

# On Equilibrium Strategies of Multicriteria Games

弘前大学 理学部 情報科学科  
( Department of Information Science  
Faculty of Science, Hirosaki University )  
田中 環 ( Tamaki TANAKA )

## 1 Introduction

ここで取り扱うゲームは

ベクトル値 Payoff を持つ非協力ゼロ和 2 人ゲーム  
(Multicriteria Non-Cooperative Zero-Sum Two-Person Games)

である。すなわち、ここでは次の設定のゲームを考える。

$X, Y$  は (実 Hausdorff t.v.s. の) コンパクト凸集合  
 $f: X \times Y \rightarrow Z$  は連続なベクトル値 Payoff  
ただし、 $Z$ : 実 Hausdorff t.v.s.

最小化プレイヤー player1 は Payoff  $f$  を最小にするように、  
戦略  $x \in X$  を選択する。

最大化プレイヤー player2 は Payoff  $f$  を最大にするように、  
戦略  $y \in Y$  を選択する。

この時、このゲームに (Nash の均衡点のような) 均衡戦略、あるいはベクトル値ならではの特殊な戦略が、いかなる条件の下で存在するのかを議論したい。ここでの最大化、最小化とは、ゲームのルールや Payoff の評価の基準として、目的空間  $Z$  に半順序 ( $\leq_C$ ) を定める

pointed ( $C \cap (-C) = \{0\}$ ) な凸錐 (Convex Cone)  $C$   
ただし、 $\text{int}C \neq \emptyset$

が与えられていて、この順序構造について最適化をはかるものとする。このような凸錐  $C$  を Dominance Cone と呼ぶ。

cf.  $Z = \mathbf{R}^n, C = \mathbf{R}_+^n$  の時は *Pareto Optimization*

そこで与えられた集合  $A \subset Z$  の最大元の集合、弱最大元の集合を

$$\text{Max}A := \text{Ext}[A \mid -C] \quad \text{Max}_w A := \text{Ext}[A \mid -C^0]$$

(ただし、 $C^0 := \text{int}C \cup \{0\}$ )

とする。同様に、与えられた集合  $B \subset Z$  の最小元の集合、弱最小元の集合を

$$\text{Min}B := \text{Ext}[B \mid C] \quad \text{Min}_w B := \text{Ext}[B \mid C^0]$$

とする。この時、player2 の各戦略  $y \in Y$  に対する player1 の（弱）最適反応戦略

$$R_1^{(w)}(y) := \{x \in X : f(x, y) \in \text{Min}_{(w)} f(X, y)\}$$

player1 の各戦略  $x \in X$  に対する player2 の（弱）最適反応戦略

$$R_2^{(w)}(x) := \{y \in Y : f(x, y) \in \text{Max}_{(w)} f(x, Y)\}$$

が得られる。従って、各（弱）最適反応集合は

$$D_1^{(w)} := \{(x, y) : x \in X, y \in R_2^{(w)}(x)\}$$

$$D_2^{(w)} := \{(x, y) : y \in Y, x \in R_1^{(w)}(y)\}$$

となり、各 player は Scalar-Criteria ゲームにおけるミニマックス原理と同様に、行動することができる。つまり、消極的ではあるが、保証水準 (Security Level) を最適にするという意味で、player1 はミニマックス戦略を、player2 はマックスミニ戦略をとるであろう。この時、ゲームの値（集合）は

player1

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) := \min_{x \in X} \bigcup \text{Max}_{(w)} f(x, Y) = \text{Min} f(D_1^{(w)})$$

player2

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) := \max_{y \in Y} \bigcup \text{Min}_{(w)} f(X, y) = \text{Max} f(D_2^{(w)})$$

となる。

実際のところ、各結果の中では

$$\min_{x \in X} \bigcup \text{Max}_w f(x, Y), \quad \max_{y \in Y} \bigcup \text{Min}_w f(X, y)$$

を扱っている。これは好ましい結果をえたいという証明上の困難さから生じている。ただし、Payoff や Dominance Cone によっては “weak(w)” のとれた形で論じることが可能な場合もある。

## 2 Minimax (Maximin) Strategy Pairs の存在性

ゲームの値を実現する戦略の組を次のように定義しよう。

$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y)$  の解  $(x, y)$  を minimax strategy pair

と呼び、その全体を  $\arg \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f$  と表し、

$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$  の解  $(x, y)$  を maximin strategy pair

と呼んで、その全体を  $\arg \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f$  と表す。

目的空間  $Z$  が有限次元なら、上の Minimax Strategy Pair 及び Maximin Strategy Pair は今の設定では必ず存在する ([13] Hartley の結果より)。無限次元の場合は Dominance Cone  $C$  が次のいずれかの条件を満たせばよい。ただし、条件 2 を満たす凸錐ならば条件 1 も満たす ([7] を見よ)。

### 条件 1

— Sterna-Karwat's Condition [14 and 15]:

For every closed vector subspace  $L$  of  $Z$ ,

$C \cap L$  is a vector subspace whenever  $\text{cl}(C \cap L)$  is a vector subspace.

