、幾何学的構造との関連について述べるために、次節においてそのことを簡単に説明してみたい。

92. 関数論的構造

Liouville 積分の以下の導出法は筆者に依るもので前記の特異極限の決定において有効であった。

方程式 (1.1) の Liouville 積分を持つことを説明するためには $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ から複素変数 $z = x_1 + i x_2$, $\bar{z} = x_1 - i x_2$ へ移行すると便利である。この時 (1.1) より

$$u_{z\bar{z}} = -\frac{\lambda}{4} e^u$$

でありこのことから

$$(2.1) \quad S = u_{z\bar{z}} - \frac{1}{2} u_z^2$$

は $S_z = u_z z \bar{z} - u_z u_z \bar{z} = 0$ かつ、その正則関数である。一方 (2.1) は u に関する Riccati 方程式であり $g = e^{-u/2}$ は線形方程式

$$(2.2) \quad g_{zz} + \frac{1}{2} S g = 0$$

をみたす。従って $\{g_1, g_2\}$ は解の基本系：

$$g_1|_{z=z^*} = \frac{\partial}{\partial z} g_2|_{z=z^*} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z} g_1|_{z=z^*} = g_2|_{z=z^*} = 0$$

とする z のみの関数 $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(\bar{z})$, $\bar{f}_2 = \bar{f}_2(\bar{z})$ によって

$$g = e^{-u/2} \equiv \bar{f}_1(\bar{z}) g_1(z) + \bar{f}_2(\bar{z}) g_2(z)$$

と書かれる。

ここで $z^* = (x_1^*, x_2^*) \in U \cap \Omega$ において最大値をとる点, $z^* = x_1^* + \sqrt{-1} x_2^*$ とおけば, $C = e^{-u/2}|_{z=z^*} > 0$ に対して $f_1 = C g_1$, $f_2 = \frac{\lambda}{8} C^{-1} g_2$, 即ち

$$(2.3) \quad e^{-u/2} = C |g_1|^2 + \frac{\lambda}{8} C^{-1} |g_2|^2$$

となる。実際 $W_z(g_1, g_2) \equiv g_1 g_{2z} - g_{1z} g_2 = 1$ に注意する

と $g = e^{-u/2}$ に対して $\bar{f}_1(\bar{z}) = W_z(g, g_2)$, $\bar{f}_2(\bar{z}) = -W_z(g, g_1)$ である

が $z = z^*$ によって

$$\bar{f}_1(\bar{z}) = g(z^*, \bar{z}), \quad \bar{f}_2(\bar{z}) = g_z(z^*, \bar{z})$$

であることがわかる。従って (2.2) と $S=S(z)$ より $g=e^{-u/2}$

が実数値であることにより $f_1(z) \equiv \overline{f_1(\bar{z})}$, $f_2(z) \equiv \overline{f_2(\bar{z})}$

も (2.2) をみたすことがわかる。 $\nabla u(z^*)=0$ より

$$\bar{f}_1 \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^*} = g(z^*, \bar{z}^*) = e^{-u/2} \Big|_{z=z^*} = c$$

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^*} = g_{\bar{z}}(z^*, \bar{z}^*) = -\frac{1}{2} e^{-u/2} u_{\bar{z}} \Big|_{z=z^*} = 0$$

$$\bar{f}_2 \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^*} = g_z(z^*, \bar{z}^*) = -\frac{1}{2} e^{-u/2} u_z \Big|_{z=z^*} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^*} = g_{z\bar{z}}(z^*, \bar{z}^*) = -\frac{1}{2} e^{-u/2} u_{z\bar{z}} \Big|_{z=z^*} = \frac{\lambda}{8} e^{u/2} = \frac{\lambda}{8} c^{-1}$$

となり、 $f_1 = c g_1$, $f_2 = \frac{\lambda}{8} c^{-1} g_2$ 即ち (2.3) がわかる。

最後に例えば $\gamma_1 = (\frac{\lambda}{8})^{1/2} g_1$, $\gamma_2 = c g_2$ と書くと $W_z(g_1, g_2)=1$ より、 $F = \gamma_1/\gamma_2$ に対し

$$\begin{aligned} (2.4) \quad \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{1/2} e^{u/2} &= \left\{ c \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2} |g_1|^2 + \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{1/2} c^{-1} |g_2|^2 \right\}^{-1} \\ &= f(F) \equiv \frac{|F'|}{1+|F|^2} \end{aligned}$$

