

回転球面上における発散性乱流

東京大学理学系研究科 北村 祐二 (YUJI KITAMURA)

東京大学理学系研究科 松田 佳久 (YOSHIHISA MATSUDA)

1 はじめに

回転球面上における非発散性の乱流は Williams(1978) 以来, 非発散順圧渦度方程式を用いて, Yoden and Yamada(1993) 等によって詳しく調べられており, 回転の効果によって, 東西方向の帯状構造が現れることや, 特に回転の強い場合には極域に西向きジェットが卓越することが知られている. しかし, 非発散順圧渦度方程式ではロスビーモードのみを取り扱うことになり, 成層の効果が全く含まれていないことになる. 回転と成層の効果を議論する最も簡単なモデルとしては, 発散場を含んだ浅水方程式系が考えられる.

Farge and Sadourny(1989) は f 面上の浅水方程式系での乱流を取り扱い, 減衰性乱流の渦度場の構造が McWilliams(1984) が見出した非発散の場合とは異なる点を指摘した. また, Arai and Yamagata(1994) は同様の f 面上の浅水方程式系において, 渦度の符号に関する非対称性が生じうることを示した. 一方, 回転球面上の浅水方程式系による乱流は Cho and Polvani(1996) によってなされており, ロスビーの変形半径が小さい場合には赤道に西向きジェットが生じるという結果を得た. そこで本研究では回転球面上の浅水方程式系を用い, Cho and Polvani 同様減衰性乱流の数値実験を行うことにより, 彼らの結果を検証するとともに, 赤道域の西向きジェットについて議論する.

2 数値実験の方法

無次元化した球面上の浅水方程式系は以下のように書き下せる:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + f)U\} + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + f)V\} \right] + \nu_{2p} ((-1)^p \Delta^p - 2^p) \zeta, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & -\frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + f)V\} - (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \{(\zeta + f)U\} \right] \\ & - \Delta \left[\frac{\phi}{\epsilon} + \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} \right] + \nu_{2p} ((-1)^p \Delta^p - 2^p) D, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\phi U) + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\phi V) \right] - D. \quad (3)$$

ここで, $U = u\sqrt{1-\mu^2}$, $V = v\sqrt{1-\mu^2}$, ζ : 渦度, D : 発散, ϕ : ジオポテンシャルの平均からのずれ, λ : 経度, μ : サイン緯度, $f(=\mu)$: コリオリ因子であり, また $\epsilon = (2a\Omega/\sqrt{gH})^2$ は Lamb パラメータと呼ばれるもので, この系を特徴付けるパラメータである. 無次元化は, ϕ についてのみ重力加速度 g と流体層の平均の厚さ H を用い, その他については, 惑星半径 a と回転角速度 Ω を用いている. 浅水方程式系の場合, 特徴的な速度として惑星の自転速度, 重力波の速度, 流体の速度の 3 つが存在し, これらの比によって系の時間発展が決まることから分かるように, 独立なパラメータは 2 つ存在することに注意しなければならない.

(1), (2), (3) の数値積分においては, スペクトル法を用い, 非線形項の計算は変換法によって行った. また, 波数の切断は三角切断を採用した. 時間方向については leap-frog 法を用いて積分

し, computational mode の除去のために Asselin(1972) のタイムフィルタを用いた. さらに, ロスビーモードと重力波モードとのタイムスケールが大きく異なることによって生じる困難を軽減するため, semi-implicit 法を用いている.

初期条件は今回は渦度場のみを与え, 発散場や水面の変位は一律に 0 とおいた. このようにして与えられた初期場は力学的にバランスした状態にないので, 時間とともにその応答として発散場や水面の変位が生じることになる. さて, このように初期値が与えられた場合, 全波数 n に存在するエネルギーは

$$E(n, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(n+1)} |\zeta_n^m(t)|^2, \quad (4)$$

と書ける. 初期の渦度 ζ_n^m の与え方であるが, 全波数については

$$E(n, t=0) = E_0 \frac{n^{\gamma/2}}{(n+n_0)^\gamma}, \quad (5)$$

の分布を与え, 各 n について存在するすべての東西波数 m に等分配することで振幅を定め, 各モードの位相はランダムに与えた.