### 条件 2

— Our Condition [6 and 7]:

$$(C \setminus \{0\}) + \text{cl} C \subset C.$$

### 定理 1

今の設定では  $\left( \begin{array}{l} X, Y \text{ は コンパクト集合} \\ f: X \times Y \rightarrow Z \text{ は 連続} \\ C \text{ が 条件 1 または 2 を 満たす。} \end{array} \right)$

$$\arg \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad \arg \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f \neq \emptyset$$

$$\left( \begin{array}{l} \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) \neq \emptyset \end{array} \right)$$

## 3 錐鞍点 (Cone Saddle Points)

戦略  $(x_0, y_0)$  が  $C$ -saddle point (weak  $C$ -saddle point) であるとは、

$$f(x_0, y_0) \in \text{Max}_{(w)} f(x_0, Y) \cap \text{Min}_{(w)} f(X, y_0)$$

となる時をいう。今の設定で、定義により、最適反応集合の共通部分が

$$D_1 \cap D_2 : \text{錐鞍点全体}$$

$$D_1^w \cap D_2^w : \text{弱錐鞍点全体}$$

となることがわかる。それらの存在性について、次のことがわかっている。

### 補題1

([6], Theorem 3.1 より) 今の設定で  $\left( \begin{array}{l} X, Y \text{ は コンパクト凸集合} \\ f : X \times Y \longrightarrow Z \text{ は 連続} \end{array} \right)$

各  $y \in Y$  に対して、その最適反応戦略  $R_1^w(y)$  が凸集合

各  $x \in X$  に対して、その最適反応戦略  $R_2^w(x)$  が凸集合

ならば、weak  $C$ -saddle points が存在する。

この補題から次の定理は容易に証明できる。

### 定理2

([7], Lemma 3.2 ) 今の設定で  $\left( \begin{array}{l} X, Y \text{ は コンパクト凸集合} \\ f : X \times Y \longrightarrow Z \text{ は 連続} \end{array} \right)$

Payoff  $f$  が次のいずれかの条件

- (1)  $f(\cdot, y)$  is properly quasi  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is properly quasi  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (2)  $f(\cdot, y)$  is properly quasi  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (3)  $f(\cdot, y)$  is  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is properly quasi  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (4)  $f(\cdot, y)$  is  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is  $C$ -concave for every  $x \in X$

を満たすならば、weak  $C$ -saddle points が存在する。

REMARK-1 A function  $g$  is said to be  $C$ -convex if

$$g(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) \leq_C \lambda g(w_1) + (1 - \lambda)g(w_2)$$

for every  $w_1, w_2 \in W$  and  $\lambda \in [0, 1]$ ; also  $g$  is said to be  $C$ -concave if  $-g$  is a  $C$ -convex function.

REMARK-2 A function  $g$  is said to be proerly quasi  $C$ -convex if either

$$g(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) \leq_C g(w_1) \quad \text{or}$$

$$g(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2) \leq_C g(w_2),$$

for every  $w_1, w_2 \in W$  and  $\lambda \in [0, 1]$ ; also  $g$  is said to be properly quasi  $C$ -concave if  $-g$  is a properly quasi  $C$ -convex function.

**REMARK-3** 上の錐鞍点の存在定理は今までに知られている定理を拡張したものになっている。たとえば、条件(1)は[5]のCorollary4.1や[10]のCorollary4.16で扱われていて、条件(4)は[4]のTheorem3.1や[6]のCorollary3.4及び[10]のCorollary4.16で扱われている。しかし、条件(2)や条件(3)は著者の知る限りでは、新しい十分条件である。

## 4 ゲームの値

今までのことにより、次のようなミニマックス定理が得られる。

### 定理3

([7], Theorem3.1 and Lemma3.1) 今の設定で

( $X, Y$  はコンパクト凸集合、 $f: X \times Y \rightarrow Z$  は連続)

Dominance Cone  $C$  が

$$(C \setminus \{0\}) + \text{cl}C \subset C$$

を満足し、Payoff  $f$  が次のいずれかの条件

- (1)  $f(\cdot, y)$  is properly quasi  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is properly quasi  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (2)  $f(\cdot, y)$  is properly quasi  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (3)  $f(\cdot, y)$  is  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is properly quasi  $C$ -concave for every  $x \in X$
- (4)  $f(\cdot, y)$  is  $C$ -convex for every  $y \in Y$  and  
 $f(x, \cdot)$  is  $C$ -concave for every  $x \in X$

