

高々スター次数 n の拡張正規表現

Extended Regular Expressions of Arbitrary Star Degrees

劉 億根 橋口 攻三郎

Heekeun YOO and Kosaburo HASHIGUCHI

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

1. まえかき

[7, 13]において, われわれは次数2のスター演算と次数(2,1)のスター演算の概念を導入し, アルファベット Σ 上の高々スター次数2の拡張正規言語のクラス $(ERL(2, \Sigma))$ と高々スター次数(2,1)の拡張AL正規言語のクラス $(EARL(2, 1, \Sigma))$ のいくつかの性質を明らかにした.

本研究では, 次数 n ($n \geq 3$) のスター演算の概念を導入し, 和集合, 連接, Kleene-閉包, 高々次数 n ($n \geq 3$) のスター演算に関する有限言語族の閉包, すなわち, アルファベット Σ 上の高々スター次数 n の拡張正規言語のクラス $(ERL(n, \Sigma))$ のいくつかの性質を明らかにする. 特に, (1) $ERL(n, \Sigma)$ ($n=2, 3, 4, \dots$) の階層構造は無限である, (2) $n \geq 3$ に対して, $ERL(n, \Sigma)$ は文脈依存言語の部分族である, (3) $ERL(3, \Sigma) - CFL(\Sigma) \neq \emptyset$, (4) 任意の $n \geq 3$ に対して, $LCFL(\Sigma) - ERL(n, \Sigma) \neq \emptyset$, 等を示す.

2. 準備

Σ は空でない有限アルファベットである. λ は空系列である. $\emptyset$ は空集合である. 任意の $W \in \Sigma^*$ に対して $l(W)$ は W の長さで, W^R は W の逆系列である. $L \subset \Sigma^*$ に対して $L^R = \{W^R | W \in L\}$ である. 任意のアルファベット V, V' と $W \in V^*$ に対して $V'(W)$ は W に現われる V' の記号の集合である. 任意の $A \in V$ に対して $\#_A(W)$ は W に現われる A の個数である. 集合 B に対して $\#B$ は B の濃度である.

[定義 2. 1]

任意の $n \geq 2$ に対して, $ERE(n, \Sigma)$ は Σ 上の高々スター次数 n の拡張正規表現のクラスであり, 次のように帰納的に定義される.

- (1) $\lambda, \emptyset, a \in ERE(n, \Sigma)$ (但し $a \in \Sigma$);
- (2) もし $E_1, E_2 \in ERE(n, \Sigma)$ であれば, $E_1 \cup E_2, E_1 E_2, (E_1)^* \in ERE(n, \Sigma)$ である;
- (3) 任意の $2 \leq m \leq n, p \geq 1$ に対して, $E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0m-1}, E_{m1}, \dots, E_{mp} \in ERE(n, \Sigma)$ であれば, $(E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0m-1}, E_{m1}, \dots, E_{mp})^{m*} \in ERE(n, \Sigma)$ である;

[注意 2. 1]

- (1) 各々の $E \in ERE(n, \Sigma)$ に対して, 不必要なかつこはしばしば省略される.
- (2) 表現を明瞭にするため $(E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0n-1}, E_{n1}, \dots, E_{np})^{n*}$

の代わりにしばしば

$$\left[\begin{pmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1p} \end{pmatrix}, E_{01}, \begin{pmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2p} \end{pmatrix}, E_{02}, \dots, E_{0n-1}, \begin{pmatrix} E_{n1} \\ \vdots \\ E_{np} \end{pmatrix} \right]^{n*} \text{ の表現が導入される.}$$

[定義 2. 2]

$n \geq 2$ に対して, $E \in \text{ERE}(n, \Sigma)$ によって表現される言語 $|E|$ は次のように帰納的に定義される.

$$(1) |\lambda| = \{\lambda\}, |\emptyset| = \emptyset, |a| = \{a\} \quad (\text{但し } a \in \Sigma);$$

$$(2) |E_1 \cup E_2| = |E_1| \cup |E_2|;$$

$$|E_1 E_2| = |E_1| |E_2| = \{vw \mid v \in |E_1|, w \in |E_2|\};$$

$$|(E)^*| = |E|^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} |E|^i;$$

$$(3) |(E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0m-1}, E_{m1}, \dots, E_{mp})^{m*}|$$

$$= |E_{01} E_{02} \dots E_{0m-1}| \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{1 \leq j_1, \dots, j_i \leq p} L_1 |E_{01}| L_2 |E_{02}| \dots L_{m-1} |E_{0m-1}| L_m \right) \right),$$

ここで, $1 \leq k \leq m$ に対して, もし k が奇数であれば, $L_k = |E_{kj_1}| |E_{kj_2}| \dots |E_{kj_i}|$ であり, 偶数であれば, $L_k = |E_{kj_i}| |E_{kj_{i-1}}| \dots |E_{kj_1}|$ である.

$E \in \text{ERE}(n, \Sigma)$ ($n \geq 2$) に対して, $|E|$ は Σ 上の高々スター次数 n の拡張正規言語と呼ばれる.

[定義 2. 3]

$n \geq 2$ に対して, $\text{ERL}(n, \Sigma)$ は Σ 上の高々スター次数 n の拡張正規言語のクラスである.

[例 2. 1]

$$(1) |(a, \lambda, b, \lambda, c)^{3*}| = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\};$$

$$(2) \left| \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, c, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, c, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, c, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]^{4*} \right| = \{wcw^R cwcW^R \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

(3) 任意の $n \geq 3$, $2 \leq m < n$, $p \geq 1$, $E = (E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0m-1}, E_{m1}, \dots, E_{mp})^{m*} \in \text{ERL}(n, \Sigma)$ に対して, 次が成立する:

$$|E| = |(E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2p}, E_{02}, \dots, E_{0m-1}, E_{m1}, \dots, E_{mp}, F_{0m}, F_{m+11}, \dots, F_{m+1p}, F_{0m+1}, \dots, F_{0n-1}, F_{n1}, \dots, F_{np})^{n*}|,$$

ここで, すべての $m \leq i \leq n-1$, $m+1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$ に対して, $F_{0i} = F_{jk} = \lambda$ である.

