

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

(組合わせ論的表現論における最近の展開 報告書)

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 中川 由宇斗

Tohoku University Graduate School of Science Mathematics

Yuto Nakagawa

1 問題の背景

Ω を有限集合, Ω に値をとる確率変数列を $\{X_n\}_{n \geq 0}$ とする. X_{t+1} における状態が直前の状態 X_t にのみ依存し, それ以前の状態 $\{X_0, \dots, X_{t-1}\}$ に依存しないとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ が有限マルコフ連鎖であるという. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ の確率分布を $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ とする. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ がマルコフ連鎖であるとき, $|\Omega| \times |\Omega|$ 行列 P が存在して, $\mu_{t+1} = \mu_t P$ とかける. この $|\Omega| \times |\Omega|$ 行列 P を, 確率推移行列 (確率行列) という. [1] にて, 半群の手法を用いた代数的なアプローチによる固有値及びその重複度の導出が行われた. 本論文では, Tsetlin library の拡張として q 類似を考え, そのマルコフ連鎖に対して, 半群の手法を用いた代数的なアプローチによる固有値及びその重複度の分析を行った*1.

問題 1. Tsetlin library

$[n]$ 上の確率分布 $\{w_i\}_{i=1}^n$ が与えられているとする*2. 本棚に n 冊の異なる種類の本があるときに, 「本 i ($1 \leq i \leq n$) を確率 w_i で取り出し, それを一番左に移動する」という操作を考える. この操作を繰り返して得られる S_n 上のマルコフ連鎖を, Tsetlin library という*3.

$n = 9$ のときの Tsetlin library の状態の変化の具体例

8 を選ぶ	w_8	7	3	5	1	<u>8</u>	9	2	4	6
左端に移動	$\rightarrow$	<u>8</u>	7	3	5	1	9	2	4	6
	$\rightarrow$	8	7	3	5	1	9	2	4	6

Tsetlin library の固有値は次のようになることが知られている. [1]

定理 2 (Tsetlin library の固有値と重複度 [1]). Tsetlin library の固有値と重複度は以下のように表される. 但し $(X \subset [n])$ とする.

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i, \quad m_X = (n - |X|)! \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z!} = d_{n-|X|}$$

$d_k := \#\{\sigma \in S_k \mid \forall i, \sigma_i \neq i\}$ であり, $d_k = k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}$ となる. すなわち, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in S_k$ に対して, 全ての元を動かすような $\sigma \in S_k$ の数であり, モンモール数と呼ばれる.

*1 q 類似: q を 1 に近づける極限を考えると, 元の形に戻るようなもの.

*2 $[n] := \{1, \dots, n\}$

*3 $S_n = n$ 次対称群

2 先行研究

定義 3 (半群, LRB, チャンバー, L, supp).

- (1) 集合 S 上の演算 $(*)$ が結合則 $((x * y) * z = x * (y * z))$ を満たすとき, $(S, *)$ は半群という ^{*4}.
- (2) 半群 S が $x^2 = x$, $xyx = xy \quad \forall x, y \in S$ を満たすとき, S は LRB(Left-Regular Band) という.
- (3) $\forall x \in S, cx = c$ を満たす $c \in S$ をチャンバーといい, チャンバー全体の集合を C とかく.
- (4) S 上の同値関係 $\sim$ を $a \sim b \Leftrightarrow ab = a$ かつ $ba = b$ で定義する.
- (5) $L = S/\sim$, $\text{supp} : S \rightarrow S/\sim$ と定める.
- (6) L 上の順序 $\leq$ を $\text{supp } x \leq \text{supp } y \Leftrightarrow yx = y$ で定義する.
- (7) $c_Y = \#\{c \in C \mid \text{supp } y = Y, yc = c\}$ とする.

$C \subset S$ であり, $\forall x \in S, c \in C \rightarrow xc \in C$ となる.