3 結果

3.1 時間発展の様相

まずパラメータによって場の様相がどのように異なるかを見るために, 切断波数 85, $\{n_0, \gamma, p, \nu_{2p}\} = \{8, 20, 8, 1.0 \times 10^{-31}\}$ で, $\{\epsilon, R\} = \{1, 0.42\}, \{1000, 1.66 \times 10^{-2}\}$ の 2 通りの場合について数値実験を行った. ただし, ロスビー数 R は $R \equiv U/2\Omega L$ で定義されるものであり, 特徴的な長さ L および速度 U はそれぞれ,

$$L = \frac{\pi a}{2n_0}, \quad U = \sqrt{2\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{u^2 + v^2}{2} d\mu d\lambda,$$

としている. Lamb パラメータ ϵ およびロスビー数 R はそれぞれ, ロスビー変形半径 $L_D \equiv \sqrt{gH}/\Omega$, Rhines のスケール (ベータ効果が重要となるスケール) $L_\beta \equiv \pi\sqrt{2aU/\Omega}$ と

$$\epsilon = \left(\frac{2a}{L_D}\right)^2, \quad R = \frac{L_\beta^2}{4\pi^2 a L}, \quad (6)$$

なる関係があり, Lamb パラメータが大きいことは, 変形半径が小さいことに対応している.

図 1, 2 はそれぞれ $\epsilon = 1, 1000$ の場合のついて, ほぼ定常になった時の渦度場, 発散場, 水面の変位の等高線を描いたものである. $\epsilon = 1$ の時 (図 1) は回転の効果が小さい場合に対応しているが, 渦度場は孤立渦を形成しており順圧の場合と類似した構造が得られていることが分かる. また発散場については, 初期の特徴的スケールより波数の大きな構造が卓越しているが, その分布は一律で, 渦度場とは全く異なる. 一方水面の変位は, それとは逆に波数の小さな構造が卓越していて, 振幅の大きなところには孤立渦が存在している (逆に, 孤立渦があるからといって水面の変位が大きいとは限らない). いずれのパターンも, 比較的等方的な構造を保っていて, Farge and Sadourny(1989) による f 面上の浅水方程式系での結果に良く対応している.

一方, $\epsilon = 1000$ の時 (図 2) では惑星の回転の効果を強く受けるために, 渦度や水面の変位にはそれを特徴づけるような構造が現れていることが分かる. 渦度について見ると, 振幅が赤道域に集

