

正規でない極大部分群の共役類の数について

明石高専 加納幹雄

極大部分群の共役類の数と群の構造との間の密な関係が沼田氏によって示された、ここでは、これの一部一般化をします、群 G に対し α の正規でない極大部分を除き正規でない極大部分群に注目し次のように α を定める、

$\alpha = G$ の正規でない極大部分群の共役類の数

このとき可解群に対しては次の定理が成り立つ、

定理 (沼田 [1]) G を可解群とすると

$$G \text{ の巾零長さ } \leq \alpha + 1$$

又任意の n に対し $\alpha = n$ かつ等号の成り立つ可解群が存在する、ただし $n \geq 0$ の整数、

可解という条件を除いた一般の場合の最も簡単な場合は次の定理のようになる、

定理 1 [2] G の正規でない極大部分群の位数が等しければ G は可解で α の長さは 2 以下である。特に $\alpha = 1$ ならば G は可解で α の長さは 2 以下である。

$\alpha = 2$ の場合に関係して次の定理が得られた。

定理 2 [3] 単純群 (非可換) の極大部分群の共役類の数は 3 以上である。

定理 2 は $\alpha = 2$ の場合を調べる第一段階であるが、これとこれに関係した問題をまとめると

問題 1 $\alpha = 2$ ならば G は可解か?

問題 2 X を単純群, A を P 群で $(|A|, |G|) = 1$ $A \rightarrow G$ とする, $M^*(X, A) = \{ X \text{ の } A\text{-不変な部分群の中で極大なもの} \}$ とおくと $C_G(A) \rightarrow M^*(X, A)$ だが $\neq$ のとき $(C_G(A), M^*(X, A))$ の orbit の数 ≥ 3 か?

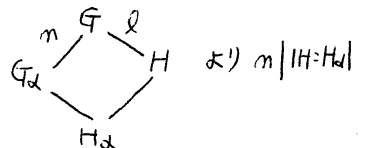
最後に定理 2 に関係した例が見つかったのでこれを述べます。[4] 中の Goldschmidt による $p^a q^b$ p, q odd の群の可解性の群論的証明の中で、最小位数の反例を G とすると G は単純群で $\alpha = 2$ となっています。よって後は定理 2 を用いても矛盾となります。

[定理1の証明] G の極大部分群がすべて正規であれば G は巾零となるから、 G には正規でない極大部分群 M が存在するとしてより、 $P \in \pi(|G:M|)$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ とする、もし $G > N_G(P)$ とすれば $N_G(P)$ を含む極大部分群 L が存在する、 $L \geq N_G(P)$ より $N_G(L) = L$, よって L は正規でなく $|L| = |M|$ である、これは $P \mid |G:M|$ に反する、故に $G = N_G(P)$ 、 $\bar{G} = G/P$ の極大部分群を $\bar{L} = L/P$ とおくと $(|G:L|, P) = 1$ だから $G \supset L$, よって $\bar{G} \supset \bar{L}$ となり $\bar{G}$ は巾零となる、

定理2の証明に入る前によく知られてゐる次の補題を述べよう、

補題 (Ω, G) を可移とする、 $G > H$, $|G:H| = \ell$, $|\Omega| = m$ とおくとき $(\ell, m) = 1$ なら (Ω, H) も可移である、

[証明] 右図より明らか $\alpha \in \Omega$

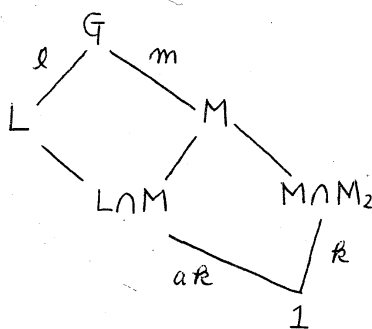


補題 (Ω, G) は可移とする、 P を $|I(P)| \geq 2$ となる P -部分群で位数最大のものとする、 $(I(P), N_G(P))$ は可移である、ただし $I(P)$ は P の固定点の全体を表わす、

[証明] P が G の1点の *stabilizer* の P -Sylow部分群なら Witt の定理より成り立つ、 P -Sylow部分群でないなら P の選べ方より $\exists x \in I(P)$ に対し、 $x \supset P$, $I(x) = \{x\}$ かつ x は P 部分群となる x が存在する、故に定理([5]のp82)より成

り立つ、

[定理2の証明] 極大部分群の共役類が2個である単純群 G が存在するとして矛盾を出す、2つの極大部分群の共役類を $\Gamma = \{L^x \mid x \in G\}$, $\Omega = \{M^x \mid x \in G\} = \{M = M_1, M_2, \dots, M_m\}$ とする、又 $|\Gamma| = |G:L| = \ell$ とおく、まず容易に $(\ell, m) = 1$ となり補題より (Γ, M) が可移となる、 (Ω, G) は Frobenius 群でなりから $M \cap M_2 \neq 1$ としてよい、 $\forall P \in \pi(M \cap M_2)$ に対し、 $|I(P)| \geq 2$ となる (Ω, G) の P -部分群で位数最大のものを P とおく、補題より $(I(P), N_G(P))$ は可移となり $(\Omega, N_G(P))$ は固定点を持たない、よって $N_G(P) \leq L^x$ $x \in M$ としてよい、 $N_G(P^{x^{-1}}) \leq L$ また $P, P^{x^{-1}} \leq M$ としてよいかから $|L \cap M|_P \geq |P| \geq |M \cap M_2|_P$ となり $|M \cap M_2| \mid |L \cap M|$ 、(ここで $|X|_P$ は群 X の P -Sylow 群の位数を表わす) 故に右図より $\ell \mid |M \cap M_2|$ 、一方 $\ell > m$ としてよいかから $|M \cap M_2| > m$ 、これは (Ω, M) の1つの orbit の長さが $m = |\Omega|$ より大きいことを言っており矛盾。



$A_5, \text{PSL}(2, 7)$ は極大部分の共役類が3個の例

参 考 文 献

- [1] M. Numata "On the π -nilpotent length of π -solvable groups" OSAKA J Math 8 1971
- [2] 加納幹雄 "正規でない極大部分群の位数が等しい有限群について" 明石高専研究紀要 18号 1976
- [3] 加納幹雄 "単純群の極大部分群の共役類の数について" 明石高専研究紀要 20号 1978
- [4] T. M. Gagen "Topics in Finite Groups" 1976
- [5] 永尾 汎 "群とデザイン" 数学選書 岩波書店
1974