を満たすならば、 $S^w \neq \emptyset$  で、 $\forall (x_0, y_0) \in S^w$  に対して

$$\exists z_1 \in \minimax_{x \in X, y \in Y} f(x, y) \text{ and } \exists z_2 \in \maximin_{y \in Y, x \in X} f(x, y)$$

$$z_1 \leq_C f(x_0, y_0) \text{ and } f(x_0, y_0) \leq_C z_2$$

ベクトル値関数のミニマックス定理に関しては、上の条件(1)は[5]のRemark4.2や[8]のTheorem5.1において扱われており、条件(3)は[9]のTheorem3.1において、また、条件(4)は[8]のTheorem5.2で扱われている。しかしながら、条件(2)は著者の知る限りでは新しい。

また、特に、非協力ゼロ和2人 Multicriteria Matrix ゲーム (つまり、Payoff が  $f(x, y) = (x^T A_1 y, \dots, x^T A_n y)$ ) は必ず弱均衡戦略  $(x_0, y_0) \in S^w$  を持ち (つまり  $S^w \neq \emptyset$ )、上の関係が成立することも分かる。

## 5 ミニマックス戦略、マックスミニ戦略

最近までのベクトル最適化では、考えている順序構造で順序がつかないものについては第2の順序構造 (たとえば、内積空間であれば、あるベクトルとの内積を考えてスカラー化して最適化をしたり、ノルム空間であれば、ある点からの距離による最適化を考えたりする) を導入して最適化をしているようである。ここでは目的空間における解析をひとまずやめて、決定空間に目を向ける。まず、次のような集合を考える。

minimax strategy pairs  $|_{x=x_0}$

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x_0) := \{y \in Y : (x_0, y) \in \arg \min \max f\}$$

maximin strategy pairs  $|_{y=y_0}$

$$M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y_0) := \{x \in X : (x, y_0) \in \arg \max \min f\}$$

とくと、

$$\arg \min \max f = \bigcup_{x \in X} \{(x, y) : y \in M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)\}$$

$$\arg \max \min f = \bigcup_{y \in Y} \{(x, y) : x \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y)\}$$

と表せる。また、

$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) \neq \emptyset$  となる  $x \in X$  を player1 のミニマックス戦略

$M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) \neq \emptyset$  となる  $y \in Y$  を player2 のマックスミニ戦略

ということにする。

さて、この時スカラー Payoff の場合と比較すると、次のようになる。もし両 player とも理想的な手として (しかし消極的ではあるが)

player1 はミニマックス戦略  $x_1 \in X$

player2 はマックスミニ戦略  $y_2 \in Y$

を選んだとすると、スカラー Payoff の場合は、

$$\min \max f \geq f(x_1, y_2) \geq \max \min f$$

となり、お互いの最低保証はされていて、少なくともその期待されるゲームの値よりも悪くない結果がえられる。しかしベクトル値 Payoff の場合には、

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \ni f(x_1, y_1) = \text{or } \not\leq_C f(x_1, y_2)$$

$$f(x_1, y_2) = \text{or } \not\leq_C f(x_2, y_2) \in \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

$$\text{for all } x_2 \in M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y_2), y_1 \in M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x_1)$$

が保証されているだけである。従って、次のような「後悔」が現れる。

両 player ともミニマックス戦略、マックスミニ戦略をとるものとする。  
player1 のミニマックス戦略  $x_0 \in X$  が 後悔を伴う 場合があるとは、

$$\exists y_0 \in Y \text{ s.t. } \begin{cases} \text{(i)} & M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y_0) \neq \emptyset; \\ \text{(ii)} & y_0 \in M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x), \\ & f(x, y_0) \leq_C f(x_0, y_0), \text{ and} \\ & f(x, y_0) \neq f(x_0, y_0) \quad \text{for some } x \in X \end{cases}$$

この時、特に

$$f(x_0, y_0) \in \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) + (C \setminus \{0\})$$

が成り立つ。従って、逆に

$$f(x_0, y') \notin \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) + (C \setminus \{0\}), \quad \forall y' \in M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x_0)$$

ならば、 $x_0$  は後悔が絶対に起こらないミニマックス戦略である。また、マックスミニ戦略  $y_0 \in Y$  が後悔を伴う場合も同様に定義される。

それでは、なるべく後悔が起きないミニマックス戦略(マックスミニ戦略)の選択はどのようにすれば良いかを考える。自然な方法として、相手の player がどんなマックスミニ戦略(ミニマックス戦略)をとっても後悔の起こる確率なるべく小さくなるように戦略を選択する場合等が考えられる。そこで、 $X, Y$  それぞれに測度空間  $(X, B_X, \mu_X)$ ,  $(Y, B_Y, \mu_Y)$  を構成する。ただし、