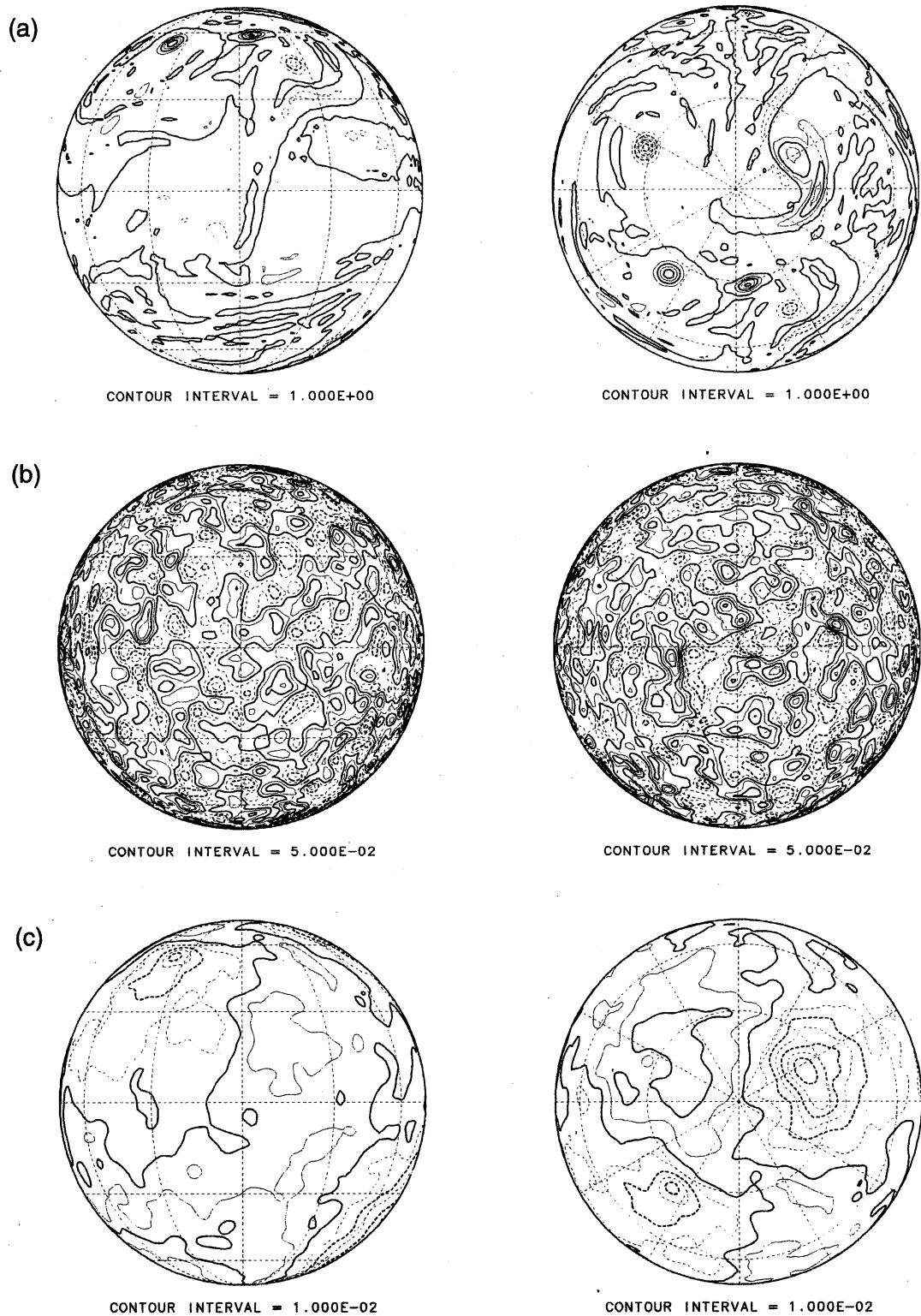


図 1: $\epsilon = 1, t = 100$ の時の (a) 渦度, (b) 発散, (c) 水面の変位の等高線. いずれも左側は中心が赤道, 右側は中心が北極の正射図法で描かれており, 破線は負の等高線を示す.

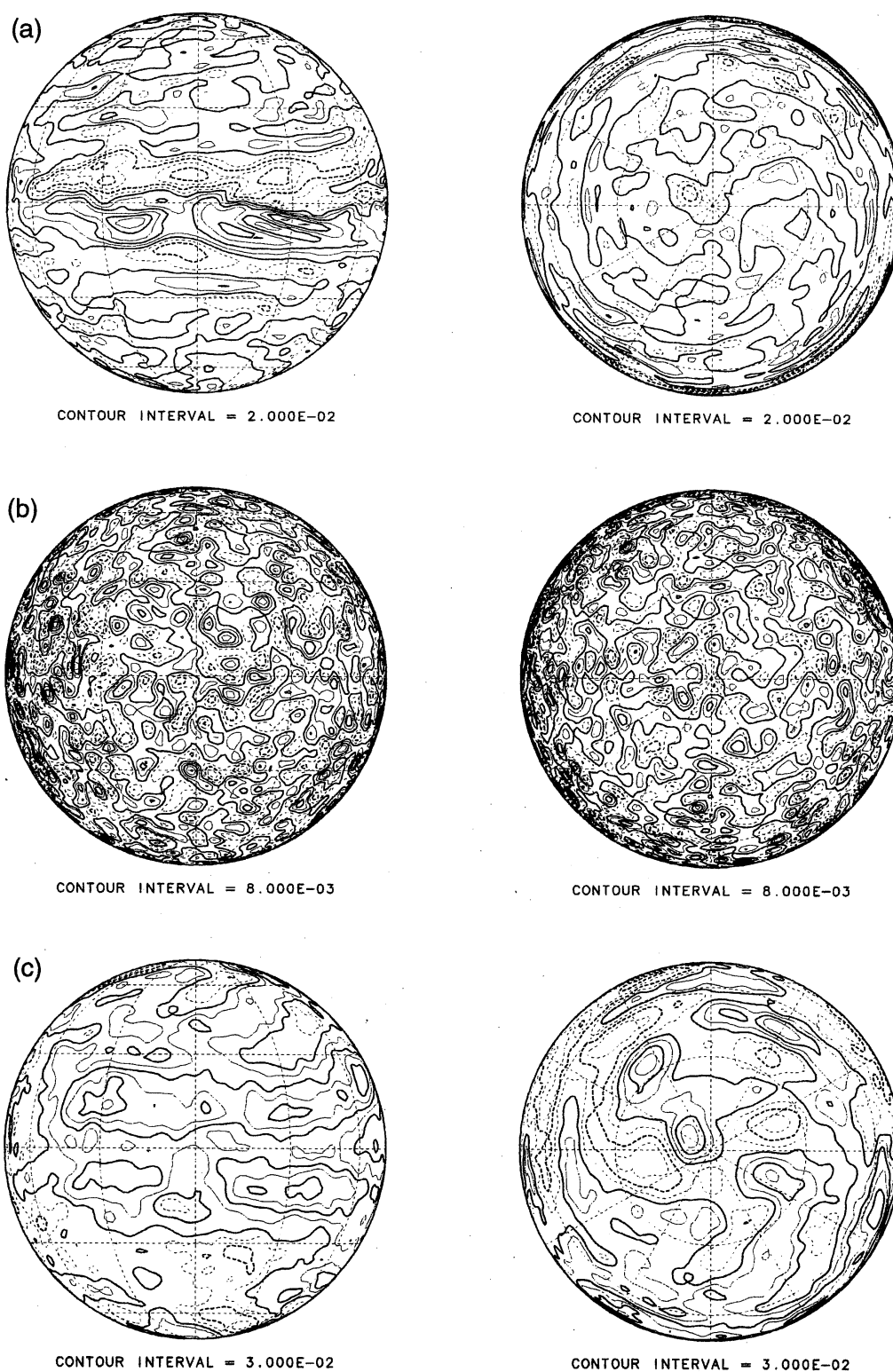


図 2: $\epsilon = 1000, t = 5000$ の時の等高線. 図 1 参照.