3. $\text{ERL}(n, \Sigma)$ の性質

まず, $\text{ERL}(1, \Sigma) \subset \text{ERL}(2, \Sigma) \subset \text{ERL}(3, \Sigma) \subset \dots$ の階層構造は $\#\Sigma \geq 2$ のとき無限であることを示す. ここで, Kleene-閉包は次数 1 のスター演算とみなされる.

[定義 3. 1]

$n \geq 2$ に対して, $L_n = |(a_1, \lambda, a_2, \lambda, \dots, \lambda, a_n)^{n*}|$ である. ここで, もし i が奇数であれば, $a_i = a$ であり, 偶数であれば, $a_i = b$ である (但し $\Sigma = \{a, b\}$).

[補題 3. 1]

任意の $n \geq m \geq 2$, $u, v, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in \Sigma^*$ に対して, もし $|u(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{m-1}, x_m)^m v| \in L_n$ であれば, 任意の $1 \leq i \leq m$ に対して, $x_i \in a^* \cup b^*$ である.

(証明) $|u(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{m-1}, x_m)^m v| \in L_n$ とする. そのとき $ux_1y_1x_2y_2 \dots y_{m-1}x_mv \in L_n$ である. 従って, ある $j \geq 0$ に対して, $ux_1y_1x_2y_2 \dots y_{m-1}x_mv = a_1^j a_2^j \dots a_n^j$ である. もしある $1 \leq i \leq m$ に対して, $x_i \notin a^* \cup b^*$ であれば, $k=2n$ に対して, $ux_1^k y_1 x_2^k y_2 \dots y_{m-1} x_m^k v \in L_n$ である. これは矛盾である. $\square$

[定理 3. 1]

次の包含階層構造は無限である.

$ERL(1, \Sigma) \subset ERL(2, \Sigma) \subset ERL(3, \Sigma) \subset \dots$ (ここで, $\#\Sigma \geq 2$ である).

次の補題を証明すれば十分である.

[補題 3. 2]

任意の $n \geq 2$ に対して,

(1) $ERL(n-1, \Sigma) \subset ERL(n, \Sigma)$; (2) $L_n \in ERL(n, \Sigma) - ERL(n-1, \Sigma)$.

ここで, $\Sigma \supset \{a, b\}$.

(証明) (1) 明らか. (2). $L_n \in ERL(n-1, \Sigma)$ を仮定する. 明らかに $n \geq 4$ である. そのとき $|E|=L_n$ であるような $E \in ERE(n-1, \Sigma)$ が存在する. そのとき $|u(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{n-2}, x_{n-1})^{(n-1)} v| \in |E|=L_n$ であるような $u, v, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-2} \in \Sigma^*$ が存在する. ここで L_n は無限集合であるから, ある i ($1 \leq i \leq n-1$) に対して $x_i \neq \lambda$ と仮定してよい. 補題 3.1 によって, $x_i \in a^+ \cup b^+$ である. そのとき $ux_1y_1x_2y_2 \dots y_{n-2}x_{n-1}v \in L_n$ である. 従って, ある $j \geq 1$ に対して, $ux_1y_1x_2y_2 \dots y_{n-2}x_{n-1}v = a_1^j a_2^j \dots a_n^j$ である. $x_k \in a^* \cup b^*$ ($1 \leq k \leq n-1$) であるから, 各々の x_k は a_p^j ($1 \leq p \leq n$) の因子である. しかし, x_k の数は $n-1$ であるから, ある p ($1 \leq p \leq n$) に対して a_p^j は任意の x_k を因子として含まない. そのとき $ux_1^2 y_1 x_2^2 y_2 \dots y_{n-2} x_{n-1}^2 v = a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{p-1}^{j_{p-1}} a_p^j a_{p+1}^{j_{p+1}} \dots a_n^{j_n} \in L_n$ かつある $k \neq p$ に対して, $j_k \neq j$ である. これは矛盾である. $\square$

Σ 上の文脈依存文法 G (CSG) は (V, Σ, P, S) の 4 つの組で示される. V は変数の有限集合, Σ は終端記号, P は生成規則の有限集合, そして S は開始記号である. 文法 G における各々の生成規則は: (1) $\alpha \rightarrow \beta$ ($\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$, $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ かつ $l(\alpha) \leq l(\beta)$); (2) $S \rightarrow \lambda$ (但し S は G におけるいかなる生成規則の右辺にも現われない). $L(G)$ は文法 G によって生成される文脈依存言語 (CSL) である.

[定義 3. 2]

$CSL(\Sigma)$ は Σ 上の文脈依存言語のクラスである.

[定理 3. 2]

任意の $n \geq 3$, $E \in ERE(n, \Sigma)$ に対して, $|E|$ を生成する文脈依存文法 G を構成することができる.

(証明) 証明は E に現われる演算子の個数に関する帰納法による.

基底段階: $|\lambda|, |\phi|, |a| \in \text{CSL}(\Sigma)$ (但し $a \in \Sigma$).

帰納段階: $E \in \text{ERE}(\mathcal{N}, \Sigma)$ は次の4つのいずれかの形をしている.

(1) $E = E_1 \cup E_2$, (2) $E = E_1 E_2$, (3) $E = (E_1)^*$,

(4) $E = (E_{11}, \dots, E_{1m}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2m}, E_{02}, \dots, E_{0n-1}, E_{n1}, \dots, E_{nm})^{n*}$.

