

非可換空間上の流体力学

河村哲也 (Tetuya Kawamura)¹, 桑名杏奈 (Anna Kuwana)²,
齋藤麻由美 (Mayumi Saitou)¹, 菅本晶夫 (Akio Sugamoto)^{1,3},
永田裕作 (Yusaku Nagata)¹

¹ お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科
Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University

² 群馬大学大学院 理工学府
Graduate School of Sciences and Technology, Gunma University

³ 放送大学 東京文京学習センター
Tokyo Bunkyo Study Center, The Open University of Japan

1 はじめに

素粒子論において、ストリング理論やブレーンの理論は、重力を含む発散のない理論として統一理論の有力候補とされている。ブレーン理論では、作用関数の中に南部括弧を含む場合がある。南部括弧とはポアソン括弧の一般化として提案されたもので、 n 個の力学変数から成る理論を扱う [1]。3 個以上の力学変数で構成される力学系は「南部のダイナミクス」とも呼ばれる。ブレーンの作用は世界体積に比例するため、ブレーン理論を考えるとときに南部のダイナミクスを用いることは自然である。しかしながら量子化を行った際にヤコビの恒等式に抵触するという理由から、南部括弧の完全な定式化は未だ為されていない。この事情から、南部括弧の性質を調べる研究は今尚進められている。

一方、南部博士の晩年の仕事に流体力学の新しい定式化を行う試みがある [2]。これは 2 次元非圧縮性流体の理論と、位相空間における理論を Area Preserving Diffeomorphism の観点から結びつけた理論である。この理論では、2 次元非圧縮性流体の運動方程式をポアソン括弧で書き直し、流れ関数をハミルトニアンと見立て、流体力学の再考を行っている。特に、“量子化”にまで言及しているところが新しい点である。この流体力学の新しい見方を、ここでは「南部風流体力学」と呼ぶことにする。同手続きを 3 次元非圧縮性流体へ適用すると、ポアソン括弧の代わりに南部括弧を用いた理論が展開される。

本研究では、南部風流体力学をさらに発展させモヤル (Moyal) 括弧を導入するこ

とで、非可換空間上の流体力学を考えた．さらに量子力学との類推から、そのダイナミクスが「最小サイズ」をもつ流体の流れとして粉流体の流れに相当しているという予想の下、数値シミュレーション解析を行った．今回は2次元流体についての数値シミュレーション結果を報告する．

2 非可換空間上の流体の運動方程式

非可換空間上での非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式は次のように書ける[4]．すなわち、 n を流体の空間次元数として、補正項を $\vec{K}_n$ と表記すると、

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p - \eta \Delta \vec{v} = \vec{K}_n$$

$$\vec{K}_2 = \rho \frac{(\theta_2)^2}{24} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial z^1} \right)^3 \vec{v}(y^1, y^2) \varphi(z^1, z^2) \right]_{y, z \rightarrow x} + O((\theta_2)^4) \quad (1)$$

$$\vec{K}_3 = \rho (\theta_3)^2 \left(\frac{\epsilon_{abc}}{3!} \frac{\partial}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial z^b} \frac{\partial}{\partial u^c} \right)^3 \vec{v}(y) \varphi(z) \chi(u) \Big|_{y, z, u \rightarrow x} + O((\theta_3)^4) \quad (2)$$

ここで、非可換パラメーター θ_2 の次元は面積、 θ_3 の次元は体積となっている．以下では、非可換空間上の流体の運動方程式について、その導出を説明する．

非相対論的な2次元非圧縮性流体を考える．流体粒子の初期時刻の位置を ξ, η 、時刻 t での位置を $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ とすると、ラグランジュ描像での連続の式は次で書かれる．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 1 \quad (3)$$

いま、式(3)のヤコビアンを次のポアソン括弧で書くこととする．下付き添字は適宜省略される．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \{x, y\}_{\xi, \eta} \quad (4)$$

式(3)は両辺の時間微分を計算すると $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ に帰着する．ここで、この連続の式を満たすように関数 $\varphi = \varphi(x, y; t)$ を導入し、次のように定義する．

$$v_x \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_y \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