中しておりその分布が東西に広がっていることが分かる。また中高緯度では、北極から見た図では右周りの螺旋構造が見られる。水面の変位も渦度と同様のパターンが見られ、振幅は赤道域で大きくなる。しかし、この傾向は渦度の場合ほど顕著ではない。東西波数に注目すると、極域では順圧の場合に見られるような周極渦 (Yoden and Yamada, 1993) は現れず、せいぜい東西波数 3 程度にとどまっていることが分かり、このことが浅水方程式系の大きな特徴であるといえる。このことは、渦点に対応する流線関数が、浅水方程式系での準地衡風近似において、

$$\left(\Delta - \frac{1}{L_D^2}\right) G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}), \quad (7)$$

を満たす $G(\vec{r})$ で与えられることと関係している。 $G(\vec{r})$ が、無限遠で収束する条件から変形 Bessel 関数を用いて

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} K_0(r/L_D), \quad (8)$$

と表され、その漸近形が

$$K_0(r/L_D) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2r/L_D}} e^{-r/L_D}, \quad (9)$$

であることから、ポテンシャル渦度の相互作用は $L_D \ll r$ ではほとんど起こらない。したがって、変形半径以上では渦の非線形相互作用が困難となる。すなわち、浅水方程式系における乱流は、Rhines のスケール L_β とともにロスビー変形半径 L_D が重要な意味を持っていて、これらはどちらも 2 次元乱流でのアップワードカスケードを抑制することが示唆される。

図 3 は、図 2 のケースについて、北緯 $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ での水面の変位の時間変化を表したものであり、ある程度の時間が経った後では特定の東西波数を持ったロスビー波と思われる波が西向きに伝播する様子が見てとれる。各緯度での違いは、低緯度の方が波の伝播速度が速いこと、特徴的な東西波数が低緯度側の方が小さいことが挙げられる。また、特に低緯度側では時間とともにより小さい東西波数のモードが卓越してくる様子も分かると思う。ロスビー波の位相速度の緯度依存性は、各緯度において β 平面を考えると、今考えている $k, l \ll 1/L_D$ の場合には、その分散関係式から

$$c_x \simeq -\frac{\beta(\theta_0)}{k^2 + l^2 + 1/L_D(\theta_0)^2} \sim \beta(\theta_0) L_D(\theta_0)^2 \propto \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0}, \quad (10)$$

であるので、これを反映したものであると考えられる。赤道域では別の取り扱いが必要で

$$c_x \simeq -\frac{1}{ak^2/2\Omega + (2n+1)/\sqrt{gH}} \quad (11)$$

となるが、今考えているケースでの赤道波は波数が小さいので、位相速度に関する整合性がとれている。図 2 での螺旋構造は、結局ロスビー波の位相速度の緯度依存性を見ていたことになる。

3.2 東西風の帯状平均

無次元パラメータを変えることで東西風の帯状平均 $\langle u \rangle$ がどのように異なるかを調べるために、切断波数 42 で数値実験を行なった結果を示す。図 4 が数値実験を行ったパラメータで、 $\circ$ が赤道域に西向きの偏差が出現したもので、 $+$ がそうでなかったものである。図 5 は、 $\epsilon = 1000$ でロスビー数 R を変化させた時の $\langle u \rangle$ のプロファイルで、ここから、ロスビー数が大きいほど赤道にお

