

ソリトンと線織面

日大理工物理 紺野 公明 (Kimiaki Konno)

日大理工物理 今井 宏治 (Koji Imai)

敦賀女子短大 角島 浩 (Hiroshi Kakuhata)

1 はじめに

可積分方程式と微分幾何とは深い関わりがある. 例えば Bäcklund 変換, 渦方程式と曲線論, 等々.[1][2][3][4] この報告では我々が見いだした非線型非分散可積分方程式 [5]:

$$\begin{aligned}q_{ut} + (rs)_u &= 0, \\r_{ut} - 2q_u r &= 0, \\s_{ut} - 2q_u s &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

が時間と共に発展する線織面と結びつくことを示す.

線織面を定義するためにパラメータ v を導入する. 線織面は2つのパラメータ (1) の u と v で特徴付けられ, パラメータ t により時間発展する. 我々の線織面は一般には複素空間で定義されている. ここでは主に $r = s$ の場合を扱うので三次元ユークリッド空間 E^3 で考える.

2 線織面

X を位置 P での位置ベクトルし e_1, e_2, e_3 をそれに付随した互いに直行する三つの単位ベクトルとする. $\{X, e_1, e_2, e_3\}$ は位置 P での動座標系を表す. 二つの系を考える:

$$\begin{aligned} X_u &= -\gamma q_u e_1 + \frac{\gamma}{2} (r_u + s_u) e_3, \\ e_{1u} &= 2\lambda q_u e_2 + i\lambda (r_u - s_u) e_3, \\ e_{2u} &= -2\lambda q_u e_1 + \lambda (r_u + s_u) e_3, \\ e_{3u} &= -i\lambda (r_u - s_u) e_1 - \lambda (r_u + s_u) e_2, \end{aligned} \quad (2)$$

と

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\gamma}{2\lambda^2} e_1 - i\frac{\gamma}{2\lambda} (r - s) e_3, \\ e_{1t} &= -\frac{1}{\lambda} e_2 + (r + s) e_3, \\ e_{2t} &= \frac{1}{\lambda} e_1 - i(r - s) e_3, \\ e_{3t} &= -(r + s) e_1 + i(r - s) e_2. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで γ と λ は任意複素常数である. r と s は複素関数であるから複素空間で定義されている. (2) と (3) の両立条件から (1) が得られる.

直線を以下のように定義する:

$$Y(u, v, t) = X(u, t) + v e_1(u, t). \quad (4)$$

ここで, $-\infty < v < \infty$. この直線が曲線 $X(u)$ の軌道に沿って動くとき線織面を作る. その線織面は u と v で特徴づけられる. 直線 Y は母線と呼ばれる. X と e_i は (3) に従って時間発展するので線織面も時間と共に変化する.

3 $r = s$ での線織面

実数 λ での $r = s$ に対する E^3 での線織面を考える.

(4) から

$$dY = (-q_u e_1 + 2\lambda v q_u e_2 + r_u e_3) du + e_1 dv. \quad (5)$$

線織面での接平面を定義するため直行する二つの単位ベクトル (e_1^* , e_2^*)

$$\begin{aligned} e_1^* &= e_1, \\ e_2^* &= \frac{2\lambda v q_u e_2 + r_u e_3}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

と接平面に垂直な単位ベクトル e_3^*

$$e_3^* = \frac{-r_u e_2 + 2\lambda v q_u e_3}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2}}, \quad (7)$$

を導入する.

曲面の微分形式を

$$\begin{aligned} dy &= \omega_1 e_1^* + \omega_2 e_2^*, \\ de_1^* &= \omega_{12} e_2^* + \omega_{13} e_3^*, \\ de_2^* &= -\omega_{12} e_1^* + \omega_{23} e_3^*, \\ de_3^* &= -\omega_{13} e_1^* - \omega_{23} e_2^*, \end{aligned} \quad (8)$$

で定義すると

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -q_u du + dv, \\ \omega_2 &= ((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2} du, \\ \omega_{12} &= \frac{4\lambda^2 v q_u^2 du}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2}}, \\ \omega_{13} &= -\frac{2\lambda q_u r_u du}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2}}, \\ \omega_{23} &= \frac{[2\lambda v(q_u r_{uu} - q_{uu} r_u) + 2\lambda r_u((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)] du - 2\lambda q_u r_u dv}{(2\lambda v q_u)^2 + r_u^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる.