が成立することになる。これは通常 Liouville 積分と言われるもので、 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の解析関数 $F=F(z)$ は (2.2) の 2 > の解の商、即ち

$$(2.5) \quad \{F, z\} = -\frac{1}{2} S$$

をみたす。但し $\{F, z\} = \frac{3}{4} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{F'''}{F'}$ は F の Schwarz 微分である。

従って (1.1) は

$$(2.6) \quad \rho(F) \Big|_{\partial\Omega} = \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}}$$

と等値となる。ここで $\rho(F)$ は解析関数 F の球面導関数、即ち $\overline{\mathbb{C}}$ を直径が 1 の Riemann 球、 $\overline{F}$ を F に導入された Ω から $\overline{\mathbb{C}}$ への自然な等角写像、 dx, dy を $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$ の自然な計量とする時、 $\overline{F}$ の下で関係

$$(2.7) \quad \frac{dy}{dx} = \rho(F)$$

が成り立つ。言わば (1.1) は与えられた領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を $\overline{\mathbb{C}}$ 上の球面導関数が一定であるような $\overline{\mathbb{C}}$ への等角写像 $\overline{F}$ を構成する問題である。 Ω の $\overline{F}$ による像の写像としての面積が

$$\int_{\Omega} \rho(F)^2 dx = \frac{1}{8} \int_{\Omega} e^u dx = \frac{1}{8} \Sigma$$

であり、 $\overline{\mathbb{C}}$ の表面積が π であること、又 $\partial\Omega$ の $\overline{F}$ による写像としての長さ

$$\int_{\Omega} \rho(F) d\lambda = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 |\Omega|$$

であることと勘案すると前節で述べた事実、即ち $\lambda \downarrow 0$ において Σ が 8π の整数倍 (λ は 0 または $+\infty$) に行くことが了解される。それは当に "bubble" と呼ぶにふさわしい現象である。

3.3. 幾何的構造

Ω が円板の時に (1.1) の解の分岐図はどうか。容易に想像し得るように自明解 $(\lambda, u) = (0, 0)$ から出発して特異極限 $(0, 8\pi G(x, 0))$ ($G(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}$) に到る間に $\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx$ は 0 から 8π まで単調に増大する。 λ に関する折れ曲がりでは Σ が 4π となる所で唯一度起こる。これは Ω が円板に近いような場合には同様の事が成り立つのであろうか。そのことを保証するのは、スペクトル解析と等周不等式なのである。

3.1 で述べた一般領域下で自明解より出発する解の枝 (Crandall-Rabinowitz 理論) は折れ曲がりと起こるまでは最小性を持っている。即ち、 λ を固定した時、その枝の上に存在する解 u_λ は他のどの解 u に対しても $u_\lambda(x) \leq u(x)$ ($x \in \Omega$) という関係を持つ。このことは、非線形性 $f(u) = e^u$ の単調性に依るものである。一方解 $\phi = (\lambda, u)$ の最小性は、そのまわりの線形化

作用素 $A(p) \equiv -\Delta_D - p$ ($p = \lambda e^u$) の第1固有値 $\mu_1 = \mu_1(p)$ と直接に関わっている。即ち一般に (1.1) の解 $g = (\lambda, u)$ に対し $\mu_1(p) > 0$ ($p = \lambda e^u$) ならば u は最小解であり、逆に最小解は $\mu_1(p) \geq 0$ をみたす。

C. Bandle は $-\Delta_D$ に関する Faber-Krahn の不等式 (即ち面積一定の領域のうち、円板が $-\Delta_D$ の第1固有値の最小値を実現すること) に着目され、次の事実を示して一般の領域上の最小解の枝の折れ曲がりをも、上述の円板領域上のそれとの比較において、極めて sharp に捕えることに成功した:

Prop. 1 (1.1) の解 $g = (\lambda, u)$ に対し $\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx < 4\pi \Rightarrow \mu_1(p) > 0$

このこと、固有関数の節領域に関する Courant の定理に基づく汎値の論法より。

Prop. 2 同様に $\Sigma < 8\pi \Rightarrow \mu_2(p) > 0$.