時間微分をドットを付けて書き表すこととし、ポアソン括弧を用いると、次のようにも表せる．

$$\dot{x} = \{x, \varphi\}, \quad \dot{y} = \{y, \varphi\}$$

これより、2次元非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p - \eta \Delta \vec{v} = 0$$

は、括弧式を用いて次のように書き表せる.

$$\rho \left(\{x_i, \dot{\varphi}\} + \{\{x_i, \varphi\}, \varphi\} \right) + \epsilon^{ij} \{p, x_j\} - \eta \sum_j^2 \{x_j, \{x_j, \{x_i, \varphi\}\}\} = 0 \quad (5)$$

ここで、 $i = 1, 2$ とし、 ϵ^{ij} はレヴィ・チビタテンソルとする.

続いて、式 (5) に含まれるポアソン括弧を、次のようにモヤル括弧に置き換えることを考える.

$$\{A, B\}_P \longrightarrow \frac{1}{i\theta} [A, B]_M \quad (6)$$

モヤル括弧とは、スター積による交換関係で

$$[A(x_1, x_2), B(x_1, x_2)]_M \equiv \sum_{A, B} \epsilon_{AB} A(x_1, x_2) * B(x_1, x_2) \quad (7)$$

と定義される [3]. また、スター積の定義は次である.

$$A(x_1, x_2) * B(x_1, x_2) \equiv \exp \left(\frac{i\theta}{2!} \epsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial z^b} \right) A(y_1, y_2) B(z_1, z_2) \Big|_{y, z \rightarrow x} \quad (8)$$

ここで θ は非可換量 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ の間の交換関係 $\hat{x}_1 \hat{x}_2 - \hat{x}_2 \hat{x}_1 = i\theta$ で定義される任意定数である. $\hat{x}_1 = \hat{x}, \hat{x}_2 = \hat{p}, \theta = \hbar$ の場合に、ポアソン括弧をモヤル括弧に置き換えることは、量子力学での量子化に相当する. 本研究では $\hat{x}_1 = \hat{x}, \hat{x}_2 = \hat{y}, \theta = \theta_2$ を扱っているので、非可換になる量は x と y である.

実際に、式 (5) に式 (6) の置き換えを施し、モヤル積の定義から式を整えると、非可換空間上の流体の方程式 (1) を得ることが出来る. 3次元流体の場合には、ポアソン括弧の代わりに南部括弧を用いてヤコビアンを表し、スター積の自然な拡張として3項間の演算を定義することで式 (2) を導出している.

3 計算方法と結果

非可換空間上の流体の運動方程式を数値シミュレーションによって調べた. 数値解析で扱う式は、式 (1) の近似として次とした. $|\theta_2| \ll 1$ として θ_2 の高次の項による効果は小さいものとし、 θ_2 の2次までを扱うこととした. また、補正項 $\vec{K}_2$ は速度場

表記で次式とした.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p - \eta \Delta \vec{v} = \vec{K}_2$$

$$\{K_2\}_i = \rho \frac{(\theta_2)^2}{24} \left\{ \frac{\partial^3 v_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial^3 v_i}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^3 v_i}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 v_i}{\partial y^3} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right\}$$
(9)

式 (9) について、フラクショナルステップ法で数値解析を行うことを考える.

ここで、量子力学の不確定性関係 $\sqrt{(\Delta q)^2} \sqrt{(\Delta p)^2} \geq \frac{\hbar}{2}$ との類推から、補正項を含む流体の方程式は「最小サイズ θ_2 をもつ」流れの特徴を表すと予想した. そこで、流体の最小サイズの効果を見るために、次のような数値解析を行った. 大小 2 つのスリットを設けた 2 次元の水路 (図 1) の下で、非可換パラメーター θ_2 の値を変えながら、流れの違いを比較した.



図 1 計算に使用したグリッド. 縦 21.2 [cm], 横 64 [cm] の 2 次元水路で、左端から 15 [cm] の位置にブロック (縦 11.2 [cm], 横 4 [cm]) が置かれている. ブロックによって、流れが 2 つに分岐する. スリット幅は 2 [cm] と 8 [cm] とした. 不等間隔直交格子を用いており、ブロックの周辺で格子幅を細かく取っている. 最小格子幅は $\frac{1}{6}$ [cm] とした.