$B_X, B_Y$  は  $X, Y$  の Borel 集合族

$\mu_X, \mu_Y$  は可測空間  $(X, B_X)$ ,  $(Y, B_Y)$  上の測度

とする。また、ここでは

$$0 < \mu_X(X) < \infty, \quad 0 < \mu_Y(Y) < \infty$$

を仮定する。そこで、 $A \subset Y$ 、 $C \subset X$  に対して

$$\begin{aligned}\mu_Y^*(A) &= \inf_{A \subset B \in \mathcal{B}_Y} \mu_Y(B) & \mu_X^*(C) &= \inf_{C \subset D \in \mathcal{B}_X} \mu_X(D) \\ \varphi_1(x) &= \mu_Y^*(M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)) & \varphi_2(y) &= \mu_X^*(M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y)) \\ \mathcal{F}_X &= \{x \in X : M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) \neq \emptyset\} & \mathcal{F}_Y &= \{y \in Y : M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

とおくと、  
player1 は

$$\text{maximize } \varphi_1(x) \quad \text{subject to } x \in \mathcal{F}_X$$

player2 は

$$\text{maximize } \varphi_2(y) \quad \text{subject to } y \in \mathcal{F}_Y$$

の最適解を探すことになる。

REMARK-3 もし、ここで Dominance Cone  $C$  において、 $C \setminus \{0\}$  が open ならば

$$x \mapsto M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) \quad x \in \mathcal{F}_X$$

$$y \mapsto M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) \quad y \in \mathcal{F}_Y$$

は u.s.c. な compact-valued maps となり、 $Z$  が Hausdorff 空間なることより

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) \in \mathcal{B}_Y \quad M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) \in \mathcal{B}_X$$

となるので、

$$\varphi_1(x) = \mu_Y(M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)) \quad \varphi_2(y) = \mu_X(M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y))$$

となる。

この時、次のような「安心」が現れる時がある。

両 player ともミニマックス戦略、マックスミニ戦略をとるものとする。  
player1 のミニマックス戦略  $x_0 \in X$  が 安心な 戦略であるとは、

$$\varphi_1(x_0) = \mu_Y(Y)$$

特に、真に安心な戦略であるとは、

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x_0) = Y$$

真に安心な戦略なら、安心な戦略である。また、真に安心な戦略は後悔が決して起こらない戦略である。ここで、両 player が真に安心な戦略  $x_0 \in X$ 、 $y_0 \in Y$  を持つとすると、

$$\forall y \in Y, f(x_0, y) \in \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y)$$

$$\forall x \in X, f(x, y_0) \in \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

なので、

$$f(x_0, y_0) \in \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) \cap \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

となる。

逆に、その共通部分がなければ、いずれか一方の player には真に安心な戦略がないことになる。また、

$$\sup_{x \in X} \frac{\varphi_1(x)}{\mu_Y(Y)} < \sup_{y \in Y} \frac{\varphi_2(y)}{\mu_X(X)}$$

の時、player2 にとって有利 (player1 にとって不利)

$$\sup_{x \in X} \frac{\varphi_1(x)}{\mu_Y(Y)} > \sup_{y \in Y} \frac{\varphi_2(y)}{\mu_X(X)}$$

の時、player1 にとって有利 (player2 にとって不利)

と考えることができる。従って、安心な戦略があれば、少なくとも不利にはならない。

最後にこれらのことをいくつかの例を通して考えてみる。ただし、 $X, Y$  は Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト凸集合とし、測度は Lebesgue 測度を考える。

## 6 Examples

最初の2つの例は非協力ゼロ和2人 Multicriteria Matrix ゲームの例です。これらは、文献 [3] の例をこの論文の観点から、詳しく計算したものです。

## 例1

([3], Example 3.1)

$$X = Y = \{x \in \mathbf{R}^2 : x = (x_1, x_2), \sum_{i=1}^2 x_i = 1, x_1, x_2 \geq 0\}$$

$$Z = \mathbf{R}^2, \quad C = \mathbf{R}_+^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\}$$

$$f(x, y) = (x^T A_1 y, x^T A_2 y), \quad \text{where } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