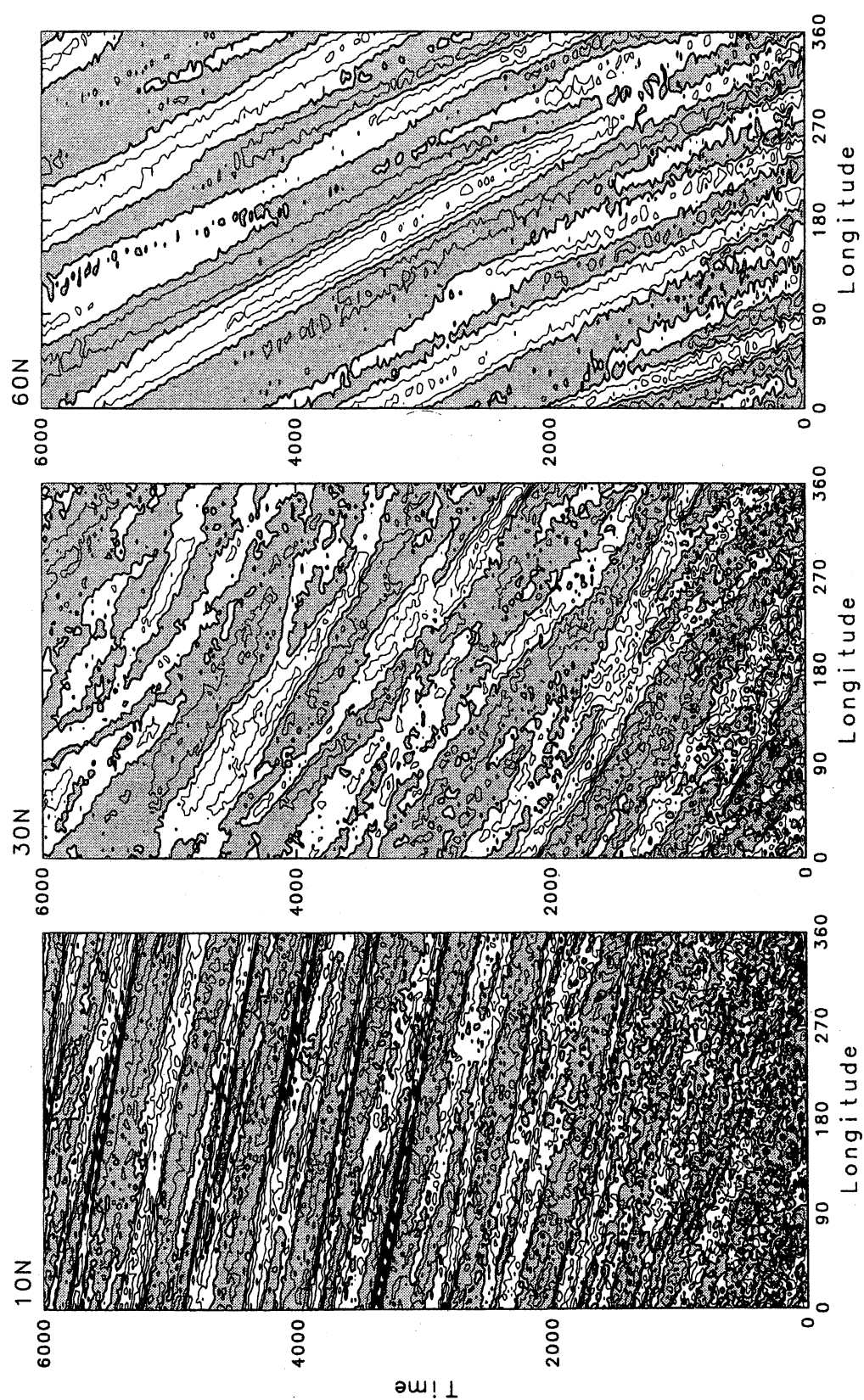


図 3: $\epsilon = 1000$ の時の北緯 $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ での水面の変位の時間変化

ける西向き速度偏差が強く現れることが分かる。また、 $\langle u \rangle$ の正負が緯度方向に変化するスケールはロスビー数によって変化していないことも見てとれる。

一方、Lamb パラメター ϵ を変化させた時の比較を図 6 に示す。これより、赤道域に西向き速度偏差が現れるのは ϵ がある程度大きな場合に限られていることが分かり、 ϵ が小さな場合には、緯度方向に緩やかな正負の変位を示している。 $\langle u \rangle$ の正負が緯度方向に変化するスケールは、 ϵ が大きくなるほど小さくなっているが、赤道域での変化スケールの $\epsilon = 100$ と $\epsilon = 1000$ の違いは中高緯度のそれと比べて小さいことも分かる。

以上のことから、 $\langle u \rangle$ の正負が緯度方向に変化するスケールが主に Lamb パラメター、すなわちロスビー変形半径によって特徴づけられるものと思われる。赤道域に関しては、ロスビー変形半径として、赤道の変形半径を考えるべきで、

$$L_{D(\text{eq.})} \equiv \left(\frac{\sqrt{gH}}{2\Omega/a} \right)^{1/2} \propto \epsilon^{-1/4}, \quad (12)$$

となるので、先の結果も矛盾なく理解できる。

$\langle u \rangle$ が緯度方向に変化するスケールが初期の渦のスケールに依存しないかを確認するために、 $n_0 = 8, 30, \epsilon = 1000$ の場合について、切断波数 85 で数値実験をし比較した。図 7 は、 $\langle u \rangle$ の時間変化を示したものである。いずれの場合も、 $\langle u \rangle$ のスケールは時間的にそれほど変位しておらず、また、得られるスケールについても中高緯度については良く一致しているといえる。赤道域では、