水路の左側から流体がポアズイユ流として流入し、右側へ自由流出する. 時間刻み幅を $\Delta t = 0.01$ [s] とし 2000 秒相当 (2000000 ステップ) 計算を行った. レイノルズ数を 700 としたとき、 θ_2 の大きさは $\theta_2 = (2.6)^2$ [mm²] までシミュレーションを行うことが出来た.

次のグラフは、各スリットにおける流出量の時間推移を示している. 図 2 は通常の流体の場合、図 5 は $\sqrt{\theta_2} = 0.26$ [cm] とした場合の結果である. また右側のスナップショットは、特定の瞬間の渦度の様子である.

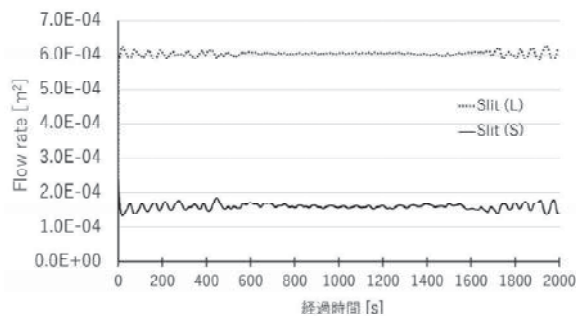


図2 通常の流体の場合 ($\sqrt{\theta_2} = 0$ [cm]). 破線は8 [cm]のスリットにおける流出量、実線は2 [cm]のスリットにおける流出量の時間推移を表している。

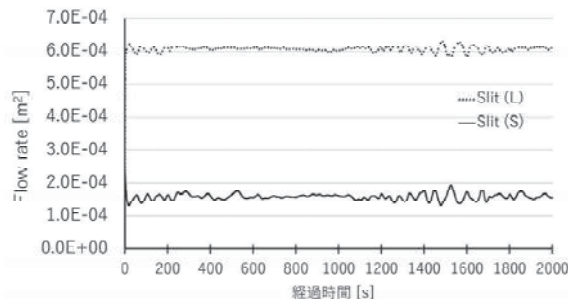


図5 $\sqrt{\theta_2} = 2.6$ [cm]とした場合。破線は8 [cm]のスリットにおける流出量、実線は2 [cm]のスリットにおける流出量の時間推移を表している。

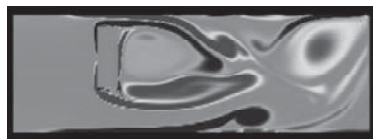


図3 530秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0$)

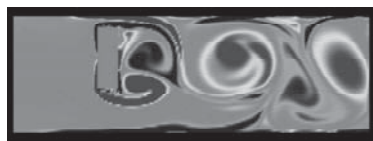


図4 2000秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0$)



図6 530秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0.26$)

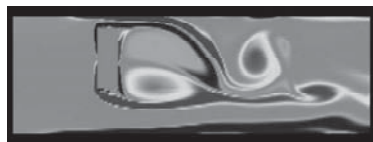


図7 2000秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0.26$)

通常の流体 ($\sqrt{\theta_2} = 0$ [cm]) の数値シミュレーション結果は、初期時刻では上のスリットから放出される時計回りの渦と、下のスリットから放出される反時計回りの渦の大きさに偏りがあったが、700秒以降にはブロックの後方で双子渦が生じた。しかし、1400秒頃に双子渦は剥がれ、再び各スリットから渦放出が行われるようになった。一方、 $\sqrt{\theta_2} = 2.6$ [cm]とした解析では、300秒過ぎからブロックの後方に双子渦が形成されて留まったが、900秒後に渦は崩れた。そして1700秒付近で再び双子渦が形成された。また、図2、図5を見ると、流出量の揺らぎの振幅が大きい状態と小さい状態があることが分かる。ブロック後方の渦の振る舞いは、各スリットにおける流出量に影響を与えていると考えられる。

表 1 に、各スリットにおける流出量の時間平均値を示す．初期状態から自然な流れ場が出来るまでの時間を考慮し、データは 500 秒から 2000 秒までの間の値を使用した．また、流出量には揺らぎの振幅が大きい状態と小さい状態があり、それぞれ渦放出がある場合と双子渦が形成された状態であった．よって、流れの状態別の流出量平均を、幅 2 [cm] のスリットの場合で求めた．