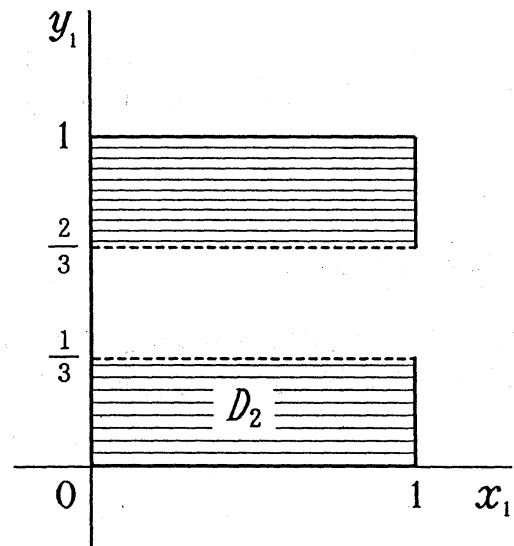
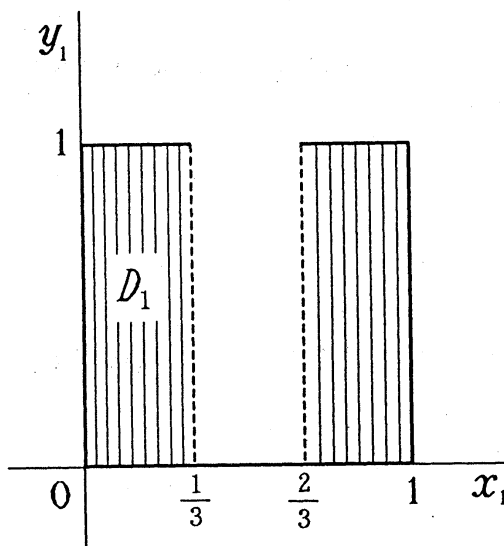
ここで、 $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  とすると、

$$f(x, y) = (2x_1 + y_1 - 3x_1 y_1, -x_1 - 2y_1 + 3x_1 y_1) \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$R_2(x) = \begin{cases} Y & 0 \leq x_1 < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < x_1 \leq 1 \\ \{(0, 1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$R_1(y) = \begin{cases} X & 0 \leq y_1 < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < y_1 \leq 1 \\ \{(0, 1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり、Payoff  $f$  は  $x_1$  と  $y_1$  の関数として表される。そこで、 $x_1$  と  $y_1$  で表した各最適反応集合  $D_1$ ,  $D_2$  は次の図のようになる。



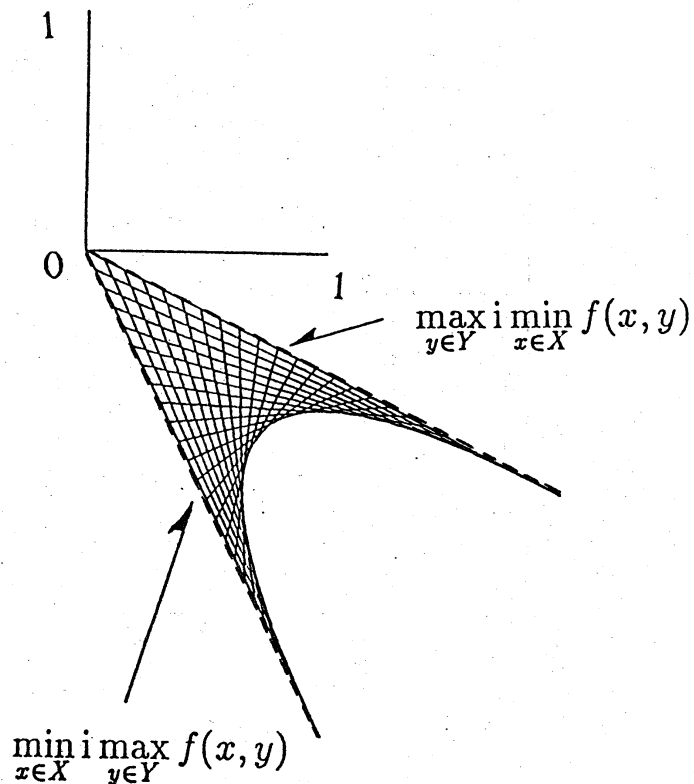
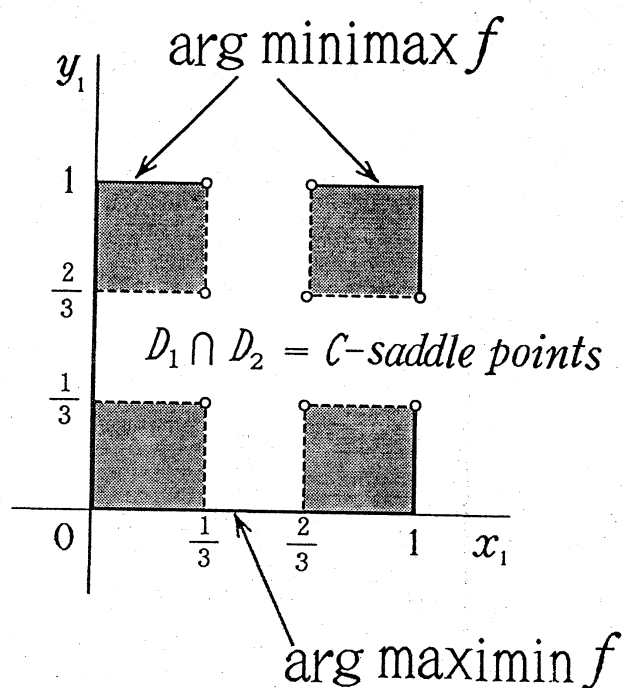
また、minimax strategy pairs 全体 (strong)、maximin strategy pairs 全体 (strong) 及び  $M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)$ ,  $M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y)$  は次のようになる。