定理 4. (Brown (2000))[1] S を単位元を持つ有限の LRB とする. $\{w_x\}$ を S 上の確率分布とする. C 上のマルコフ連鎖を, 確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかけることによって定義する. このマルコフ連鎖の推移確率行列を P とすると, P は対角化可能である. また, 各 $X \in L$ に対して, 重複度が m_X であるような固有値 λ_X を持つ^{*5}.

$$\lambda_X = \sum_{\text{supp } y \leq X} w_y \qquad m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y) c_Y$$

3 主定理 1

Tsetlin library の拡張として次の問題を考える.

問題 5. **p 色版 Tsetlin library** 独立した確率分布 $\{w_i\}_{i \in [n]}$ と $\{c_j\}_{j \in C_p}$ が与えられているとする. 色つき置換群 $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) : (a_1, \dots, a_n) \in S_n, b_j \in C_p \ (1 \leq j \leq n)$ に対し, 「確率 w_i で i 番の数字を選び, 確率 c_j で b_i を j に変え, 左端に移動する」というランダム操作を行う. この操作によって得られるマルコフ連鎖を **p 色版 Tsetlin library** という.

p 色版 Tsetlin library は, $(p = 1)$ のとき, 通常の Tsetlin library と同じになるため, Tsetlin library の q 類似といえる.

$n = 8, p = 3$ のときのランダム操作. 但し, $(a, 0) = a, (b, 1) = \textcolor{red}{b}, (c, 2) = \textcolor{blue}{c}$ と書く.

w_4		7	3	5	1	4	2	8	6
数字 4 を選ぶ $\rightarrow$	4	7	3	5	1		2	8	6
色 1 に変える $\rightarrow$	4	7	3	5	1		2	8	6
c_1		4	7	3	5	1	2	8	6

p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下になることが分かった.

定理 6 (主定理 1 p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度). p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下になる. 但し, $(X \subset [n])$ とする.

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i \qquad , \qquad m_X = (n - |X|)! p^{n - |X|} \sum_{Z = 0}^{n - |X|} \frac{(-1)^Z}{Z! p^Z} = D_{n - |X|, p}$$

^{*4} 単純に S が半群であるという.

^{*5} μ は束 L 上のメビウス関数

$D_{k,p} := \#\{\tau \in G_{k,p} \mid \forall i \sigma_i \neq i \vee a_i \neq 0\}$ であり, $D_{k,p} = k!p^k \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!p^j}$ となる. すなわち, $\tau = ((\sigma_1, a_1), \dots, (\sigma_k, a_k)) \in G_{k,p}$ において, 任意の i に対して「 $\sigma_i \neq i$ または $a_i \neq 0$ を満たす」ような $\tau \in G_{k,p}$ の数を, **p 色版モンモール数** と呼び, $D_{k,p}$ と書く.

証明. $S' = F_n = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_l), 0 \leq l \leq n\}$ とする.

$S = F_{n,p} = \{x = ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) \mid (1 \leq l \leq n), x_i \in [n], x_i \neq x_j (i \neq j), a_i \in C_p\}$ とする. また, $l = 0$ のときは $G_{n,q}$ の単位元とし, e とかく. ここで, (x_i, a_i) に対して, a_i を x_i に対する係数と呼ぶことにする. 演算 $(*)$ を次のように定義する.

$$((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) * ((y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m)) = ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l), (y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m))\%$$

但し, $\%$ は「 x_i において左に既出ならば, 係数によらず削除する」という意味とする.

$$\text{例 } (21) * (35416) = (2135416)\% = (213546)$$

$(F_{n,p}, *)$ は LRB である. $C = \{((x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n))\}$ であり, C と $G_{n,p}$ は 1 対 1 対応する.

$$S \text{ 上の確率分布 } \{w_x\}_{x \in S} \text{ を } w_x = \begin{cases} w_i c_j & x = ((i, j)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ とする.}$$

確率 w_x で $c \in C$ に左から $x \in S$ をかけるとすれば, p 色版 Tsetlin library を表現できる.