表 1 図 1 のグリッドでの、幅 8 [cm] のスリット (L) と 2 [cm] のスリット (S) における平均流出量．

$\sqrt{\theta}$ [cm]	平均流出量 [cm ²]		状態別の平均出流量 [cm ²]	
	L	S	渦放出 (S)	双子渦 (S)
0	6.054	1.607	1.589	1.615
0.26	6.067	1.586	1.577	1.604

続いて、ブロックの先端を半円にして滑らかに取った場合の数値計算を行った [5]．この場合には計算可能な θ_2 の範囲が広がり $\theta_2 = (2.9)^2$ [mm²] まで調べることが出来た．レイノルズ数は 700、水路の左側から流体をポアズイユ流として流入させて、右側で自由流出とした．時間刻み幅を $\Delta t = 0.01$ [s] とし 2000 秒相当 (2000000 ステップ) 計算を行った．

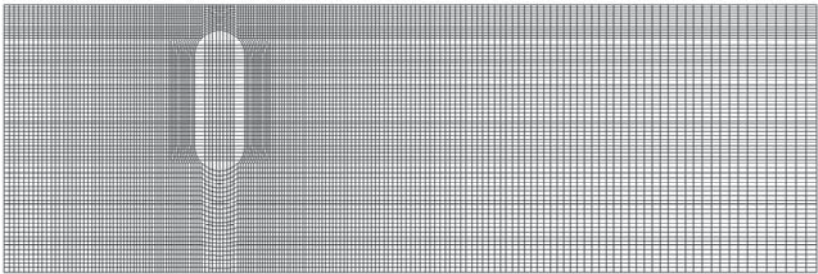


図 8 計算に使用したグリッド．縦 21.2 [cm], 横 64 [cm] の 2 次元水路で、左端から 15 [cm] の位置にブロック (縦 11.2 [cm], 横 4 [cm]) が置かれている．ブロックによって、流れが 2 つに分岐する．スリット幅は 2 [cm] と 8 [cm] とした．不等間隔直交格子を用いており、ブロックの周辺で格子幅を細かく取っている．最小格子幅は $\frac{1}{6}$ [cm] とした．

次のグラフは、各スリットにおける流出量の時間推移を示している．図 9 は通常の流体の場合、図 12 は $\sqrt{\theta_2} = 0.29$ [cm] とした場合の結果である．また右側のスナップショットは、数値シミュレーション解析でのある瞬間の渦度を表している．

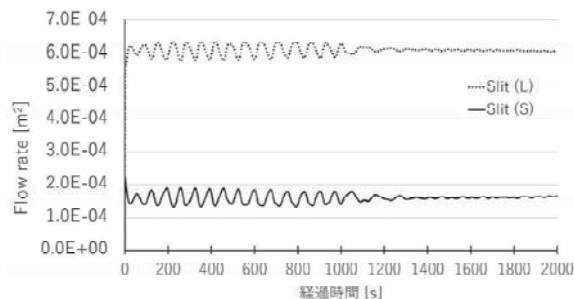


図 9 通常の流体の場合 ($\sqrt{\theta_2} = 0$ [cm]). 破線は 8 [cm] のスリットにおける流出量、実線は 2 [cm] のスリットにおける流出量の時間推移を表している。

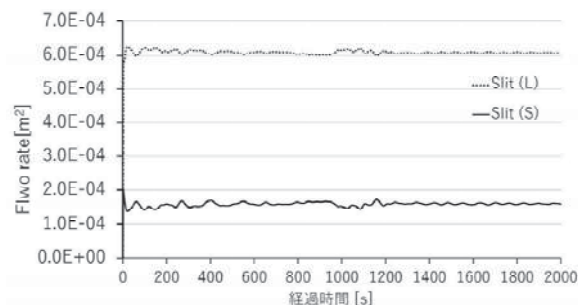


図 12 $\sqrt{\theta_2} = 2.9$ [cm] とした場合. 破線は 8 [cm] のスリットにおける流出量、実線は 2 [cm] のスリットにおける流出量の時間推移を表している。



図 10 530 秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0$)