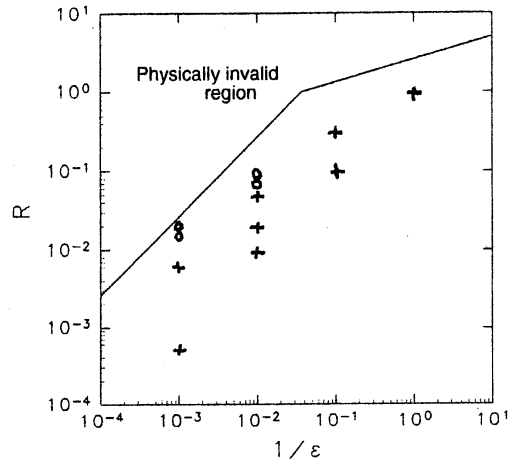


図 4: 数値実験を行ったパラメター

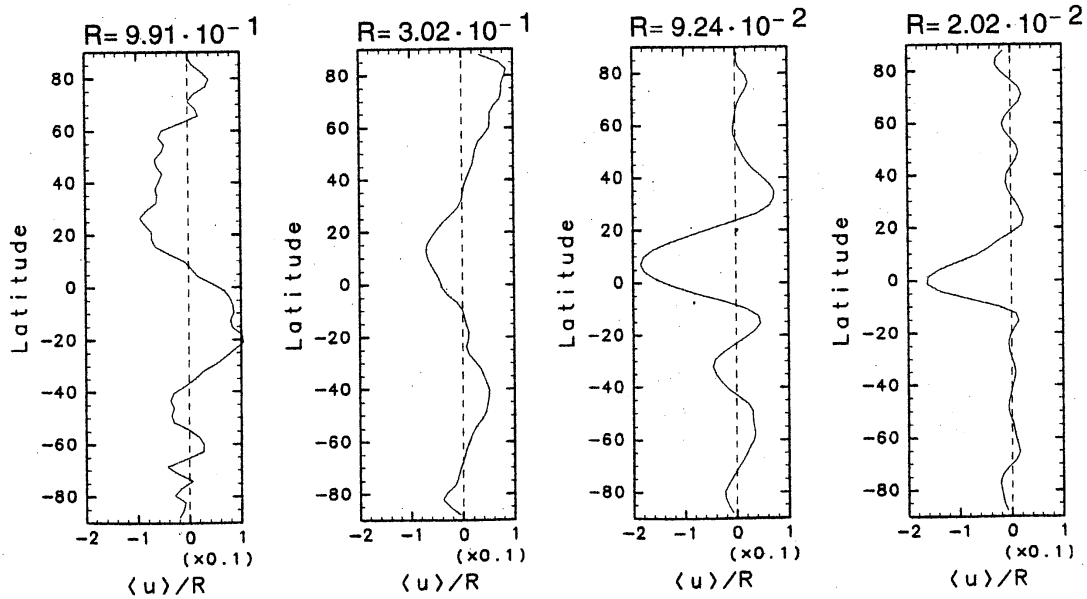


図 5: $\epsilon = 1000$ での $t = 5000$ の時の u の東西平均。ただし、横軸は無次元化した速度をロスビー数で割ったものをとっている。正の値が東向き速度偏差に対応する。

