

Non-archimedean Banach algebras

東京電機大 鶴見 和之

§ 1. 序

$\mathbb{C}$ 上の Banach algebra と non-archimedean Banach algebra X over F の間には差がある。例えば, $x \in X$ の spectrum $\sigma(x)$ が空である様にお来ます。又一般に X の maximal ideal M に対し, $X/M \cong F' \supset F$ である, として, non-archimedean Banach algebra X の maximal ideal space $\mathcal{M}$ は 0 次元である。又 Function algebra に於ては Kaplansky の定理が或る意味で重要である様に思われます。ここでは基本的事実を述べます。

§ 2. 定義

F を field with a real valued non-archimedean valuation $|\cdot|$ とする。

F 上の ノルム空間 X が non-archimedean Banach space

$\Leftrightarrow$ i) 次の性質を持つ $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する,

$$\textcircled{1} \quad \|x\| \geq 0 \text{ for } x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\textcircled{2} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \text{ for } \alpha \in F, x \in X,$$

$$\textcircled{3} \quad \|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) \text{ for } x, y \in X,$$

この $\|\cdot\|$ を norm と置く。

ii) X は norm $\|\cdot\|$ に関して complete である。

commutative algebra X with identity e over F が
non-archimedean Banach algebra

$\Leftrightarrow$ i) X : non-archimedean Banach space over F ,

$$\text{ii) } \|e\| = 1, \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

次の notations を用いることにします。

X : non-archimedean Banach algebra over F ,

$\sigma(x) := \{\lambda \in F \mid (\lambda - x)^{-1} \text{ が存在しない}\} : x \text{ の spectrum,}$

$r_\sigma(x) := \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\} : x \text{ の spectral radius,}$

$\mathcal{M}$: X の maximal ideal space,

$X \ni e, \forall M \in \mathcal{M}$ に対して, 一般に $X/M \cong F' \supset F$ である

$x(M) := x + M$ for $\forall x \in X, M \in \mathcal{M}$.

$X/M \ni x + M = x(M) \longleftrightarrow \alpha \in F', \alpha$ と $x(M)$ とを同一視す

る, これにより $\sigma(x) = \{x(M) \mid M \in \mathcal{M}\} \cap F$ とおける。

$\|x + M\|_M := \inf_{z \in M} \|x + z\|$ とおく (= 2.2.8) X/M は

non-archimedean Banach algebra with identity e である。

又, $X/M \cong F$, $M \in \mathcal{M}$ のとき Y_σ について次の σ が成り立つ

$$Y_\sigma(x+y) \leq \max(Y_\sigma(x), Y_\sigma(y)).$$

§ 3.

通常の Banach algebra と同様に次の σ が成り立つ。

定理 1. X : division algebra (即ち $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in X$)

$\sigma(x) = \phi$ for $\forall x \in X \iff X$ と F とは等距離同型。

例 1. F : field with trivial valuation

K : 多項式環の商体, y : K 上の超越的元

$X := K[y]$ とし, $M \in \mathcal{M}$ の maximal ideal とすると

X/M は algebra over F で無限個の元を含む。

$X/M \cong F$ for $M \in \mathcal{M}$ とする。 $\mathcal{M}$ の topology は Gelfond topology とする, 即ち $\forall M \in \mathcal{M}$ の近傍基は次の形の集合

$$U(M; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) := \{M' \in \mathcal{M} \mid |x_i(M') - x_i(M)| < \varepsilon, i=1, \dots, n\}.$$

ultrametric inequation により, この topology で $\mathcal{M}$ は 0-dim.

Hausdorff space である。

命題. T : 任意の集合, $F(T)$: algebra of all bdd

F -valued fts on T , operation は pointwise

$F(T)$ の任意の maximal ideal M が次のもの、である、即ち、或る

$$t_0 \in T \text{ が存在して } M = \{ f \in F(T) \mid f(t_0) = 0 \},$$

$$\Rightarrow F(T)/M \cong F \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{M}.$$

定理 2 T : compact, 0-dim, Hausdorff space

$F(T)$: algebra of all continuous F -valued fns on T .

