

The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series

名古屋大学・多元数理科学研究科

市原 由美子 (Yumiko Iduhara)

§1 Introduction

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正規化された Hecke eigen cusp form $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ ($a_n \in \mathbb{R}$) に対して, Rankin [6] は

$$\sum_{n \leq x} a_n^2 = \alpha x^k + O(x^{k-\frac{2}{5}}) \quad (1)$$

を与えた。ここで α は Petersson 内積 (f, f) の定数倍である。

また、 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正規化された Hecke eigen cusp form $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}$ ($b_n \in \mathbb{R}$) と、primitive な mod d の Dirichlet 指標 χ について

$$\sum_{n \leq x} a_n b_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5} + \varepsilon} \quad (2)$$

も示す。(著者 [3] 参照)

これらの結果は Rankin-Selberg L -関数と呼ばれる L -関数を調べることによって得られたものである。ここでは、

Rankin-Selberg L -関数を次のように定義する。

$$L_{f \otimes g}(s, \chi) = L(2s, \chi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n \chi(n)}{n^{s + \frac{k+2}{2}} - 1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

ここで χ は mod d の Dirichlet 指標、 L は Dirichlet L -関数とする。

Rankin-Selberg L -関数は s -平面全体に解析接続され、
 $f=g$ かつ $d=1$ の時には $s=1$ で 1 位の極をもつ他は正則とな、
 る。また、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ には ζ Euler 積表示も持、る。
 さて、 $L_{f \otimes g}(s, \chi)$ は次のようにも書ける。

$$L_{f \otimes g}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \chi(n)}{n^s}$$

$$C_n = n^{1-\frac{k+l}{2}} \sum_{m_1^2 m_2 = n} a_{\frac{n}{m_1}} b_{\frac{n}{m_2}} m_1^{k+l-2}$$

よ、て、 C_n について a の情報から cusp form の Fourier 係数の
 情報を導ける。例えば、 C_n の Riesz mean (χ は primitive とする)

$$D_p(x) = \Gamma(p+1)^{-1} \sum_{n \leq x} C_n \chi(n) (x-n)^p, \quad (p \in \mathbb{R})$$

を考えると、Hafner [2] の理論より $D_p(x)$ は Voronoi-formula によ
 るえられ、それを調べることは、て、 $f=g$, $d=1$ の時

$$\sum_{n \leq x} C_n = \frac{\pi^2}{6} k d x + O(x^{\frac{3}{5}}) \quad (3)$$

や、 $f \neq g$ 又は $d \neq 1$ の時

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon} \quad (4)$$

が成る。これら $(1), (2)$ の本質とな、る。 ($k d$ は
 $L_{f \otimes f}(s)$ の $s=1$ における留数である)

$L_{f \otimes g}(s, \chi)$ は χ が primitive の時は関数等式を持ち解析的に
 扱、やす、今後、様々なことを調、られる期待が、できる。

今回は、次の和について調、べた結果を紹介する。

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p}}} C_n$$

ここに、 p は素数で $(a, p) = 1$ とする。 $k \geq 1$ は自然数。

この和を調べる前に、まず C_n について命じ、これに述べたおく。まず Deligne による a_n, b_n の評価から C_n は $C_n \ll n^\varepsilon$ が命じられる。また更に、 $\sum_{x^\varepsilon < y \leq x} |C_n| \ll y$, $(x^\varepsilon < y \leq x)$ も Ivic-Matsumoto-Tanigawa [4] や 著者 [3] により得られてゐる。

実は $p \geq x^{\frac{1}{4}}$ という条件のもとでは $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p}}} C_n \ll x^{\frac{3}{5} + \varepsilon} p^{\frac{2}{5}}$ は可なり命じられ、 $(\sum_{0 \leq n \leq x} |C_n| \ll x$ を利用)、 $p \leq x^{\frac{1}{4}}$ に関しては次の積分表示

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\varepsilon-iT}^{t+\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} L_{f \otimes g}(s, \chi) ds + O(x^{t+\varepsilon} T^{-1} + x^\varepsilon)$$

をもとに、 φ は Euler 関数、 χ_0 は mod p の principal character と

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p}}} C_n &= \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n) \\ &+ \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{\chi \pmod{p} \\ \chi \neq \chi_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{t+\varepsilon-iT}^{t+\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} L_{f \otimes g}(s, \chi) ds \\ &+ O(x^{t+\varepsilon} T^{-1} + x^\varepsilon) \end{aligned} \quad (5)$$

を調べることに

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p}}} C_n &= \delta_{f,g} \frac{1}{\varphi(p)} \frac{\pi^2}{6} k \alpha (1 - \alpha_p^2 p^{-k}) (1 - \bar{\alpha}_p^2 p^{-k}) (1 - p^{-1})^2 x \\ &+ O(x^{\frac{3}{5} + \varepsilon} p^{\frac{2}{5}}) \end{aligned} \quad (6)$$