となる。但し $\mu_2(p)$ は $A(p)$ の第2固有値である。

C. Bandle 自身は折れ曲がり点から Σ の幾何学的意味付との関連で捕えようとしたことに気付いていない。 $M = (\Omega, db)$ を計量 $db^2 = p ds^2 = p(dx_1^2 + dx_2^2)$ に基づく曲組 $\Delta \log p + p \geq 0$ (in Ω)

の時 有限個の Jordan 閉曲線 で囲まれた領域 $\omega \subset \Omega$ に対して Bol の不等式

$$(3.1) \quad l(\omega)^2 \geq \frac{1}{2} (8\pi - m(\omega)) m(\omega).$$

但し $l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\omega} db = \int_{\partial\omega} p^{\frac{1}{2}} ds$, $m(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega} d\tau = \int_{\omega} p dx$. ω 成り立

このみを用いている。上述のように $g = (\lambda, u)$ を (1.1) の解,

$p = \lambda e^u$ とすると M は自然に球面 $\mathbb{C}$ にはめ込まれるのである。この場合には M の Gauss 曲率 $E = -\Delta \log p / p = 1/2$ であり、こゝに曲座標 (即ち球面) に沿って Schwarz 対称化法を行なうことにより Rayleigh 商である $\mu_1(p)$ を下から評価するというのが C. Bandle の基本的なアイデアである。

より詳しくは次の如くである。 $g = (\lambda, u)$ を (1.1) の解, $p = \lambda e^u$ に対し $\Sigma \equiv \int_{\Omega} p dx \in (0, 8\pi)$ とする。 $M = (\Omega, db)$, $db^2 = p dx^2$ を曲面, $d\tau = p dx$ をその面積要素とする。一方これとは別に標準曲面 $m^* = (\Omega^*, db^*)$, $\Omega^* = \{|x| < 1\}$, $db^{*2} = p^* dx^2$, $d\tau^* = p^* dx$ を用意する。但し $p^* = \lambda^* e^{u^*}$ で $g^* = (\lambda^*, u^*)$ は

$$-\Delta u^* = \lambda^* e^{u^*} \quad (\text{in } \Omega^*), \quad u^* = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega^*),$$

$$\Sigma \equiv \int_{\Omega} p dx = \int_{\Omega^*} p^* dx \in (0, 8\pi)$$

なるものとする。実際 u^* は回転対称であり、初等関数

を用いて書けることが知られている。又、先に述べたように Ω の平板 Ω^* の時には (1.1) の解、枝に沿って Σ は 0 から $\delta\lambda$ まで単調に増大するので、逆に与えられた $\Sigma \in (0, \delta\lambda)$ に対して $\int_{\Omega^*} p^* dx = \Sigma$ とする $g^* = (\lambda^*, u^*)$ が唯一存在することに注意する。

さて、 Ω 上の関数 $g = g(x)$ に対して、一般対称化関数 $g^* = g^*(x)$ は Ω^* 上の関数であって

$$g^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \mu \mid x \in \Omega_\mu^* \}$$

となる。但し Ω_μ^* は Ω^* 内の同心円環であって $\Omega_\mu = \{x \mid g(x) < \mu\}$ に対して

$$\int_{\Omega_\mu^*} d\tau^* = \int_{\Omega_\mu} d\tau$$

となるものである。この等式の性質を示すことができる：

$$(P1) \quad \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ 連続}, \quad u: \bar{\Omega} \text{ 上連続} \Rightarrow \int_{\Omega} \gamma(u) d\tau = \int_{\Omega^*} \gamma(u^*) d\tau^*$$

$$(P2) \quad u: \Omega \text{ 上解析的} \geq 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx$$

このことと Rayleigh 原理

$$(3.2) \quad \mu_1(P) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \mid v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} v^2 d\tau = 1 \right\}$$

に よ、 (

$$(3.3) \quad \mu_1(p) \geq \mu_1(p^*)$$

が得られ. Prop. 1 の証明は radial case に帰着される.