$$\arg \min \max f = (\{(0,1)\} \times Y) \cup \left( \{(\alpha, 1-\alpha) : 0 \leq \alpha < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < \alpha \leq 1\} \times \{(1,0)\} \right)$$

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) = \begin{cases} Y & x = (0,1) \\ \{(1,0)\} & 0 \leq x_1 < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < x_1 \leq 1 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\arg \max \min f = (X \times \{(0,1)\}) \cup \left( \{(1,0)\} \times \{(\alpha, 1-\alpha) : 0 \leq \alpha < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < \alpha \leq 1\} \right)$$

$$M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) = \begin{cases} X & y = (0,1) \\ \{(1,0)\} & 0 \leq y_1 < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < y_1 \leq 1 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$



## 例2

([3], Example 3.2)

$$X = Y = \{x \in \mathbf{R}^2 : x = (x_1, x_2), \sum_{i=1}^2 x_i = 1, x_1, x_2 \geq 0\}$$

$$Z = \mathbf{R}^2, \quad C = \mathbf{R}_+^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\}$$

$$f(x, y) = (x^T A_1 y, x^T A_2 y), \quad \text{where } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

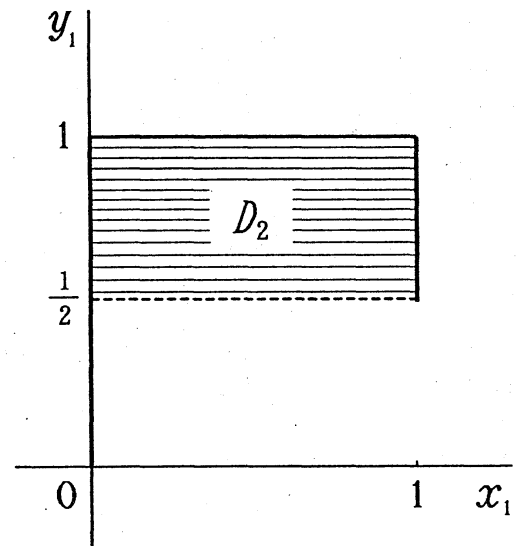
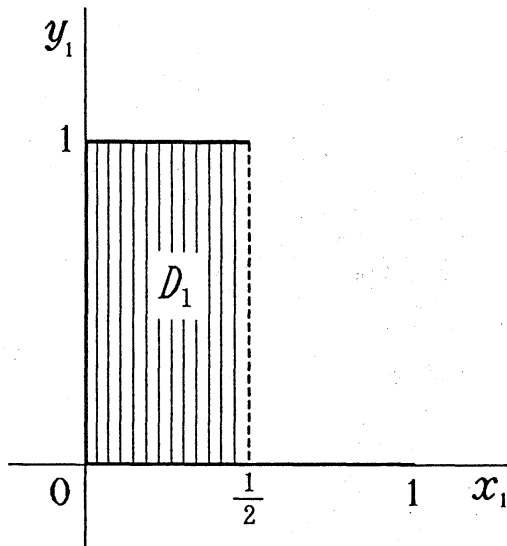
ここで、 $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  とすると、

$$f(x, y) = (x_1 + y_1 - 2x_1 y_1, 1 - y_1 + x_1 y_1) \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$R_2(x) = \begin{cases} Y & 0 \leq x_1 < \frac{1}{2} \\ \{(0, 1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$R_1(y) = \begin{cases} X & \frac{1}{2} < y_1 \leq 1 \\ \{(0, 1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり、Payoff  $f$  は  $x_1$  と  $y_1$  の関数として表される。そこで、 $x_1$  と  $y_1$  で表した各最適反応集合  $D_1$ ,  $D_2$  は次の図のようになる。