(1)-(3) の場合, 帰納法の仮定により $|E_1| - \{\lambda\}$ と $|E_2| - \{\lambda\}$ を生成する文脈依存文法 $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ と $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ が存在する. そのとき $V_1 \cap V_2 = \phi$ と仮定してよい.

(1) $E = E_1 \cup E_2$ の場合

次の文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ は E に対する条件を満たす;

(1.1) $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$;

(1.2) $P = P_1 \cup P_2 \cup S \rightarrow S_1 | S_2 \cup P'$,

ここで, $\lambda \in |E|$ であれば, $P' = S \rightarrow \lambda$ であり, その他は, $P' = \phi$ である.

(2) $E = E_1 E_2$ の場合

次の文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ は E に対する条件を満たす;

(2.1) $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$;

(2.2) $P = P_1 \cup P_2 \cup S \rightarrow S_1 S_2 \cup P'$,

ここで, $P' : \lambda \in |E_1| \cap |E_2|$ であれば, $S \rightarrow S_1 | S_2 | \lambda$,

$P' : \lambda \notin |E_1|$ かつ $\lambda \in |E_2|$ であれば, $S \rightarrow S_1$,

$P' : \lambda \in |E_1|$ かつ $\lambda \notin |E_2|$ であれば, $S \rightarrow S_2$,

そして $\lambda \notin |E_1 \cup E_2|$ であれば, $P' = \phi$ である.

(3) $E = (E_1)^*$ の場合

次の文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ は E に対する条件を満たす;

(3.1) $V = V_1 \cup \{S, S'\}$;

(3.2) $P = P_1 \cup S \rightarrow \lambda | S' \cup S' \rightarrow S_1 | S_1 S'$.

(4) $E = (E_{11}, \dots, E_{1m}, E_{01}, E_{21}, \dots, E_{2m}, E_{02}, \dots, E_{0n-1}, E_{n1}, \dots, E_{nm})^{n*}$ の場合

$G_{ij} = (V_{ij}, \Sigma, P_{ij}, S_{ij})$ を $|E_{ij}| - \{\lambda\}$ を生成する文脈依存文法とする. ($i=0, 1 \leq j \leq n-1$, または, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), ここで, 集合 $\{V_{ij} \mid i=0, 1 \leq j \leq n-1, \text{ または, } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ は互いに素であると仮定してよい.

次の2つの場合を考える.

(4.1) すべての i, j に対し, $\lambda \notin |E_{ij}|$ の場合

次の文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ は E に対する条件を満たす;

(4.1.1) $V = (\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m V_{ij}) \cup (\bigcup_{j=1}^{n-1} V_{0j}) \cup \{L_1, \dots, L_m, R_1, \dots, R_m, C_1, \dots, C_m, S_1, \dots, S_{n-1}, S\}$.

(4.1.2) $P = P' \cup (\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m P_{ij}) \cup (\bigcup_{j=1}^{n-1} P_{0j})$,

ここで, P' は次の規則からなっている:

(4.1.3) $n=3$ のとき,

$S \rightarrow S_{01} S_{02} | S_{1j} S_{01} S_{2j} S_{02} S_{3j} \quad (1 \leq j \leq m)$

$S \rightarrow S_{1j} S_1 R_j \quad (1 \leq j \leq m)$

$S_1 \rightarrow S_{1j} S_1 C_j | S_{1j} S_{01} S_{2j} S_2 S_{3j} \quad (1 \leq j \leq m)$

$$S_2 C_j \rightarrow S_{2j} S_2 S_{3j} (1 \leq j \leq m)$$

$$S_2 R_j \rightarrow S_{2j} S_{02} S_{3j} (1 \leq j \leq m)$$

$D_k \in \{R_k, C_k \mid 1 \leq k \leq m\}$ に対して,

$$S_{1j} D_k \rightarrow D_k S_{1j} (i=0, 1 \leq j \leq n-1, \text{または}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m).$$

(4.1.4) $n \geq 4$ かつ偶数のとき,

$$S \rightarrow S_{01} S_{02} \cdots S_{0(n-1)} | S_{1j} S_{01} S_{2j} S_{02} \cdots S_{0(n-1)} S_{nj} (1 \leq j \leq m)$$

$$S \rightarrow S_{1j} S_1 R_j (1 \leq j \leq m)$$

$$S_1 \rightarrow S_{1j} S_1 C_j | S_{1j} S_{01} S_{2j} L_j S_2 (1 \leq j \leq m)$$

各々の偶数 k ($2 \leq k \leq n-4$) に対して:

$$S_k C_j \rightarrow S_{kj} C_j S_k (1 \leq j \leq m)$$

$$S_k R_j \rightarrow S_{kj} S_{0k} S_{(k+1)j} S_{k+1} R_j (1 \leq j \leq m)$$

$$C_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{k+1} C_j (1 \leq j \leq m)$$

$$L_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{0(k+1)} S_{(k+2)j} L_j S_{k+2} (1 \leq j \leq m),$$

$k=n-2$ に対して:

$$S_k C_j \rightarrow S_{kj} C_j S_k (1 \leq j \leq m)$$

$$S_k R_j \rightarrow S_{kj} S_{0k} S_{(k+1)j} S_{k+1} S_{(k+2)j} (1 \leq j \leq m)$$

$$C_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{k+1} S_{(k+2)j} (1 \leq j \leq m)$$

$$L_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{0(k+1)} S_{(k+2)j} (1 \leq j \leq m)$$

$D_k \in \{L_k, R_k, C_k \mid 1 \leq k \leq m\}$ に対して,

$$D_k S_{1j} \rightarrow S_{1j} D_k (i=0, 1 \leq j \leq n-1, \text{または}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m).$$