図 11 2000 秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0$)



図 13 530 秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0.29$)



図 14 2000 秒後の渦度 ($\sqrt{\theta_2} = 0.29$)

通常の流体 ($\sqrt{\theta_2} = 0$ [cm]) の数値シミュレーションの結果は、計算開始後から 1000 秒付近まで、2 つのスリットから交互に渦放出が行われていた。よって、図 9 の各スリットにおける流出量は、渦放出の影響を受けて振動していると考えられる。1000 秒過ぎからは、ブロックの後ろ側に双子渦が出来た。そのため、スリットにおける流出量に周期的な振動は見られなくなっている。一方、 $\sqrt{\theta_2} = 0.29$ [cm] とした補正項を含む数値シミュレーション解析では、計算開始直後から 2000 秒まで、ブロックの後方に双子渦が留まり続けた。よって、各スリットからの流量は不規則で微小な変化となっている。

上記の結果を踏まえて、通常の流体 ($\sqrt{\theta_2} = 0$ [cm]) と、 $\sqrt{\theta_2} = 0.29$ [cm] とした補正項を含む場合とで、2 [cm] のスリットにおける流出量の比較を行った。流れ場が

安定するまでの時間を考慮して 500 秒以降のデータを使用することとし、各流れでの 2 [cm] のスリットにおける平均流出量を求めた。その結果、 $\sqrt{\theta_2} = 2.9$ [mm] とした補正項を含む流体は、通常の流体と比較して 2 [cm] のスリットでの流量が僅かに増していた。ブロックの境界を滑らかにした図 8 のグリッドにおける数値解析の結果は、[5] に詳しく記載している。

4 まとめと展望

非圧縮性流体の体積不変性に、モヤル積を通して、非可換空間上の流体力学を考えた。その結果ナビエ・ストークス方程式に、非可換パラメーター θ_2 を含む新たな補正項が加わることが分かった。得られた運動方程式の性質を調べるために、大小 2 つのスリットを設けた 2 次元の水路のもとで、非可換パラメーター θ_2 の値を変えながら流れの違いを比較した。

長方形のブロックを置いた水路では、 $\sqrt{\theta_2} = 2.6$ [mm] とした補正項を含む流れの方が、通常の流体のときと比較して、2 [cm] のスリットでの流出量が少なくなっていた。一方、角を滑らかにしたブロックの境界のもとでは、 $\sqrt{\theta_2} = 2.9$ [mm] とした補正項を含む流れの方が、通常の流体のときと比較して、2 [cm] のスリットでの流出量が僅かに増えるという結果が得られた。しかしどちらの結果とも、流量の増減の割合は非常に僅かであった。また、渦度の解析結果から、スリットの後方に現れる渦が流出量の振る舞いに影響を与えていると考えられる。さらに、今回は「最小サイズをもつ」流れの効果に着目して解析を行ったが、流体粒子の形状を決める因子は方程式に含まれていないため、 θ_2 の大きさが狭いスリットでの流れ難さに影響を与えられるかどうかについても考える必要がある。

補正項 $\vec{K}_2$ は、非線形かつ 3 階以上の高階微分を含むために数値解析の扱いが難しい。 θ_2 の値がより大きい場合の流れ解析を行うには、適した計算法を用いてさらに詳しい解析を行う必要がある。また、本研究では「最小サイズをもつ」流れのモデルとして粉粒体の流れに注目している。したがって、2 次元流れでの計算を 3 次元流れに拡張することも今後の展望の一つである。

参考文献

- [1] Y. Nambu, "Generalized Hamiltonian Dynamics" Phys. Rev.D7, 2405 (1973)
- [2] Y. Nambu, "A New Look at Fluid Dynamics" (International Workshop:

Extra Dimensions in the Era of the LHC, held at Osaka University on December, 2011.

- [3] J. E. Moyal, “Quantum Mechanics as a Statistical Theory”, in the Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol 45, 99 (1949).
- [4] M. Saitou, K. Bamba, and A. Sugamoto, Prog. Theor. Exp. Phys. 2014, 103B03
- [5] T. Kawamura, A. Kuwana, Y. Nagata, M. Saitou and A. Sugamoto, Prog. Theor. Exp. Phys. 2018, 063J01