ω_{13} と ω_{23} は ω_1 と ω_2 の線形結合として

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + a\omega_2, \end{aligned} \quad (10)$$

と表されるので

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= -\frac{2\lambda q_u r_u}{(2\lambda v q_u)^2 + r_u^2}, \\ c &= \frac{[2\lambda v(q_u r_{uu} - q_{uu} r_u) + 2\lambda r_u((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2 - q_u^2)]}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。ここで a, b, c は第2基本微分形式の成分である。第1, 第2基本形式は

$$dY^2 = [(1 + 4\lambda^2 v^2)q_u^2 + r_u^2] du^2 - 2q_u du dv + dv^2, \quad (12)$$

と

$$\omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = \frac{-2\lambda du \{[-v(q_{uu} r_u - q_u r_{uu}) + r_u((2\lambda v q_u)^2 + q_u^2 + r_u^2)] du - 2q_u r_u dv\}}{((2\lambda v q_u)^2 + r_u^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

でそれぞれ与えられる。

線織面の Gauss 全曲率と平均曲率は

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_1 R_2} = ac - b^2, \\ 2H &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = a + c, \end{aligned} \quad (14)$$

で与えられる。 R_1 と R_2 は主半径である。 $a = 0$ であるから K は恒に負の値を取ることが分かる。また Gauss-Codazzi 方程式

$$\begin{aligned} d\omega_{12} + \omega_{13} \wedge \omega_{23} &= 0, \\ d\omega_{13} - \omega_{12} \wedge \omega_{23} &= 0, \\ d\omega_{23} + \omega_{12} \wedge \omega_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

は自動的に満たされていることも分かる。

(13) から曲面の主接線曲線は

$$\begin{aligned} du &= 0, \\ [r_u((2\lambda v q_u)^2 + q_u^2 + r_u^2) - v(q_{uu} r_u - q_u r_{uu})] du - 2q_u r_u dv &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。初めの曲線は母線を表し、第2の曲線は次の Riccati 型方程式で記述される:

$$2q_u r_u \frac{dv}{du} = 4\lambda^2 q_u^2 r_u v^2 - (q_{uu} r_u - q_u r_{uu})v + r_u (\dot{q}_u^2 + r_u^2). \quad (17)$$

ソリトン解 [6]

$$\begin{aligned} q_u &= 1 - 2 \operatorname{sech}^2(2\lambda u + \frac{t}{\lambda}), \\ r &= -\frac{1}{\lambda} \operatorname{sech}(2\lambda u + \frac{t}{\lambda}), \end{aligned} \quad (18)$$