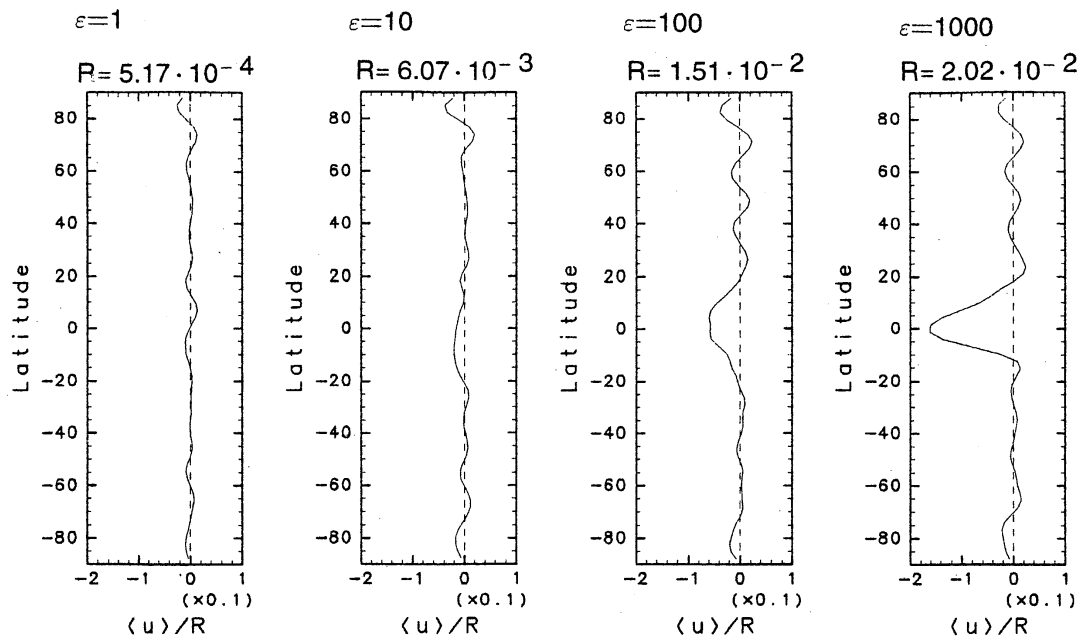


図 6: ϵ を変えた時の u の東西平均. 無次元化された水面の変位 ϕ がそれぞれで同程度のオーダーの結果を比較しているため, ロスビー数も異なっている.

$n_0 = 30$ では北緯 10° あたりに正の領域が見られるのに対し, $n_0 = 8$ の場合にはそのような領域はなくなっているという違いがあるが, 赤道域での水面の変位と速度場のスナップショット (図 8) を比較してみても場の特徴的なスケールに本質的な違いがあるとはいえず, 時間発展の結果として得られる特徴的スケールは初期値に依存しないと結論づけることができると思われる. 最終的なスケールを決める主要因としては, 今回の場合ならロスビーの変形半径 L_D が挙げられるが, この図式が常に成り立つかどうかは, さらに広範囲のパラメータについて議論すべきであろう.

また図 8 によって, 赤道での強い東風をもたらすものは高気圧性循環の赤道ロスビー波であることが分かる. このような構造は, $\langle u \rangle$ が赤道域で西向きの場合についても再現されており, 浅水方程式系の乱流において本質的な意味を持つと思われる. 順圧渦度方程式で得られた極域における $\langle u \rangle$ の西向き偏差は, 帯状の流れでによってもたらされたものであったが, 浅水方程式系での赤道域の西向き偏差は, それとは対称的に高気圧性循環の赤道ロスビー波 (図 9 左) が卓越し, 低気圧性循環が顕著でないという非対称性を持つ構造によってもたらされたといえる. 図 3 から, 北緯 10° では, ある段階から正の変位が卓越していることが分かり, これが赤道での強い西向きの流れをもたらしていることになる.

4 まとめと課題

今回の数値実験では Cho and Polvani(1996) が行ったような初期化を用いなかったため重力波に

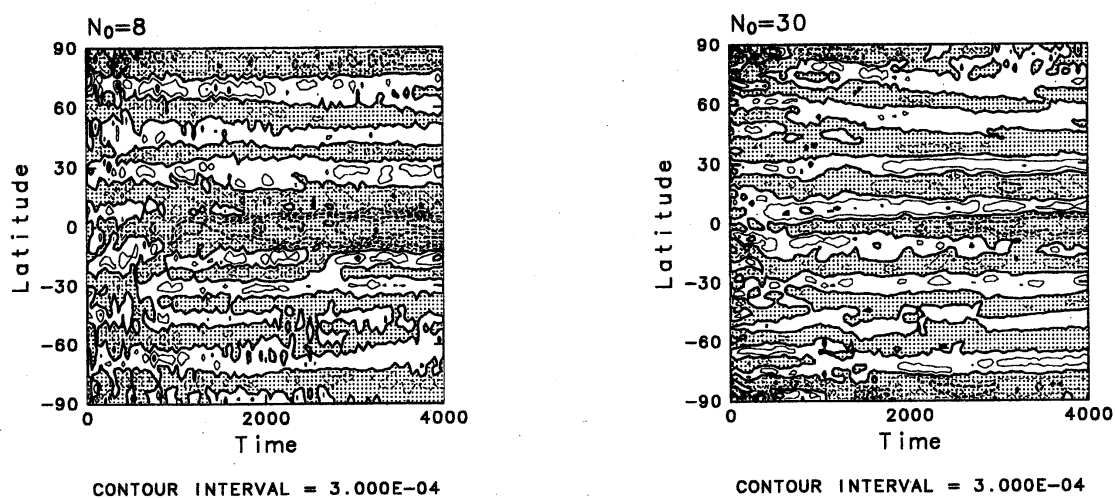


図 7: $n_0 = 8, 30$ の時の $\langle u \rangle$ の時間変化. 影のついた部分は負の領域を表す.