即ち $\Omega = \Omega^*$ における (1.1) の解 $g = (\lambda, u)$ に対し, $\Sigma \equiv \lambda \int_{\Omega} e^u dx < 4\pi \Rightarrow \mu_1(p) > 0$ となることを示せば良い. このことはこの節の最初に述べた幾何学的考察によつて明らかである. 即ち Ω が円板の場合には (1.1) の解 $g = (\lambda, u)$ は $\Sigma \in (0, 8\pi)$ によつてパラメトライズされてあり, $0 < \Sigma \leq 4\pi$ までの間は解は最も解の枝に属している. 又は $\mu_1(p) = 0$ の時は Crandall-Rabinowitz による局所解析によつて解の枝が丁度折れ曲がる所. 即ち $\Sigma = 4\pi$ 以外にはあり得ないことがわかる. よつて $\Omega = \Omega^*$ の時, $0 < \Sigma < 4\pi \Rightarrow \mu_1(p) > 0$ である.

上述の事をより解析的に示すには, Ω が円板の時に知られている厳密解のまもりで, 線形化作用素のスペクトルを評価することになる. C. Bandle は変数分離を行なつたあと, 適当な変数変換を行なうと, 線形化作用素の固有値問題が Legendre の方程式

$$(3.4) \quad [(1-\beta^2) \beta_\beta]_\beta + [2\delta - \mu^2/(1-\beta^2)] \beta = 0$$

に帰着することを見出した. この方程式は, $\delta = 1$ の時には初

等的な解を持つ。この事は §3 で述べた Weston-Macby 理論の他、
円環領域上の解の対称性破壊を調べる上にも有用であった。

§4. スペクトル解析

最早、§3 で述べた大域解析を実行するまでは明らかとなった。
即ち、(1.1) の解 $g = (\lambda, u)$ を $\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx \in (0, 8\pi)$ でパラメタ
ライズすることに他ならない。 $\lambda \in (0, 1)$ に対して関数空間 $X = \{v$
 $\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\hat{X} = \frac{X}{\mathbb{R}}$, $Y = C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $\hat{Y} = \frac{Y}{\mathbb{R}}$ を用意し、
非線形写像 $\Phi = \Phi(\lambda, \Sigma): \hat{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \hat{Y}$ を

$$(4.1) \quad \Phi(\lambda, \Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Delta u + \lambda e^u \\ \int_{\Omega} e^u dx - \frac{\Sigma}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\lambda = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix})$$

と置く時、 Φ の零点は (1.1) の解で $\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx$ なるものを
表す。 $(\lambda, \Sigma) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0)$ は (1.1) の自明解である。この等

Lemma 1 Σ - λ 平面において $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0)$ より出る Φ の零点は
超平面 $\Sigma = 8\pi$ に接近する枝 γ である。 $0 < \Sigma < 8\pi$ において
は γ 以外の Φ の零点は存在しない。

これは陰関数定理と a priori 評価から証明できる。

後者については次の事実が本質的である：

Prop. 3. $\Phi(R, \Sigma) = 0$, $0 < \Sigma < 8\lambda \Rightarrow \|u\|_{\infty} \leq -2 \log(1 - \frac{\Sigma}{8\lambda})$ (where $R = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$).

この命題の証明にも等周不等式が使われる。最も簡明な方法は u の各 level 集合に対して (3.1) を用いることである (Suzuki, T., Nagasaki, K., Topics in Nonlinear PDE III, N-H. pp. 185-218, 1986)。

次に前者については次のことを示さなければならぬ:

Prop. 4. $\Phi(R, \Sigma) = 0$, $0 < \Sigma < 8\lambda \Rightarrow d_R \Phi: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ は同相。

これより $\angle a 1$ を示すことは標準的である。 $\angle a 1$ が成り立つと Prop. 2 によって次のことがわかる:

$\angle a 2$ Σ - R 平面における $\angle a 1$ の枝 γ は λ - u 平面においては $(\lambda, u) = (0, 0)$ より出発し、高々1回だけ折れ曲がる。

従って γ で述べたように

Theorem $\lambda > 0$ において $\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx$ が下より 8π となるような特異極限 $(\lambda, u) = (0, 8\lambda G(\lambda, \pi))$ は自明解と唯1回の折れ曲がりを通り結ぶ。