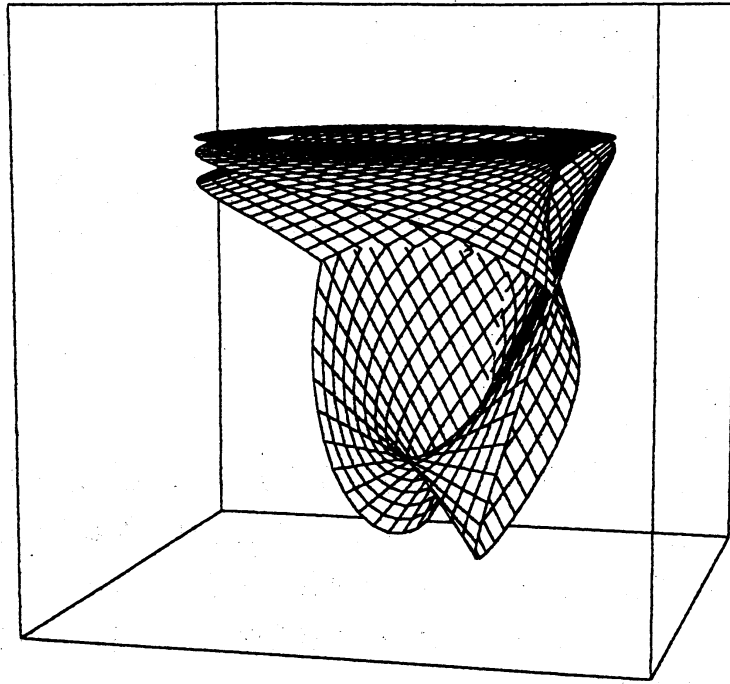
を用いて (2) と (3) を $\gamma = 1$ として解くと

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} -\tanh \phi \sin \theta \\ \tanh \phi \cos \theta \\ -\operatorname{sech} \phi \end{pmatrix}, \\ e_1 &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sech} \phi \sin \theta + \tanh \phi \cos \theta \\ \operatorname{sech} \phi \cos \theta + \tanh \phi \sin \theta \\ \operatorname{sech} \phi \tanh \phi \end{pmatrix}, \\ e_2 &= \begin{pmatrix} -\tanh \phi \sin \theta \\ \tanh \phi \cos \theta \\ -\operatorname{sech} \phi \end{pmatrix}, \\ e_3 &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sech} \phi \tanh \phi \sin \theta - \operatorname{sech} \phi \cos \theta \\ \operatorname{sech} \phi \tanh \phi \cos \theta - \operatorname{sech} \phi \sin \theta \\ 1 - \operatorname{sech}^2 \phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda u + \frac{t}{\lambda}, \\ \theta &= 2\lambda u - \frac{t}{\lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$

ϕ と θ の時間依存性の違いに注目したい。また $\phi = 0$ は曲線 X の固定点である、即ち $(0, 0, 1/\lambda)$ 。 $\lambda = 1$ に対する線織面を図 1 に示す。

Figure 1: $\lambda = 1$ に対する線織面

4 逆問題

$$\rho = \frac{e_1 + i e_2}{1 - e_3}, \quad (21)$$

を導入する. e_1, e_2 と e_3 は (e_1, e_2, e_3) の一つの成分である.[7] (2) と (3) から ρ は Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \rho_u &= -2i\lambda q_u \rho + i\lambda s_u \rho^2 - i\lambda r_u, \\ \rho_t &= \frac{i}{\lambda} \rho - s \rho^2 - r, \end{aligned} \quad (22)$$

に従う.

$$\rho = \frac{v_1}{v_2}, \quad (23)$$

を用いて線形化すると (1) の逆散乱形式 [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= -i\lambda \begin{pmatrix} q_x & r_x \\ s_x & -q_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -r \\ s & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる.

5 おわりに

動座標系 $\{X, e_1, e_2, e_3\}$ を導入して (1) の別な表現 (2) と (3) の組みを得た. それから逆散乱形式 (24) を得た. (2) を用いて u と v で表される線織面を求めた. その線織面は (3) に従って時間発展する. $r = s$ の場合線織面を詳しく調べた. Gauss 曲率は恒に負であることが分かり, ソリトン解に対する線織面を求めた. 可積分方程式, 動座標系, 線織面と逆問題の間の関係が示された.

この報告の一般化として位置ベクトルと母線の方角ベクトル d を係数 γ_i と δ_i を用いて

$$\begin{aligned} X &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3, \\ d &= \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3, \end{aligned} \quad (25)$$

と取ると係数を選ぶことで色々な線織面を作ることができる. 例えば, $K = 0$ の可展面, 少なくとも一つの主半径 $R = 0$, を作ることができる. また線織面上での可積分方程式の解の振る舞いなど調べることもできる. これらは将来の課題である.

References

- [1] L. Eisenhart, A treatise of the differential geometry of curves and surfaces (Ginn and Company, Boston, 1909)

- [2] A. Sym, Geometrical aspect of the Einstein equations and integrable systems, in Lecture note in physics, ed. M. Martini Vol.239 (Springer, Berlin, 1985) p.154.
- [3] H. Hasimoto, J. Phys. Soc. Japan **31** (1971) 293.
- [4] R. Ricca, Nature **352** (1991) 561.
- [5] K.Konno and H.Kakuhata, J. Phys. Soc. Japan **64** (1995) 2707.
- [6] K.Konno and H.Oono, J. Phys. Soc. Japan **63** (1994) 377.
- [7] G.L.Lamb, Jr, J. Math. Phys. **18** (1977) 1654.