を得ることにできる。ここで $\delta_{f,g} = \begin{cases} 1 & f=g \\ 0 & f \neq g \end{cases}$ であり、

α_p は $L_{f \otimes g}(s, \chi)$ の Euler 積表示に現れる f と p に依る数で、

$\alpha_p + \bar{\alpha}_p = a_p$, $|\alpha_p| = p^{\frac{k-1}{2}}$ を満たす複素数である。

(5) から (6) を得る方法は、ここには詳しく述べないが、

reflection principle と呼ばれる方法で、

$$L_{\text{fag}}(s, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^2\right) \frac{C_n X^{(n)}}{n^2} \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{u=-\delta-\varepsilon \\ |w| \leq \frac{T_0}{2}}} F(s, w) L_{\text{fag}}(1-s-w, \bar{X}) \frac{dw}{w} \\ + O(\exp(-CT_0))$$

$$F(s, w) = C_X Y^w \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{-2+q(s+w)} \frac{\Gamma(1+\frac{w}{2}) \Gamma(1+\frac{k-l}{2}-s-w) \Gamma(\frac{k+l}{2}-s-w)}{\Gamma(s+w+\frac{k-l}{2}) \Gamma(s+w+\frac{k+l}{2}-1)}$$

($s = \sigma + it$, $w = u + iv$, C : 定数 > 0 , C_X : (7) 参照)

を用いて

$$\frac{1}{\text{ccp}} \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi \neq \chi_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} + iT_0}^{\frac{1}{2} + 2iT_0} \frac{\chi^s}{s} L_{\text{fag}}(s, X) ds$$

を評価し、一部で指標 χ 和に $\|2$ Cauchy-Schwarz の不等式

を用いて mean value の理論を用いることで得られる。

(詳しくは著者 [3] 参照)

さて、(6) は $p \leq x^{\frac{1}{2}}$ という強い条件と mean value の助けを借りて導ける結果である。 L^p 、 $D_p(x)$ の Voronoï-formula と

$L_{\text{fag}}(s, X)$ の関数方程式 (= 2 $k > l$ とする)

$$\Phi_{\text{fag}}(s, X) := \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-2s} \Gamma(s - \frac{k-l}{2}) \Gamma(s + \frac{k+l}{2} - 1) L_{\text{fag}}(s, X)$$

$$\Phi_{\text{fag}}(s, X) = C_X \Phi_{\text{fag}}(1-s, \bar{X}) \quad (7)$$

に現れる C_X の具体的な形を利用することで、より弱い条件、

$p^2 \leq x^3$ のもとでより詳しい結果を導くことができた。

Theorem

p は奇素数とする。 $(a, p) = 1$ に対する 2 次多項式 C_n を考える。 ($n \in \mathbb{N}$)

$$(i) \quad p^{3r} \geq x^2 \text{ のとき} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p^r}}} C_n = O(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r})$$

$$(ii) \quad p^{3r} \leq x^2 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{p^r}}} C_n &= \frac{\delta_{a,0}}{ce(p^r)} \frac{\pi^2}{6} k d (1 - \alpha_p^2 p^{-k}) (1 - \bar{\alpha}_p^2 p^{-k}) (1 - p^{-1})^2 x \\ &\quad + \frac{1}{ce(p^r)} \sum_{\substack{\chi \bmod p^r \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{\text{fsg}}(0, \tilde{\chi}) \\ &\quad + O(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\epsilon} p^{\frac{3}{5}r + 4\epsilon}) \end{aligned}$$

$\tilde{\chi}$ は χ の導く primitive character。また、 $k=l$, $\tilde{\chi} \neq \chi_0$ 。

ただし、 $L_{\text{fsg}}(0, \tilde{\chi}) = 0$ に注意。

この Theorem は p が奇素数のとき C_n がガウス和の 4 乗で書けることを用いることにより得られた結果である。よって $p=2$ のときは (6) より詳しい結果は得られない。

§2 Proof of Theorem

証明のポイントとは §1 の最後に書いたように C_n の具体的な形である。Li [5] によれば、2 次多項式 C_n は

Fact $p \geq 2$ は素数とする。 $r \geq 1$ は自然数として、

$\bmod p^r$ の primitive character χ を取る。

このとき、 χ が non-real character ならば、

$C_X = W(X)^4/p^{2h}$ であり、real character であり
 は $C_X = 1$ である。 $\Rightarrow$ $W(X)$ は ガウス和。

この事実から、次の Lemma が導ける。

Lemma

p は奇素数とする。 b は $(b, p) = 1$ なる整数とする。
 この時 $\sum'_{X \bmod p^h} C_X \chi(b^{-1}) \ll \varphi(p) p^{-\frac{h}{2}}$ が成り立つ。

これは C_X が ガウス和の 4 乗で書ける時、指標和とすると
 これにより hyper Kloosterman 和が現れ、Deligne や Weinsten
 の non-trivial な hyper Kloosterman 和の評価 (Deligne [1],
 Weinsten [7]) を用いることで Lemma の証明ができる。
 この Lemma が Theorem の証明の key となる。