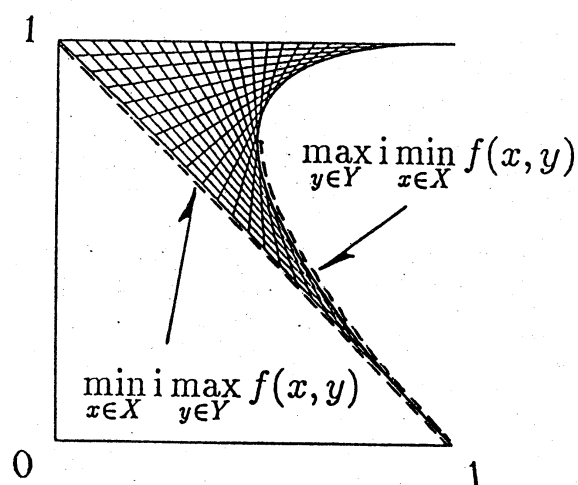
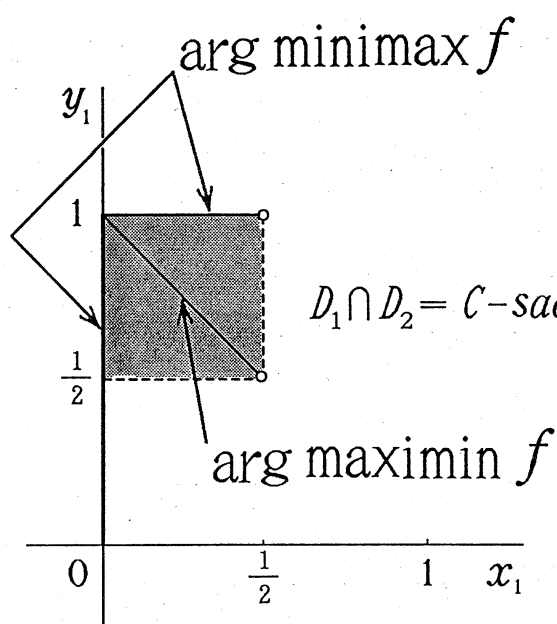
また、minimax strategy pairs 全体 (strong)、maximin strategy pairs 全体 (strong) 及び  $M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)$ ,  $M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y)$  は次のようになる。

$$\arg \min \max f = (\{(0, 1)\} \times Y) \cup \left( \{(\alpha, 1 - \alpha) : 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\} \times \{(1, 0)\} \right)$$

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) = \begin{cases} Y & x = (0, 1) \\ \{(1, 0)\} & 0 \leq x_1 < \frac{1}{2} \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\arg \max \min f = \{(\alpha, 1 - \alpha) \times (1 - \alpha, \alpha) : 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\}$$

$$M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) = \begin{cases} \{(1 - y_1, y_1)\} & \frac{1}{2} < y_1 \leq 1 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$



## 例3

([7], Example 4.1)

$$X = [\frac{1}{2}, 1] \quad Y = [-1, 1]$$

$$Z = \mathbf{R}^2, \quad C = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 : z_2 \geq |z_1|\}$$

$$f(x, y) = (xy, x(1 - y^2)) \quad x \in X, \quad y \in Y$$

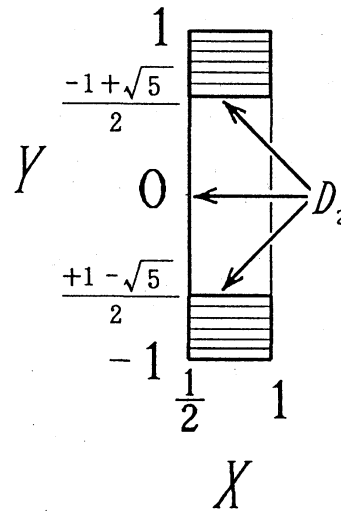
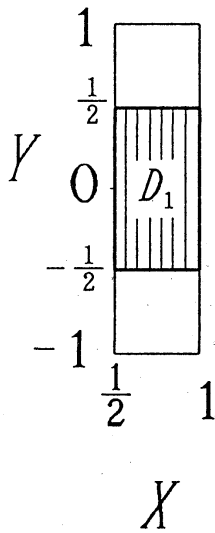
$$R_2(x) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad x \in X$$

$$D_1 = X \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$R_1(y) = \begin{cases} X & -1 \leq y \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq y \leq 1 \\ \{\frac{1}{2}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_2 = \left( X \times [-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \right) \cup \left( \{\frac{1}{2}\} \times [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}] \right) \cup \left( X \times [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1] \right)$$