Waston-Moseley 理論で構成した枝については、定理の仮定がみたされる十分条件を与えることは容易である。

そこで Prop. 4 の証明の概略を述べよう。 (R, Σ) を Φ の零点とする時、線形化作用素 $d_R \Phi$ は $R = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$, $p = \lambda e^u$ に対し

$$(4.2) \quad d_R \Phi = \begin{pmatrix} \Delta + p & e^u \\ \int_{\Omega} e^u \, d\lambda & \frac{\Sigma}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

となる。この作用素は $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ の $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ を定義域とする自己共役作用素と見なせる。対応する対称双線形形式 $\sigma = \sigma(\cdot, \cdot)$ は $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ を定義域とし、関係

$$(4.3) \quad \sigma(f, g) = \langle (d_R \Phi) f, g \rangle_{L^2(\Omega) \times \mathbb{R}} \quad \left(f \in \begin{matrix} H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \times \mathbb{R} \end{matrix}, g \in \begin{matrix} H_0^1(\Omega) \\ \times \mathbb{R} \end{matrix} \right)$$

により定義できる。 $f = \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix}$ と書くと $\Sigma = \int_{\Omega} p \, d\lambda$ より

$$\sigma(f, g) = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\lambda + \int_{\Omega} p \left(v + \frac{\mu}{\lambda} \right) \left(w + \frac{\mu}{\lambda} \right) d\lambda$$

と因数分解される。即ち Banach 空間としての同相写像

$$(4.4) \quad f = \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} \in \begin{matrix} H_0^1(\Omega) \\ \times \mathbb{R} \end{matrix} \mapsto \tilde{f} = v + \frac{\mu}{\lambda} \in \tilde{V} \equiv \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = \text{constant on } \partial\Omega \}$$

を導入すれば

$$(4.5) \quad \sigma(f, g) = -a_p(\tilde{f}, \tilde{g})$$

但し

$$a_p(v, w) = \int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot \nabla w - p v w \} d\lambda$$

となる。即ち、 $\tilde{A}_p$ を $a_p|_{\tilde{V} \times \tilde{V}}$ に対応する $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素とする時、 $0 \notin \sigma(d_e \Phi(h, \Sigma)) \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(\tilde{A}_p)$ である。

$$\lambda = 0: \sigma(\tilde{A}_p) = \{ \tilde{\mu}_j(p) \}_{j=1}^{\infty} \quad (-\infty < \tilde{\mu}_1(p) < \tilde{\mu}_2(p) \leq \dots) \text{ とおく。}$$

これは Courant の mini-max 原理で書き表わすことができる。特に定数関数 $\in \tilde{V}$ より $\tilde{\mu}_1(p) < 0$ である。以下で示すことは $0 < \Sigma < 8\pi \Rightarrow \tilde{\mu}_2(p) > 0$ となることである。

新しい固有値問題

$$(4.6) \quad g \in \tilde{V}, \quad \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \chi \, d\lambda = \nu \int_{\Omega} g \chi p \, d\lambda \quad (\forall \chi \in \tilde{V})$$

を導入する。この固有値を $0 = \tilde{\nu}_1(p) < \tilde{\nu}_2(p) \leq \dots \rightarrow +\infty$ とする。

$\tilde{\mu}_2(p) > 0 \Leftrightarrow \tilde{\nu}_2(p) > 1$ である。 $\tilde{\nu}_1(p) = 0$ に対応する固有関数は定数関数であるから

$$\tilde{\nu}_2(p) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\lambda \mid v \in \tilde{V}, \int_{\Omega} v^2 p d\lambda = 1, \int_{\Omega} v p d\lambda = 0 \right\}$$

となる。

そこで対称化法により $0 < \Sigma < 8\pi \Rightarrow \tilde{\nu}_2(p) \geq \tilde{\nu}_2(p^*)$ を示す。

但し、前節で述べたように $p^* = \lambda^* e^{u^*}$, $g^* = \begin{pmatrix} u^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}$ は $\Omega^* = \{ |x| < 1 \}$ における (4.1) の解で、 $\Sigma = \int_{\Omega} p^* d\lambda$ となるものを指す。一方において radial case, 即ち $\Omega = \Omega^*$ の場合には $\tilde{\nu}_2(p) > 1$ を示す