(4.1.5) $n \geq 5$ かつ奇数のとき,

$$S \rightarrow S_{01} S_{02} \cdots S_{0(n-1)} | S_{1j} S_{01} S_{2j} S_{02} \cdots S_{0(n-1)} S_{nj} (1 \leq j \leq m)$$

$$S \rightarrow S_{1j} S_1 R_j (1 \leq j \leq m)$$

$$S_1 \rightarrow S_{1j} S_1 C_j | S_{1j} S_{01} S_{2j} L_j S_2 (1 \leq j \leq m)$$

各々の偶数 k ($2 \leq k \leq n-5$) に対して:

$$S_k C_j \rightarrow S_{kj} C_j S_k (1 \leq j \leq m)$$

$$S_k R_j \rightarrow S_{kj} S_{0k} S_{(k+1)j} S_{k+1} R_j (1 \leq j \leq m)$$

$$C_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{k+1} C_j (1 \leq j \leq m)$$

$$L_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{0(k+1)} S_{(k+2)j} L_j S_{(k+2)} (1 \leq j \leq m),$$

$k=n-3$ に対して:

$$S_k C_j \rightarrow S_{kj} C_j S_k (1 \leq j \leq m)$$

$$S_k R_j \rightarrow S_{kj} S_{0k} S_{(k+1)j} S_{k+1} R_j (1 \leq j \leq m)$$

$$C_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{k+1} C_j (1 \leq j \leq m)$$

$$L_j S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{0(k+1)} S_{(k+2)j} S_{k+2} S_{(k+3)j} (1 \leq j \leq m)$$

$$S_{k+2} C_j \rightarrow S_{(k+2)j} S_{k+2} S_{(k+3)j} (1 \leq j \leq m)$$

$$S_{k+2} R_j \rightarrow S_{(k+2)j} S_{0(k+2)} S_{(k+3)j} (1 \leq j \leq m)$$

$D_k \in \{L_k, R_k, C_k \mid 1 \leq k \leq m\}$ に対して,

$$S_{1j} D_k \rightarrow D_k S_{1j} (i=0, 1 \leq j \leq n-1, \text{または}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

$$D_k S_{1j} \rightarrow S_{1j} D_k (i=0, 1 \leq j \leq n-1, \text{または}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m).$$

G が $|E|$ を生成することを確認するためいくつかの例を考える. 任意の $w \in |E|$ を考える. ある $i \geq 0$, $1 \leq j_1, \dots, j_i \leq m$ に対して, $w \in L_1 |E_{01}| L_2 |E_{02}| \dots |E_{0n-1}| L_n$ である. ここで, L_k は定義 2.2 のように定義される.

もし $i=0$ であれば, $S \Rightarrow S_{01} S_{02} \dots S_{0n-1} \overset{*}{\Rightarrow} w$.

もし $i=1$ であれば, $S \Rightarrow S_{1j_1} S_{01} S_{2j_1} S_{02} \dots S_{0n-1} S_{nj_1} \overset{*}{\Rightarrow} w$.

もし $i=2$ かつ $n=4$ であれば,

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow S_{1j_1} S_1 R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{01} S_{2j_2} L_{j_2} S_2 R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{01} S_{2j_2} L_{j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} S_3 S_{4j_1} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} S_{1j_1} S_{1j_2} S_{01} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} L_{j_2} S_3 S_{4j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{01} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} S_{3j_2} S_{03} S_{4j_2} S_{4j_1} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} w. \end{aligned}$$

もし $i=3$ かつ $n=5$ であれば,

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow S_{1j_1} S_1 R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_1 C_{j_2} R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} L_{j_3} S_2 C_{j_2} R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} L_{j_3} S_{2j_2} C_{j_2} S_2 R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} L_{j_3} S_{2j_2} C_{j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} S_3 R_{j_1} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} L_{j_3} C_{j_2} S_3 R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} L_{j_3} S_{3j_2} S_3 C_{j_2} R_{j_1} \\ &\Rightarrow S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} S_{3j_2} L_{j_3} S_3 C_{j_2} R_{j_1} \end{aligned}$$

$W = S_{1j_1} S_{1j_2} S_{1j_3} S_{01} S_{2j_3} S_{2j_2} S_{2j_1} S_{02} S_{3j_1} S_{3j_2}$ とおく,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow W S_{3j_3} S_{03} S_{4j_3} S_4 S_{5j_3} C_{j_2} R_{j_1} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} W S_{3j_3} S_{03} S_{4j_3} S_4 C_{j_2} R_{j_1} S_{5j_3} \\ &\Rightarrow W S_{3j_3} S_{03} S_{4j_3} S_{4j_2} S_4 S_{5j_2} R_{j_1} S_{5j_3} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} W S_{3j_3} S_{03} S_{4j_3} S_{4j_2} S_4 R_{j_1} S_{5j_2} S_{5j_3} \\ &\Rightarrow W S_{3j_3} S_{03} S_{4j_3} S_{4j_2} S_{4j_1} S_{04} S_{5j_1} S_{5j_2} S_{5j_3} \\ &\overset{*}{\Rightarrow} w, \text{ 等々.} \end{aligned}$$

(4.2) ある i, j に対して, $\lambda \in |E_{i,j}|$ である場合

まず, 次の 2 つの集合を定義する:

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{S_{0i}\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{S_{ij}\} \right);$$

$A = \{S_{01}S_{02} \cdots S_{0n-1}\} \cup \{W_1S_{01}W_2S_{02} \cdots S_{0n-1}W_n \mid \text{ある } i \geq 1, 1 \leq j_1, \dots, j_i \leq m \text{ に対し} \\ \text{て, (1) } k \text{ が奇数なら } W_k = S_{kj_1}S_{kj_2} \cdots S_{kj_i}, (2) \text{ その他は } W_k = S_{kj_1}S_{kj_{i-1}} \cdots S_{kj_1}\}.$

(4.1) で、われわれは $\{W \in Z^+ \mid S \xrightarrow[G]{*} W\} = A$ であることを見た。

任意の $S_{ij} \in X$ に対して、 $L(S_{ij})$ は $|E_{ij}|$ を示す。

各 $W = a_1 \cdots a_p \in Z^+ (p \geq 1, a_i \in Z)$ に対して、 W_λ を次のように定義する：

$W_\lambda = \{W' \in Z^+ \mid W' \text{ は } \lambda \in \bigcap_{j=1}^q L(a_j) \text{ である } a_1, \dots, a_q (q \geq 0) \text{ のいくつかの削除によっ}$

て得られる}.