L, supp は下のようになる.

$$\begin{array}{ccccc} \text{supp} : S & \rightarrow & S' & \rightarrow & L = 2^{[n]} \\ x = ((x_1, j_1), \dots, (x_l, j_l)) & \mapsto & \dot{x} = (x_1, \dots, x_l) & \mapsto & \{x_1, \dots, x_l\} \end{array}$$

$x = ((x_1, j_1), \dots, (x_k, j_k)) \in F_{n,p}$ とする. このとき, $X = \text{supp } x = \{x_1, \dots, x_k\}$ となる.

$xc = c$ を満たすチャンパー c は,

$$c = ((x_1, j_1), \dots, (x_k, j_k), \underbrace{\quad}_{\text{残りの } n-k \text{ 個は任意}})$$

の形で表される. $n-k$ 個の, 数の選び方及び係数の取り方が任意であるから, $c_X = (n-k)!p^{n-k} = (n-|X|)!p^{n-|X|}$.

定理 (Brown (2000)) [1] を適用すると, p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下のようにになる. ($X \subset [n]$)

$$\begin{aligned} \lambda_X &= \sum_{\text{supply} \leq X} w_y = \sum_{i \in X} \sum_{j=0}^{p-1} c_j w_i = \sum_{i \in X} w_i \\ m_X &= \sum_{Y \supseteq X} \mu(X, Y) c_Y = \sum_{Y \supseteq X} (-1)^{|Y|-|X|} (n-|Y|)! p^{n-|Y|} \end{aligned}$$

$\mu(X, Y) = (-1)^{|Y|-|X|}$, 対応する Y は $_{n-|X|}C_Z$ 通りあるから,

$$\begin{aligned} m_X &= \sum_{Z=0}^{n-|X|} (-1)^Z ({}_{n-|X|}C_Z) (n-Z-X)! p^{(n-Z-X)} \\ &= (n-|X|)! p^{n-|X|} \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z! p^Z} = D_{n-|X|, p} \end{aligned}$$

□

4 主定理 2

問題 7 (Tsetlin library の q 類似). $V = \mathbb{F}_q^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする*⁶. V 上の確率分布 $\{w_v\}_{v \in V}$ が与えられているとする. $A = (a_1, \dots, a_n)$ ($a_i \in V$, $a_1, \dots, a_n$ は一次独立) とする. A 全体の集合と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である*⁷.

$A = (a_1, \dots, a_n)$ に $b \in V$ を左からかけることを, 「 $a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j$, $d, c_j \in \mathbb{F}_q$ が成り立つ a_i を削除し, $A' = (b, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ にする」と定義する*⁸.

確率 w_b でベクトル b を選び, 上の操作を行う. この操作によって得られる $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library の q 類似**と呼ぶ.

Tsetlin library の q 類似の状態の変化の具体例

$$\begin{array}{c}
 w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{左に非 0 の}} \\
 \text{ベクトルをもってくる} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{既出の元の線形和で}} \\
 \text{表せるのを消す} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (q-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Tsetlin library の q 類似の固有値とその重複度は以下になることが分かった.

定理 8 (主定理 2 Tsetlin library の q 類似 の推移確率行列の固有値と重複度). Tsetlin library の q 類似の推移確率行列は, 重複度 m_X であるような固有値 λ_X を持ち, 次のように表される. 但し, $\langle 0 \rangle! = 1$, $\langle n \rangle! = q^{\binom{n}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$ ($n \geq 1$), $X = \text{span}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ ($0 \leq k \leq n$) である. *⁹.

$$\begin{aligned}
 \lambda_X &= \sum_{\text{supp } y \leq X} w_y = \sum_{v \in X} w_v \\
 m_X &= \langle n - \dim X \rangle! \sum_{j=0}^{n - \dim X} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}} q^{\dim X (n - \dim X - j)}}{\langle j \rangle!}
 \end{aligned}$$

証明. $V = \mathbb{F}_q^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. $F_n^q = \{(x_1, \dots, x_l) \mid x_i \in V, 0 \leq l \leq n\}$ とする. 但し, $(x_1, \dots, x_l)$ は一次独立とする. また, $l = 0$ のときは $F_{n,q}$ の単位元とし, e とかく. 演算 $*$ を次のように定義する.

$$(x_1, \dots, x_l) * (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m) \%$$

但し, $\%$ は「左の元の線形和で表せるならば, 削除する」という意味とする.

$$\text{例} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \% = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \because \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (q-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(F_n^q, *)$ は LRB である. $C = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ であり, C と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応する.