F : nontrivially valued field

$\Rightarrow T$ と $F(T)$ の maximal ideals とは 1 対 1 に対応する、即ち

$$T \ni t \longleftrightarrow M_t = \{ f \in F(T) \mid f(t) = 0 \}$$

証明. $t \mapsto M_t$ は 1 対 1 である、これが onto である} を示す。

onto であることを示す。次の様に $F(T)$ の maximal ideal M が存在する、即ち $\forall t \in T$ に對して $\exists f_t \in M, f_t(t) \neq 0$ 。 f_t の連続性により、

次の様に open set U_t がとれる、即ち $f_t(x) \neq 0, x \in U_t$ 。

そうすると $T = \bigcup_{t \in T} U_t$ 。 T は compact であるから有限個の $t_1, \dots, t_n$ がとれ $T = \bigcup_{i=1}^n U_{t_i}$ 。

T は 0-dim であるから U_{t_i} は clopen にとれる。

$W_1 := U_{t_1}, W_2 := U_{t_2} \setminus U_{t_1}, \dots, W_j := U_{t_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{t_i}$

とすると、 $W_i \cap W_j = \emptyset$ ($i \neq j$) であり $T = \bigcup_{i=1}^n W_i$ 。

$$g_i(t) := \begin{cases} 1 & : t \in W_i \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad \text{と置く}$$

函数 g_i は T 上で連続である、即ち $g_i \in F(T)$ 。

$$f(t) := \sum_{i=1}^n g_i(t) f_{t_i}(t) \quad \text{と置く}$$

明らかに $g(t) \in M_i$. $\forall t \in T$ に対しては、或る i に対して

$t \in W_i$ であるから $g(t) = g_i(t) f_{t_i}(t) = f_{t_i}(t) \neq 0$ であるから g の逆
関数が存在する。故に $M = F(T)$.

系. T : compact totally disconnected Hausdorff space
 $\Rightarrow T$ と $F(T)$ の maximal ideals とは 1 対 1 に対応する。

定理 3. (Kaplansky の定理) T : compact totally
disconnected Hausdorff space, $F(T)$: normed algebra
(sup norm) of continuous fts from T into F ,
 B : closed subalgebra of $F(T)$ containing constants and separating
points.

$\Rightarrow B = F(T)$.

§ 4.

$V := \{\alpha \in F \mid |\alpha| \leq 1\}$: F の valuation ring

$P := \{\alpha \in F \mid |\alpha| < 1\}$: V の maximal ideal

F の residue class field V/P と類似のものを non-archimedian
Banach algebra X (with identity e) について考える。

$V' := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$

$P' := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$: V' の ideal

次の事が成り立つ

定理 4.

$P': \text{maximal ideal in } V' \iff \|x\| = 1 \text{ かつ } x \text{ は invertible}$

証明. $x \in X, \|e - x\| < 1$ かつ x は invertible である $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$

である事を示す。

系. $\|x\| = \|F\|, P': \text{maximal ideal in } V'.$

$\Rightarrow X$ は体である。

$W'_M := \{x \in X \mid \|x + M\|_M \leq 1\}, W' := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} W'_M$ とおく

明らかに $V' \subseteq W'$ であるが逆の包含関係は成り立たない

例 2. F : algebraically closed field with trivial valuation

$X := F[x], \forall f(x) \in X$ に対して, $f(x)$ の norm ε 次の様に定義する

$$\|f(x)\| = \|\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n\| := \max_i (|\alpha_i| c^i) \quad \text{ただし } c > 1.$$

そうすると, $X/M \cong F (M \in \mathcal{M})$ かつ $W' = X, V' \subsetneq W'.$

例 3. X : finite dim. algebra over F with basis $e_1, \dots, e_n$,

つまり $e_i e_j = 0 (i \neq j), e_i^2 = e_i. \quad \forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ に対して

$\|x\| := \max_i |\alpha_i|, \quad X$ には n 個の maximal ideals $M_1, \dots, M_n$ が

あり, M_i は $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$ によって generate される ideal.

$X/M_i \cong F, \text{ かつ } V' = W' \text{ である.}$

定理 5 $X/M \cong F$ for $M \in \mathcal{M}$, $W' = V'$,

$\mathcal{M}$: compact in Gelfond topology.

$$\implies Y_G(x) = \|x\|.$$

証明. 明らか, $Y_G(x) \leq \|x\|$ であるから, $Y_G(x) \geq \|x\|$ を示せばよい. $Y_G(x) \leq 1$ とする, $|x(M)| \leq 1$ for $\forall M \in \mathcal{M}$. $W' = V'$ であるから, $x \in W'$ に對して, $\|x\| \leq 1$ 若し $Y_G(x) < \|x\|$ ならば次の様な $\exists \lambda \in F$.

$$(*) \quad Y_G(x) = |\lambda| < \|x\|$$

$\mathcal{M}$ が compact であるから, $\frac{Y_G(x)}{\sup}$ は, 実数或る $M \in \mathcal{M}$ にとる.

$y := x/\lambda$ とすると $\|x\| \leq |\lambda|$. これは (*) に反する.

$$\text{よって } Y_G(x) = \|x\|$$

系. $W' = V'$ で, $Y_G(x) < \|x\|$ なる $x \in X$ が存在する。

$\implies \mathcal{M}$: non-compact in Gelfond topology.