$\lambda \in W_\lambda$ である必要十分条件はすべての $1 \leq i \leq p$ に対して、 $\lambda \in L(a_i)$ であることに注意する。任意の $B \subset Z^+$ に対し、 B_λ を次のように定義する：

$B_\lambda = \{W' \in Z^+ \mid \text{ある } W \in B \text{ に対して, } W' \in W_\lambda\}.$

任意の $j \geq i \geq 0$, $B \subset Z^+$ に対して、 $B_{(A, i, j)}$ を次のように定義する：

$B_{(A, i, j)} = \{W \in B_\lambda \mid i \leq l(W) \leq j\}.$

任意の $1 \leq i \leq n$ に対して、 Y_i を次のように定義する：

$Y_i = \{j \mid 1 \leq j \leq m \text{ かつ } \lambda \in |E_{ij}E_{(i+1), j} \cdots E_{nj}|\}.$

$|E|$ を生成する文法 $G_0 = (V_0, \Sigma, P_0, S)$ を構成する方法を以下に与える：詳細のある部分は文脈により明かであり、省略する。上記より、 P_0 は

$\{W \in Z^+ \mid S \xrightarrow[G_0]{*} W\} = A_\lambda$ でなければならない。

(4.2.1) $V_0 = V \cup \{S_0\} \cup \{S'_i, L'_i, T_i, R'_i, L_{ij}, R_{ij}, L'_{ij}, R'_{ij}, L_{ijp}, R_{ijp}, L'_{ijp}, R'_{ijp} \mid 1 \leq i, j, p, q \leq m\} \cup V_0';$

$P_0 = P \cup P_0'.$

ここで、 V_0', P_0' は下記の議論から類推されるべきである。任意の $\alpha \rightarrow \beta \in P_0$ に対しで、 $l(\alpha) \leq l(\beta)$ であるから各々の $1 \leq i, j \leq m$ に対して、(4.1) の $C_i R_j$ と $L_i C_j$ に相当する変数 R_{ij} と L_{ij} を用いる。

証明の残りの部分では、 $n \geq 6$ かつ偶数の場合を考える。（その他の場合も議論は同様である）。

まず、 P_0 に対して次の付加された規則が必要である：

(4.2.2) $S \rightarrow W$ (各 $W \in A_{(A, 1, 4n)}$ に対して)；

$S_0 \rightarrow S_{1i} | S_{1i} S_0$ ($i \in Y_2$ であれば)；

$1 \leq i, j \leq m$ に対して、

$S \rightarrow S_{1i} S_{1j} S_1 R_{ji} | S_0 S_{1i} S_{1j} S_1 R_{ji} | S_{1i} S_0 S_{1j} S_1 R_{ji} | S_{1i} S_{1j} S_0 S_1 R_{ji} \\ | S_0 S_{1i} S_0 S_{1j} S_1 R_{ji} | S_0 S_{1i} S_{1j} S_0 S_1 R_{ji} | S_{1i} S_0 S_{1j} S_0 S_1 R_{ji} | S_0 S_{1i} S_0 S_{1j} S_0 S_1 R_{ji};$

$S_1 \rightarrow S_{1i} S_{1j} S_{01} S_{2j} S_{2i} L_{ji} S_2 | S_{1i} S_0 S_{1j} S_{01} S_{2j} S_{2i} L_{ji} S_2 \\ | S_{1i} S_{1j} S_0 S_{01} S_{2j} S_{2i} L_{ji} S_2 | S_{1i} S_0 S_{1j} S_0 S_{01} S_{2j} S_{2i} L_{ji} S_2;$

$1 \leq i \leq m$ に対して、

$S_1 \rightarrow S_{1i} S_1 C_i | S_0 S_{1i} S_1 C_i | S_{1i} S_0 S_1 C_i | S_0 S_{1i} S_0 S_1 C_i.$

以下の規則の集合より、 $S_{1k_1} S_{1k_2} \cdots S_{1k_q} \in |S_{1j_1} \cdots S_{1j_p}|_\lambda$ かつすべての

$j_r \notin \{k_1, \dots, k_q\}$ に対して $j_r \in Y_2$ である任意の

$W = S_{1j_1} S_{1j_2} \dots S_{1j_p} S_{01} S_{2k_1} S_{2k_2} L_{k_1 k_2} C_{k_3} \dots C_{k_{q-2}} R_{k_{q-1} k_q}$ に対して,

$S \xrightarrow[Go]{*} W$ が成立する.

次に, k ($k \geq 2$) 番目の段階を考える.

k を偶数かつ $k \leq n-2$ とする (k が奇数のときも同様に議論される).

まず, 次の (4.2.3) が必要である:

(4.2.3) $S_k C_i \rightarrow S_{ki} S_k$ ($i \in Y_{k+1}$ であれば); $S_k C_i \rightarrow C_i S_k$ ($\lambda \in |E_{ki}|$ であれば).