*⁶ $\mathbb{F}_q$ は, 位数 q の有限体

*⁷ $GL_n(E) :=$ 各元が E の元であるような $n \times n$ 行列における一般線形群 (正則行列全体の集合)

*⁸ このような a_i は一意に定まる.

*⁹ $\text{span}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} := v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ で張られる空間

S 上の確率分布 $\{w_x\}_{x \in S}$ を $w_x = \begin{cases} w_{v_i} & x = (v_i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする.

確率 w_x で $c \in C$ に左から $x \in S$ をかけるとすれば, Tsetlin library の q 類似を表現できる.

$$\begin{aligned} \text{supp} : S &\rightarrow L \subset 2^V \\ x = (x_1, \dots, x_l) &\mapsto \text{supp } x = X = \text{span}\{x_1, \dots, x_l\} \end{aligned}$$

$x = (v_1, \dots, v_l)$ とする. このとき, $X = \text{supp } x = \text{span}\{x_1, \dots, x_l\}$ となる. $xc = c$ を満たすチャンパー c は,

$$c = (v_1, \dots, v_l, \underbrace{}_{n-l \text{ 個の適当なベクトル}})$$

の形で表される. c_X は, 一本ずつ順番に本数を考えることによって求められる.

$$\begin{array}{lll} l+1 \text{ 本目} & X \text{ の元でない任意のベクトル} & q^n - q^l \text{ 通り} \\ l+2 \text{ 本目} & X \text{ の元及び } (l+1) \text{ 本目の線形和でない} & q^n - q^{l+1} \text{ 通り} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n \text{ 本目} & X \text{ の元及び } (l+1), \dots, (n-1) \text{ 本目の線形和でない} & q^n - q^{n-1} \text{ 通り} \end{array}$$

$$\therefore c_X = \prod_{j=l}^{n-1} (q^n - q^j)$$

$\dim Y = l + k$ ($0 \leq k \leq n - l$) かつ $Y \supset X$ を満たすような Y は, $[n-lC_k]_q$ 通りある^{*10}. よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-l} [n-lC_k]_q F_n(k+l) &= \sum_{k=0}^{n-l} \#\{Y \mid \dim Y = k+l \text{ かつ } X \subset Y\} F_n(k+l) \\ &= \sum_{X \leq Y} F_n(\dim Y) \end{aligned}$$

次の式が成り立つことが分かれば, $m_Y = F_n(\dim Y)$ は示せる.

Tsetlin library の q 類似の重複度を求めるための式

$$\sum_{k=0}^{n-l} [n-lC_k]_q F_n(k+l) = \begin{cases} \prod_{j=l}^{n-1} (q^n - q^j) & (0 \leq l \leq n-1) \\ 1 & (l = n) \end{cases}$$

右辺は, $\dim X = l$ としたときのチャンパーの数 c_X . 左辺は, $\dim Y = k + l$ としたときの $\sum_{Y \geq X} F_n(\dim Y)$. $c_X = \sum_{Y \geq X} m_Y$ より, $m_Y = F_n(\dim Y)$.

上の式を数学的帰納法で証明できる. □

参考文献

- [1] K. S. Brown, *Semigroups, rings, and Markov chains*, J. Theoret. Probab. **13** (2000), no. 3, 871–938, DOI 10.1023/A:1007822931408.
- [2] W. Y. C. Chen and G.-C. Rota, *q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position*, Discrete Math. **104** (1992), no. 1, 7–22, DOI 10.1016/0012-365X(92)90622-M.

^{*10}

$$[nC_k]_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!}, \quad [n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q, \quad [0]_q = 0, [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$$