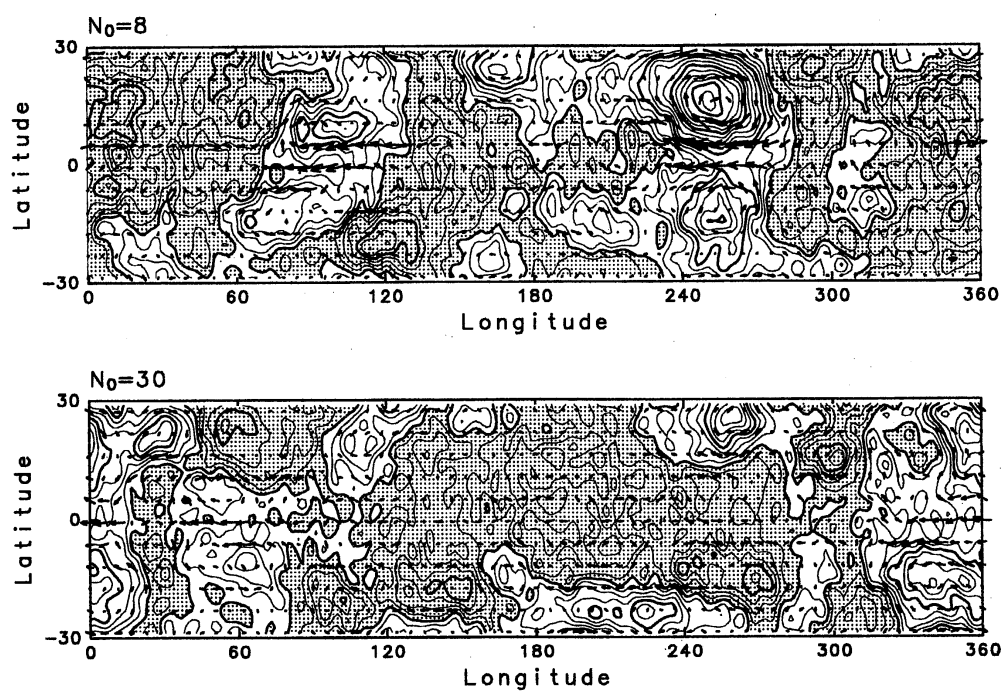


図 8: $n_0 = 8, 30, t = 4000$ の時の赤道域における水面の変位と速度ベクトル.

伴う発散場を含んでいるが、そのような場合でも重力波が卓越しない今回のケースでは、東西風の帯状平均に関して彼らと同様の結果が得られた。ただし、赤道での西向きの流れは帯状ではなく局所的なものであることに注意する必要がある。

Lamb パラメーターが小さい場合には回転の効果が小さいために得られた場は等方的で、孤立渦が形成された。一方、Lamb パラメーターの大きな場合には、回転の効果により赤道と中高緯度で異なった結果が得られた。またロスビー変形半径が小さいためにアップワードカスケードが抑制されて、場の特徴的なスケールが非線形相互作用によりある程度の大きさになると、それ以上のスケールの大きな構造は以後も生じないことが分かった。発散場に関しては、いずれの場合でも非線形相互作用によって高波数のモードが卓越するが、そのことによってスケールの大きな渦度場に著しい変化をもたらさない。

Lamb パラメーターの大きな時に生じる赤道での西向きの流れの理解には、カスケードの結果として生じたロスビー波の役割が大きいことが示唆されるが、赤道域の振幅を強めるメカニズムや非対称性が起こる必然性などを考察する必要があるだろう。また、順圧渦度方程式から得られる結果との相違についても、成層の効果の理解のために、その原因を明らかにする必要があると思われる。

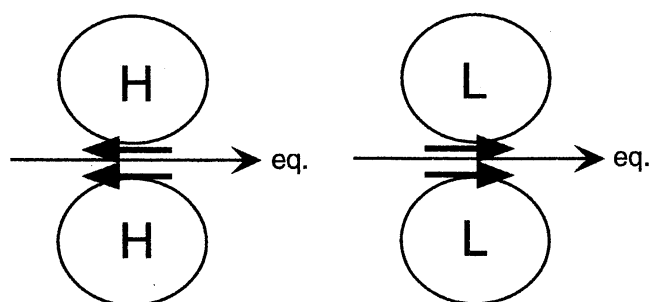


図 9: 赤道ロスビー波の概略

参考文献

- [1] Arai, M., and Yamagata, T.: Asymmetric evolution of eddies, *Chaos*, **4**, 163 (1994).
- [2] Cho, J. Y.-K., and Polvani L. M.: The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere, *Phys. Fluid*, **8**, 1531 (1996).
- [3] Farge, M., and Sadourny, J.: Wave-vortex dynamics in rotating shallow water, *J. Fluid Mech.*, **206**, 433 (1989).
- [4] McWilliams, J. C.: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **146**, 21(1984).
- [5] Williams, G. P.: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399 (1978).
- [6] Yoden, S., and Yamada, M.: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631 (1993).