次に $D_p(x)$ の Voronoi'-formula を考える。 Voronoi'-formula
 の収束性を加味し、 $p=2$ の時を扱う。(次の Voronoi'-formula は
 $p > \frac{3}{2}$ において絶対収束している)

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)} \sum_{n \leq x} C_n \chi(n) (x-n)^p = Q_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_X C_n \overline{\chi(n)} \left(\frac{2\pi}{d}\right)}{\left(n \frac{16\pi^4}{d^4}\right)^{p+1}} f_p\left(\frac{16\pi^4 x n}{d^4}\right)$$

ここで $Q_p(x)$, $f_p(x)$ の定義を述べる $p=2$ は特別なで、
 省略するが、どちらも良い性質を持つ具体的な関数である。

この両辺に $\chi(a^{-1})$ をかけ、 $\sum'_{X \bmod p^h, X \neq X_0}$ とすると Lemma の
 評価が効いて、差分作用素を用いて $D_2(x)$ から $D_0(x)$ の情報

ととり出すと $p^3 \leq x^2$ となる。

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(p)}} C_n = \frac{1}{\phi(p)} \sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n) + \frac{1}{\phi(p)} \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f \otimes g}(0, \chi) \\ + O\left(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}} + x^{-\varepsilon} p^{\frac{3}{2} + 4\varepsilon}\right) \quad (8)$$

が得られる。同様の方法で

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(p^r)}} C_n - \frac{1}{p} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(p^{r-1})}} C_n = \frac{1}{\phi(p^r)} \sum_{\substack{\chi \bmod p^r \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f \otimes g}(0, \tilde{\chi}) \\ + O\left(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\varepsilon} p^{\frac{3}{2}r + 4\varepsilon}\right) \quad (9)$$

が得られる。

(8), (9) より帰納法で次が成り立つ。

Proposition 1

p は奇素数 とし、 $p^{3r} \leq x^2$, $r \in \mathbb{N}$ の時

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a(p^r)}} C_n = \frac{1}{\phi(p^r)} \sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n) \\ + \frac{1}{\phi(p^r)} \sum_{\substack{\chi \bmod p^r \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(a^{-1}) L_{f \otimes g}(0, \tilde{\chi}) \\ + O\left(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}r} + x^{-\varepsilon} p^{\frac{3}{2}r + 4\varepsilon}\right)$$

が成り立つ。

更に同様の方法で次も分かる。

Proposition 2

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n) = \delta_{f,g} \frac{\pi^2}{6} k \alpha (1 - \alpha_p^2 p^{-k}) (1 - \bar{\alpha}_p^2 p^{-k}) (1 - p^{-1})^2 x \\ + O\left(x^{\frac{3}{5}} p^{\frac{4}{5}}\right)$$

が成り立つ。こゝで χ_0 は $\bmod p$ (≥ 2 なる素数) の principal character.

この 2 つの Proposition から Theorem 1 を証明される。

§3 Remark

また、Theorem 2 (6) のように C_n の和に 2 個の
方法で 2 つを紹介した。1 つは Voronoï-formula を利用する方法
であり、1 つは reflection principle と呼ばれる方法である。
実は reflection principle を用いると次を示せる。

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n) = \delta_{f,g} \frac{\pi^2}{6} k \alpha (1 - \alpha_p^2 p^k) (1 - \overline{\alpha_p}^2 p^k) (1 - p^{-1})^2 x \\ + O(x^{\frac{3}{5} + \varepsilon} p^\varepsilon) \quad (10)$$

これは error にはある p からは Proposition 5 より良いものがある。
しかし、 x の中 α は p と関係ないことと、実際 Theorem 2 を導く
上では $\varphi(p)^{-1} \sum_{n \leq x} C_n \chi_0(n)$ を調べるので Proposition 2 の $p^{\frac{4}{5}}$ という
評価でも問題はないことから (10) よりも Proposition 2 を採用
した。

また reflection principle 2 (4) を考えれば

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5} + \varepsilon} p^{\frac{4}{5}}$$

($\Rightarrow$ χ は mod d の primitive character)

が導ける。

References

- [1] P. Deligne, Cohomologie Etale (SGA4 $\frac{1}{2}$), Springer Lecture Notes 569 (1977).
- [2] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions, Lec. Notes in Math. 899 (1981) 148-165.
- [3] Y. Ichihara, The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series, and II, preprints.
- [4] A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On Riesz mean for the coefficients of Rankin-Selberg series, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 127 (1999) 117-131.
- [5] W. Li, L-Series of Rankin-type and their functional equations, Math Ann. 244 (1979) 135-166.
- [6] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetic functions I and II, Proc. Cam. Phil. Soc. 35 (1939) 351-356.
- [7] L. Weinstein, The hyper-Kloosterman sum, Enseignement Math. (2) 27 (1981) 29-40.