(4.2.3.*) さらに, 次の k 番目の段階の場合を考える:

$S \xrightarrow{*} W S_{0k-1} S_{kj_1} S_{kj_2} L_{j_1 j_2} S_k C_{j_3} \dots C_{j_{u-2}} R_{j_{u-1} j_u}$

$\Rightarrow W S_{0k-1} W_1 S_{0k} S_{(k+1)k_1} S_{(k+1)k_2} L_{k_1 k_2} S_{k+1} C_{k_3} \dots C_{k_{v-2}} R_{k_{v-1} k_v}$

が成立し, かつ $v < u$ である. この場合次の (4.2.3.2) が必要である:

(4.2.3.2) $S_k \rightarrow S_{k'}; S_{k'} \rightarrow S_k;$

もし $i, q \in Y_{k+1}$ であれば, $1 \leq j, p, r, t \leq m$ に対して,

$L_{ij} S_{k'} C_p \rightarrow S_{kp} L_{jp} S_{k'}; S_k C_j \rightarrow S_{kj} R_j' S_k;$

$R_j' S_k C_q \rightarrow S_{kq} R_j' S_k; R_j' S_k C_p \rightarrow S_{kp} R_{jp}' S_k;$

$R_{jp}' S_k C_q \rightarrow S_{kq} R_{jp}' S_k; R_{jp}' S_k R_{rt} \rightarrow S_{kr} S_{kt} S_{0k} S_{(k+1)t} S_{(k+1)r} S_{k+1} R_{jp}.$

上の場合, 最後に R_{rt} は R_{jp} に置き換える. その他, R_{rt} が R_{pr} に置き換えるような可能性もありうる: しかし議論は同様である. $k=n-2$ に対して, 次の (4.2.4) が必要である:

(4.2.4) $S_k C_i \rightarrow S_{ki} S_k$ (もし $i \in Y_{k+1}$ であれば);

$S_k C_i \rightarrow C_i S_k$ (もし $\lambda \in |E_{ki}|$ であれば);

$S_k R_{ij} \rightarrow S_{ki} S_{kj} S_{0k} S_{(k+1)j} S_{(k+1)i} S_{k+1};$

$C_i S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)i} S_{k+1} S_{(k+2)i};$

$L_{ij} S_{k+1} \rightarrow S_{(k+1)j} S_{(k+1)i} S_{0(k+1)} S_{(k+2)i} S_{(k+2)j}.$

上の各々の生成規則 $\alpha \rightarrow \beta$ において, $l(W) \geq l(\alpha)$ である各々の $W \in \beta_\lambda$ に対して, 規則 $\alpha \rightarrow W$ も必要である.

最後に入る前, 次の2つの概念を定義する:

$2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k_1, \dots, k_j \leq m$ に対して,

$X_{i(k_1, \dots, k_j)} = W_i S_{0i} W_{i+1} \dots S_{0n-1} W_n$ である.

ここで, もし p が奇数であれば, $W_p = S_{pk_1} S_{pk_2} \dots S_{pk_j}$ である,

その他は, $W_p = S_{pk_j} S_{pk_{j-1}} \dots S_{pk_1}$ である;

$X_i = \{ S_{0i} S_{0i+1} \dots S_{0n-1} \} \cup \{ W \in X_{i(k_1, \dots, k_j)} \mid 1 \leq j \leq 3 \text{ かつ } 1 \leq k_1, \dots, k_j \leq m \}.$

さて, 最後に次の場合を考える:

ある k ($1 \leq k \leq n-1$), $W_0, W_1, W_2 \in Z^*$ に対し, $l(W_1) \geq 4, W_0 S_{0k-1} W_1 S_{0k} W_2 \in A_\lambda, W_2 \in (X_{k+1})_\lambda$ が成立する. ここで, もし $k=1$ であれば, $W_0 S_{0k-1} = \lambda$ である.

次の場合を考える:

ある $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq m$ に対して, k は偶数かつ, $\leq n-4$ かつ $W_2 \in X_{k+1}(j_1, j_2, j_3)$

(その他の場合は同様に扱える). 次の規則が必要である:

$$(4.2.5) L_{ij}S_{k-1} \rightarrow S_{k-1j}S_{k-1i}S_{0k-1}S_{ki}L_{ij}'T_k;$$

もし $i, u \in Y_{k+1}$ であれば, $1 \leq j, p, q, r, t \leq m$ に対して,

$$L_{ij}S_{k-1} \rightarrow S_{k-1j}S_{k-1i}S_{0k-1}S_{ki}L_{ij}'T_k;$$

$$L_{iq}'T_kC_r \rightarrow S_{kq}L_{rr}'T_k \text{ (もし } q \in Y_{k+1} \text{ であれば)};$$

$$L_{pq}'T_kC_i \rightarrow S_{kq}L_{pi}'T_k; L_{pq}'T_kC_r \rightarrow S_{kq}L_{prr}'T_k;$$

$$L_{pqr}'T_kC_i \rightarrow S_{kr}L_{pqi}'T_k | S_{kr}L_{pqi}'T_k; L_{pqr}'T_kC_t \rightarrow S_{kr}L_{patt}'T_k;$$

$$L_{part}'T_kC_i \rightarrow S_{kt}L_{pari}'T_k;$$

$$L_{part}'T_kR_{iu} \rightarrow S_{kt}S_{ki}S_{ku}S_{0k}W \text{ (各 } W \in (X_{k+1}(p, q, r))_\lambda \text{ に対して)}.$$

ここで, 例えば, L_{pq}' は次のステップで S_{kq} が置かれ, そして S_{kp} は最後のステップのため, 覚えておくべき記号であることを示す非終端記号である, 等々.