にておこるので Prop. 4 が成り立つ。以下、前半部分の証明の概略を述べよう。

(4.6) における第2固有関数 g は Ω で解析的で 2つの節領域をもつ。その節線は Ω の中で閉じる場合と $\partial\Omega$ に触る場合がある。 g は $\partial\Omega$ 上定数であるから、後者の場合には $g|_{\partial\Omega} = 0$ となる。 $\Omega_{\pm} = \{x \in \Omega \mid \pm u(x) > 0\}$ とおくと、いずれの場合にも $\overline{\Omega_{\pm}} \cap \{g=0\}$ は単純閉曲線になる。

$g_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (\pm g) \vee 0$ とおく。 g_{+} に対しては Ω において前節で述べた Bundle の対称化法を行なう。 g_{+}^{*} は Ω^{*} の回転対称関数であって、 $\text{supp } g_{+}^{*} \subset \Omega^{*}$ 。特に $g_{+}^{*} \in \hat{V}^{*} \equiv \{v \in H^1(\Omega^{*}) \mid v = \text{constant on } \partial\Omega^{*}\}$ となる。 g_{-} に対しては Ω において次の対称化法を行なう：

$$g_{-*}(x) = \inf \{ \mu \mid x \in A_{\mu}^{*} \}.$$

但し、 A_{μ}^{*} は Ω^{*} の同心円環で $\partial\Omega^{*}$ を含むもので、 $A_{\mu} = \{x \in \Omega \mid g_{-}(x) > \mu\}$ に対し

$$\int_{A_{\mu}^{*}} d\tau^{*} = \int_{A_{\mu}} d\tau$$

なるものとする。但し、前述の $p^{*} = \lambda^{*} e^{u^{*}}$ に対し $d\tau^{*} = p^{*} dx$ である。

このような対称化法を行なう時、 $\text{supp } g_{+}^{*} \cap \text{supp } g_{-*}$ は Ω^{*} の同心円環となること、及び $g_{+}^{*}, g_{-*} \in \tilde{V}^{*}$ に注意する。更に

位置の連続関数 γ に対し

$$\int_{\Omega} \gamma(v) dx = \int_{\Omega^*} \gamma(v^*) dx^* = \int_{\Omega^*} \gamma(v_*) dx^*$$

となることも標準的である。問題は Dirichlet 積分の非増加 RPS

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla v^*|^2 dx^*, \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla v_*|^2 dx^*$$

ということであるが、この事は $\mathcal{G}_{\pm}$ に対して次の状況: 即ち 領域 $\omega \subset \Omega$ において v は正値解析的であり、 $\text{supp } v = \overline{\omega}$, $\{v=0\}$ $(\partial\omega)$ が単純閉曲線の場合には C-Bundle の証明をたどると正しいことがわかる。

従って

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{G}_+|^2 dx &\geq \int_{\Omega^*} |\nabla \mathcal{G}_+^*|^2 dx^*, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_+ p dx = \int_{\Omega^*} \mathcal{G}_+^* p^* dx^*, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_+^2 p dx = \int_{\Omega^*} \mathcal{G}_+^{*2} p^* dx^* \\ \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{G}_-|^2 dx &\geq \int_{\Omega^*} |\nabla \mathcal{G}_-^*|^2 dx^*, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_- p dx = \int_{\Omega^*} \mathcal{G}_-^* p^* dx^*, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_-^2 p dx = \int_{\Omega^*} \mathcal{G}_-^{*2} p^* dx^* \end{aligned}$$

となり、 $\mathcal{G}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_+^* - \mathcal{G}_-^* \in \tilde{V}^*$ は

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathcal{G}|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla \mathcal{G}^*|^2 dx^*, \quad \int_{\Omega^*} \mathcal{G}^* p^* dx^* = \int_{\Omega} \mathcal{G} p dx = 0, \quad \int_{\Omega^*} \mathcal{G}^{*2} p^* dx^* = \int_{\Omega} \mathcal{G}^2 p dx$$

とみたす。RPS

$$\tilde{\gamma}_2(p) \geq \tilde{\gamma}_2(p^*)$$

である。