となり、各最適反応集合  $D_1$ ,  $D_2$  は次の図のようになる。



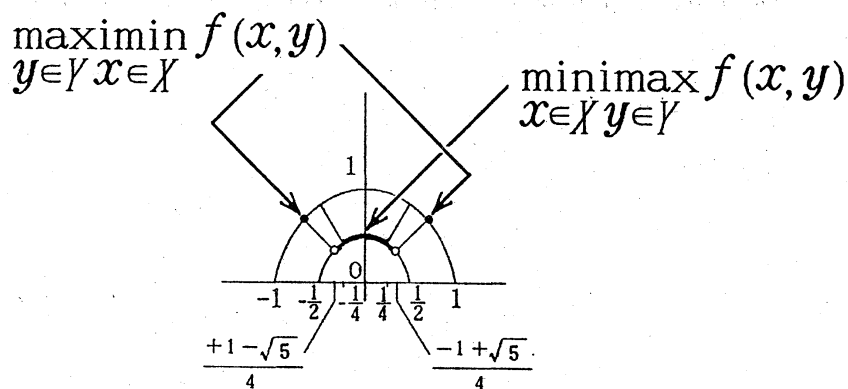
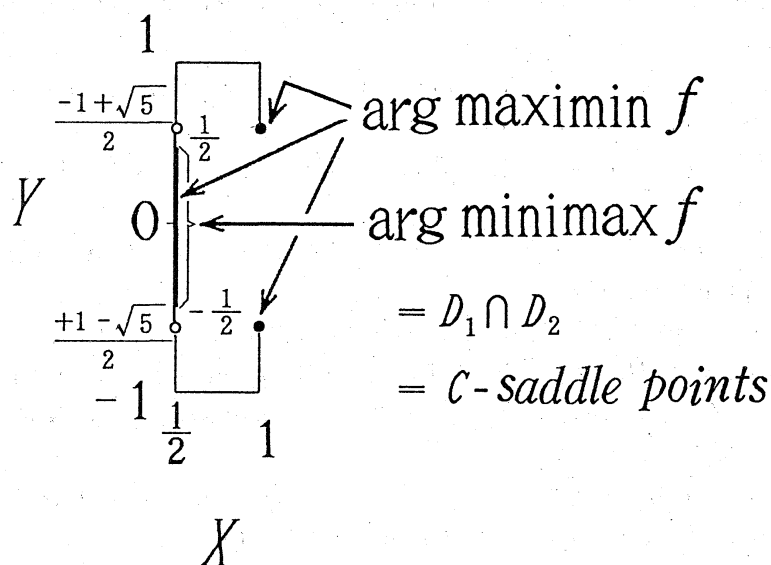
また、minimax strategy pairs 全体、maximin strategy pairs 全体及び  $M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x)$ ,  $M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y)$  は次のようになる。

$$\arg \text{minimax} f = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$M_{\text{ax}}^{\text{in}}(x) = \begin{cases} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & x = \frac{1}{2} \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\arg \text{maximin} f = \left( \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \right) \cup \left( \{1\} \times \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\} \right)$$

$$M_{\text{in}}^{\text{ax}}(y) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \right\} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} < y < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \{1\} & y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$



## 7 References

- [1] D.BLACKWELL, *An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.6, pp.1-8, 1956
- [2] L.S.SHAPLEY, *Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol.6, pp.57-61, 1959
- [3] H.W.CORLEY, *Games with Vector Payoffs*, JOTA, Vol.47, pp.491-498, 1985
- [4] J.W.NIEUWENHIUS, *Some Minimax Theorems in Vector-Valued Functions*, JOTA, Vol.40, pp.463-475, 1983
- [5] T.TANAKA, *Some Minimax Problems of Vector-Valued Functions*, JOTA, Vol.59, pp.505-524, 1988
- [6] T.TANAKA, *Existence Theorems for Cone Saddle Points of Vector-Valued Functions in Infinite-Dimensional Spaces*, JOTA, Vol.62, pp.127-138, 1989
- [7] T.TANAKA, *Two-Types of Minimax Theorems for Vector-Valued Functions*, to appear in JOTA
- [8] F.FERRO, *Minimax Type Theorems for  $n$ -Valued Functions*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol.32, pp.113-130, 1982
- [9] F.FERRO, *A Minimax Theorem for Vector-Valued Functions*, JOTA, Vol.60, pp.19-31, 1989
- [10] T.TANAKA, *A Characterization of Cone Saddle Points of Vector-Valued Functions via Scalarization*, preprint, 1988
- [11] P.L.YU, *Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives*, JOTA, Vol.14, pp.319-377, 1974
- [12] T.TANAKA, *On Cone-Extreme Points in  $\mathbb{R}^n$* , Science Reports of Niigata University, Vol.23, pp.13-24, 1987
- [13] R.HARTLEY, *On Cone-Efficiency, Cone-Convexity, and Cone-Compactness*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.34, pp.211-222, 1978
- [14] A.STERNA-KARWAT, *On Existence of Cone-Maximal Points in Real Topological Linear Spaces*, Isreal Journal of Mathematics, Vol.54, pp.33-41, 1986
- [15] A.STERNA-KARWAT, *A Note on Convex Cones in Topological Vector Spaces*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Vol.35, pp.97-109, 1987