特別なものとして次の事実が成り立つ。

命題. X, F : 例 3 のもの, 函数族 $\{\hat{x} \mid x \in X\}$ ($= \hat{x}: \mathcal{M} \rightarrow F$ ($\hat{x}: M \mapsto x(M)$)) は $\mathcal{M}$ 上の全ての函数の族である。

証明. $\mathcal{M}$ は有限集合であるから, $\forall$ 函数 f に対して

$$f(M_i) = \alpha_i \text{ とする. } x := \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \text{ とおくと } \hat{x} = f.$$

定理 6. $X \ni e$, $X/M \cong F$ for $\forall M \in \mathcal{M}$, $W' = V'$,

$\mathcal{M}$: compact in Gelfond topology.

$$\implies \hat{X} = F(\mathcal{M})$$

証明. Kaplansky の定理により $\hat{X}$ は constant fts を含み、
 点 e を分離し, closed であることが示される。

$e(M) = 1$ for $\forall M \in \mathcal{M}$ であるから, $\forall \alpha \in F$ に対して

$(\alpha e)(M) = \alpha$ for $\forall M \in \mathcal{M}$, 故に $\hat{X}$ は constant fts を含む。

$M_1 \neq M_2$, $\in \mathcal{M}$ に対して $x \in M_1$, $x \notin M_2$ なる x をとれば,
 $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$ かつ $\hat{X}$ は $\mathcal{M}$ の点 e を分離する。

次に $\hat{X}$ は closed であることが示す, 即ち $\hat{X} = \overline{\hat{X}}$. $f \in \overline{\hat{X}}$ とな
 ると, $\exists \hat{x}_n \in \hat{X}$ ($n=1, 2, \dots$) $\hat{x}_n \rightarrow f$. $\{\hat{x}_n\}$ は Cauchy 列で,
 $W' = V'$ で, $\mathcal{M}$ は compact であるから, 定理 5 により次のことが
 得る

$$Y_5(x_n) = \|\hat{x}_n\| = \|x_n\|$$

すなわち $\hat{x} \in F(\mathcal{M})$ の norm は $\|\hat{x}\| := \sup_{M \in \mathcal{M}} |x(M)|$.

$x \mapsto \hat{x}$ ($\hat{x}(M) = x(M)$) は isometry で $\{x_n\}$ は Cauchy 列で X
 の完備性により, 次の様な $x \in X$ が存在する, 即ち $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x} = f$
 かつ $\hat{x} \in \hat{X}$, 故に $\hat{X}$ は closed.

文 献

- [1] E. Beckenstein: On regular nonarchimedean Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968) 424 — 427.
- [2] L. Narici: Nonarchimedean Banach algebras. Arch. Math. 19 (1968) 428 — 435.
- [3] N. Skilker: Non-archimedean Gelfond theory, Pacific J. Math. 32 (1970) 541 — 550.
- [4] I. Kaplansky: The Weierstrass theorem in fields with valuations, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 356 — 357
- [5] D. G. Cantor: On the Stone-Weierstrass approximation theorem for valued fields, Pacific Jour. Math. 21 (1967) 473 — 478.
- [6] P. R. Chernoff, R. A. Rasala and W. C. Waterhouse: The Stone-Weierstrass theorem for valuable fields. Pacific Jour. Math. 27 (1968) 233 — 240.
- [7] R. Kiehl: Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. Jour. reine angewandte Math. 234 (1969) 89 — 98.
- [8] R. Kiehl: Die analytische Normalität affinoider Ringe, Arch. Math. 18 (1967) 479 — 484.
- [9] H. Grauert und R. Remmert: Nichtarchimedische Funktionentheorie, Weierstraßfestband, Opladen 1966.

- [10] E. Artin : Algebraic numbers and algebraic functions, Princeton (1950).
- [11] G. Bachman : Introduction to p -adic numbers and valuation theory, Academic Press, (1964).
- [12] A. Browder : Introduction to function algebras, Benjamin (1969)
- [13] T.W. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall (1969).
- [14] 永田雅宣 : 可換体論 裳華房
- [15] R. Staum : The structure of non-archimedean Banach algebras, Notices A.M.S. 17 (1970) 663 - 664.
- [16] A.F. Monna : Over Niet-Archimedische Lineaire Ruimten, Indag. Math. 5 (1943) 308 - 321.
- [17] — : Over Geordende en Lineaire Ruimten, Indag. Math. 6 (1944) 178 - 182.
- [18] — : Sur les espaces normes, I et II, Indag. Math. 8 (1946) 1045 - 1062.
- [19] — : Sur les espaces non-archimediens, I et II, Indag. Math. 18 (1956) 475 - 489.
- [20] H. Grauert und R. Remmert : über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966) 87 - 133.