上の場合 $W \in (X_{k+1}(p, q, r))_\lambda$ である. $W \in (X_{k+1}(q, r, i))_\lambda \cup (X_{k+1}(r, i, u))_\lambda$ であるような可能性もありうる. しかし議論は同様である. このようにして, ある i, j に対して, $\lambda \in |E_{ij}|$ である場合も, $|E|$ を生成する文脈依存文法 G_0 を実際に構成することが可能であることが証明される. $\square$

[例 3. 1]

定理 3.2 の (4.1) の証明で, P' は次の生成規則の集合からなる.

(1) $n=7, m=3$ の場合

$$S \rightarrow S_{01}S_{02} \cdots S_{06} | S_{1j}S_{01}S_{2j}S_{02} \cdots S_{06}S_{7j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$S \rightarrow S_{1j}S_1R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_1 \rightarrow S_{1j}S_1C_j | S_{1j}S_{01}S_{2j}L_jS_2 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_2C_j \rightarrow S_{2j}C_jS_2 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_2R_j \rightarrow S_{2j}S_{02}S_{3j}S_3R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$C_jS_3 \rightarrow S_{3j}S_3C_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$L_jS_3 \rightarrow S_{3j}S_{03}S_{4j}L_jS_4 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_4C_j \rightarrow S_{4j}C_jS_4 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_4R_j \rightarrow S_{4j}S_{04}S_{5j}S_5R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$C_jS_5 \rightarrow S_{5j}S_5C_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$L_jS_5 \rightarrow S_{5j}S_{05}S_{6j}S_6S_{7j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_6C_j \rightarrow S_{6j}S_6S_{7j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_6R_j \rightarrow S_{6j}S_{06}S_{7j} (1 \leq j \leq 3)$$

$D_k \in \{L_k, R_k, C_k \mid 1 \leq k \leq 3\}$ に対して,

$$S_{ij}D_k \rightarrow D_kS_{ij} (i=0, 1 \leq j \leq 6, \text{ または, } 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 3)$$

$$D_kS_{ij} \rightarrow S_{ij}D_k (i=0, 1 \leq j \leq 6, \text{ または, } 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 3).$$

(2) $n=8, m=3$ の場合

$$S \rightarrow S_{01}S_{02} \cdots S_{07} | S_{1j}S_{01}S_{2j}S_{02} \cdots S_{07}S_{8j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$S \rightarrow S_{1j}S_1R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_1 \rightarrow S_{1j}S_1C_j | S_{1j}S_{01}S_{2j}L_jS_2 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_2C_j \rightarrow S_{2j}C_jS_2 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_2R_j \rightarrow S_{2j}S_{02}S_{3j}S_3R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$C_jS_3 \rightarrow S_{3j}S_3C_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$L_jS_3 \rightarrow S_{3j}S_{03}S_{4j}L_jS_4 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_4C_j \rightarrow S_{4j}C_jS_4 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_4R_j \rightarrow S_{4j}S_{04}S_{5j}S_5R_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$C_jS_5 \rightarrow S_{5j}S_5C_j (1 \leq j \leq 3)$$

$$L_jS_5 \rightarrow S_{5j}S_{05}S_{6j}L_jS_6 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_6C_j \rightarrow S_{6j}C_jS_6 (1 \leq j \leq 3)$$

$$S_6R_j \rightarrow S_{6j}S_{06}S_{7j}S_7S_{8j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$C_jS_7 \rightarrow S_{7j}S_7S_{8j} (1 \leq j \leq 3)$$

$$L_jS_7 \rightarrow S_{7j}S_{07}S_{8j} (1 \leq j \leq 3)$$

$D_k \in \{L_k, R_k, C_k \mid 1 \leq k \leq 3\}$ に対して,

$$D_kS_{ij} \rightarrow S_{ij}D_k (i=0, 1 \leq j \leq 7, \text{または}, 1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 3).$$

[定理 3. 3]

任意の $n \geq 3$ に対して,

- (1) $ERL(n, \Sigma) - CFL(\Sigma) \neq \emptyset$;
- (2) $LCFL(\Sigma) - ERL(n, \Sigma) \neq \emptyset$.

ここで, $\#\Sigma \geq 3$.

(証明) $\Sigma = \{a, b, c\}$ とする.

(1) $\{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\} \in ERL(n, \Sigma) - CFL(\Sigma)$.

(2) 次の線形文法 $G=(V, \Sigma, P, S)$ を考える.

ここで, $\Sigma=\{a, b, c\}$, $V=\{S, A\}$,

$P: S \rightarrow aba|aSa|cAc$,

$A \rightarrow bAb|cSc$ である.

任意の $n \geq 3$ に対して, $L(G) \notin ERL(n, \Sigma)$ であることを証明すればよい. 証明は [7] の定理 6. 1 の (5) の証明と同じ方法で行う. $L(G) \in ERL(n, \Sigma)$ と仮定する. そのとき $L(G)$ を示す $E \in ERE(n, \Sigma)$ が存在する. まず, 次の命題 3.1 を示す.

[命題 3. 1]

- (1) 任意の $w \in L(G)$ に対して, $w=vabav^R$ であるような $v \in \Sigma^*$ が存在する;
- (2) $L(G) \cap \Sigma^*aba\Sigma^*aba\Sigma^* = L(G) \cap \Sigma^*abb\Sigma^* = L(G) \cap \Sigma^*bba\Sigma^* = \emptyset$;
- (3) 任意の $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ に対して, もしすべての $i \geq 0$ に対して $ux^i v y^i w \in L(G)$ であれば, $l(x)=l(y)$ である.
- (4) 任意の $k \geq 2$, $u_1, \dots, u_{k+1} \in \Sigma^*$, $L_1, \dots, L_k \subset \Sigma^*$ に対して, もし各々の L_j が空でなく, かつすべての $i \geq 0$ に対して $u_1(L_1)^i u_2(L_2)^i \dots u_k(L_k)^i u_{k+1} \in L(G)$ であれば, 各々の L_j は有限である.

(命題の証明) (1) - (3) は [7] の定理 6. 1 で証明された.

(4). 条件を仮定する. ある L_j ($1 \leq j \leq k$) は無限であると仮定する. L_1 が無限であると仮定する (その他の場合も同様). そのとき, すべての j に対して, $v_j \in$

L_3 が存在する. 従って, $u_1(L_1)u_2v_2 \cdots u_kv_ku_{k+1} \in L(G)$ である. L_1 が無限であるから, $l(t) \geq 2l(u_1u_2v_2 \cdots u_kv_kv_{k+1}+3)$ であるような $t \in L_1$ が存在する. (1) より, ある $t_0, t_1 \in \Sigma^*$ に対して, $t=t_0abat_1$ である. このとき, $u_1(t)^2u_2(v_2)^2 \cdots u_k(v_k)^2u_{k+1} \in L \cap \Sigma^*aba\Sigma^*aba\Sigma^*$ である. これは (2) に矛盾する. $\square$

定理 3.3 の証明 (つづき). p を E に現われる $\Sigma \cup \{\lambda\}$ に属するすべての記号の数とする. 次の語 w を考える:

$w = (a^{p+1}cb^{p+1}c)^{p+1}aba(cb^{p+1}ca^{p+1})^{p+1}$. 明らかに $w \in L(G)$ である. 従って, w は E の中で綴られる. E の位置 i に, 位置 i に現われる各々の $x \in \Sigma$ を結びつける. ここで, i は正整数でかつ x は左から E の i 番目の位置に現われる記号を示す. 従って, w に対して, ペアの系列 $((x_1, i_1), (x_2, i_2), \dots, (x_p, i_p))$ が存在する. ここで $w = x_1x_2 \cdots x_p$, $x_1 = \cdots = x_{p+1} = a$, $x_{p+2} = c$, $x_{p+3} = \cdots = x_{2p+3} = b$, $\dots$ 等, そして各々の i_j は E における x_j の位置である. p の定義によつて $1 \leq j_{11} < j_{11}' \leq p+1$ かつ $i_{j_{11}} = i_{j_{11}'}$

であるような j_{11}, j_{11}' が存在する. 命題 3.1 の (3) によつて $(H)^*$ の形の E の部分表現は存在しないことに注意する. 従つて $i_{j_{11}}$ 番目の位置は次のように $m^*(2 \leq m \leq n)$ の中に現われる:

$$\cdots \left[\cdots, \cdots, \cdots, \begin{bmatrix} \vdots \\ a^k \\ \vdots \end{bmatrix}, \cdots, \cdots \right]^{m*}$$

同様に $p+3 \leq j_{21} < j_{21}' \leq 2p+3$ かつ $i_{j_{21}} = i_{j_{21}'}$ であるような j_{21}, j_{21}' が存在する. 従つて $i_{j_{21}}$ 番目の位置は次のように $r^*(2 \leq r \leq n)$ の中に現われる:

$$\cdots \left[\cdots, \cdots, \begin{bmatrix} \vdots \\ b^s \\ \vdots \end{bmatrix}, \cdots, \cdots \right]^{r*}$$

命題 3.1 の (2) より $\begin{bmatrix} \vdots \\ a^k \\ \vdots \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \vdots \\ b^s \\ \vdots \end{bmatrix}$ は明かに異なる. w と E を通じて整数の系列

$j_{11}, \dots, j_{1p+1}, j_{21}, \dots, j_{2p+1}$ を得た. p の選択によつて $1 \leq e < f \leq p+1$ かつ $i_{j_{1e}} = i_{j_{1f}}$ であるような整数 e, f が存在する. 従つて, E は次のような部分表現を持つ;

$$\left[\cdots, \left[\cdots (\cdots, \cdots, \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix})^{u*} \cdots \right], \cdots \right]^{v*}$$

これは, 命題 3.1 の (4) に矛盾する. $\square$

参考文献

- [1] S. Ginsburg, The Mathematical Theory of Context-free Languages, (McGraw-Hill, 1966).
- [2] S. Ginsburg and H.G. Rice, Two families of languages related to ALGOL, J.ACM, 9, pp.350-371 (1962).
- [3] S. Ginsburg and E.H. Spanier, Bounded ALGOL-like languages, Trans. AM. Math.

- Soc., 113, pp.333-368 (1964).
- [4] S.A. Greibach, The unsolvability of the recognition of linear context-free languages, JACM, 13, 4, pp.582-587 (1966).
 - [5] J. Gruska, A characterization of context-free languages, J. Comput. System Sci., 5, pp.353-364 (1971).
 - [6] M. A. Harrison, Introduction to Formal Language Theory, (Addison-Wesley, 1978).
 - [7] K. Hashiguchi and H. Yoo, Extended regular expressions of star degree at most two, to appear in Theoret. Comput. Sci.
 - [8] K. Hashiguchi and H. Yoo, The infinite 2-star height hierarchy of extended regular languages of star degree at most two, submitted to Theoret. Comput. Sci.
 - [9] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, Introduction to Automaton Theory, Languages, and Computation, (Addison-Wesley, 1979).
 - [10] E. Shamir, On sequential languages, Z. Phonetik, Sprach. & Kommunikationsforschung, 18, pp.61-69 (1965).
 - [11] 山崎, 文脈自由言語のある部分言語の包含関係に関する一考察, 信学論(D), J70-D, 1, pp.1-9(87/1).
 - [12] M. K. Yntema, Cap expressions for context-free languages, Inform. Control., 18, pp.311-318 (1971).
 - [13] H. Yoo and K. Hashiguchi, Extended automata-like regular expressions of star degree at most (2,1), to appear in Theoret. Comput. Sci.