

角のある領域における重調和方程式の解の正則性

～ Kondrat'ev の論文に即して～

東大・理 水谷 明

平面上の領域 Ω を占める一様な板の線型曲げは、境界が固定されているとき、適当な単位系において、

$$[P] \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

と記述される。ここで、 f は外部荷重、 $\frac{\partial u}{\partial n}$ は外向法線方向の微分を示す。

板の曲げ問題において、有限要素法などにより近似解析を行う場合、近似解の収束性、収束の速さを決定するためには、問題 $[P]$ の解 u の滑らかさが重要な役割を果たす。

領域 Ω として、境界が滑らかでない最も簡単な多角形領域の場合につき、解 u がどの程度滑らかになるかを調べるのがこの話の目的である。

この問題については、Kondrat'ev [1] の研究があり、

” Ω が凸多角形領域のとき、 $f \in L^2(\Omega)$ ならば、

[P] の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$ 、即ち、

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (\forall v \in H_0^2(\Omega))$$

を満足する解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^3(\Omega)$ に属す。,,

ことを示した。

ここで、我々は、 Ω の形状に更に制限を加えて、解 u が $H^4(\Omega)$ に属することを保証する結果を述べる。証明は Kondrat'ev [1] に従って行う。

定理 Ω を各内角が $\pi/2$ 以下の多角形領域とする。

このとき、 $f \in L^2(\Omega)$ ならば、問題 [P] の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^4(\Omega)$ に属す。 

注意 上述の条件を満足する Ω は、鋭角三角形と長方形に
^{知ら} なく知られているように、
 限るが、内角の大

きさ如何にかかわらず、角の近傍を除けば、 u の 4 回微分
 は二乗可積分である。従って、一般の多角形領域 Ω の場合、
 $f \in L^2(\Omega)$ に対し、 Ω から、内角が $\pi/2$ を越える角の近傍を

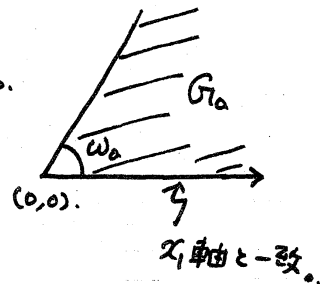
除いた部分において、解 u の 4 回微分が二重可積分であることがわかる。

定理の証明の方針。

以下 証明の方針を述べる。

G_0 を右図で示される平面上的領域とする。

重調和方程式の境界値問題



$$(1) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } G_0 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_0 = \partial G_0 \end{cases}$$

を考える。 (r, ω) を通常の極座標とし、更に $\tau = \log \frac{1}{r}$ と変数変換すると、 (x_1, x_2) -平面上的領域 G_0 は、 (τ, ω) -平面において、 $D \equiv \mathbb{R}^1 \times (0, \omega_0)$ に変換され、問題(1)は

$$(2) \begin{cases} L u = e^{-4\tau} f & \text{in } D \\ u = \frac{\partial u}{\partial \omega} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

と変換される。ここで、 $L = L(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \omega})$ であり、具体的には、

$$L u = u_{\tau\tau\tau\tau} + 4 u_{\tau\tau\tau} + 2 u_{\tau\tau\omega\omega} + 4 u_{\tau\omega\omega} + 4 u_{\tau\tau} + 4 u_{\omega\omega} + u_{\omega\omega\omega\omega}, \quad \text{である。}$$

重み付きの函数空間 $\dot{W}_\alpha^k(G_0)$ (k は非負整数) を,

$$\|u\|_{\dot{W}_\alpha^k(G_0)}^2 = \sum_{m=0}^k \int_{G_1} r^{d-2(k-m)} \times \sum_{|i|=m} |D^i u|^2 dx.$$

(i は multi-index).

で定義する。

[1°] $e^{-4\tau} f = F$ とおくと,

$\|f\|_{\dot{W}_\alpha^k(G_0)}$ は,

$$\left\{ \sum_{i_1+i_2 \leq k} \int_D \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} F}{\partial \tau^{i_1} \partial \omega^{i_2}} \right|^2 e^{-(\alpha-2k-6)\tau} d\omega d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$$

と同等なノルムとなる。

問題(2) を τ に直し、Fourier 変換を行くと、 λ をパラメータとする、 ω に関する常微分方程式の境界値問題(3)に変換される。

$$(3) \quad \begin{cases} L(i\lambda, \frac{d}{d\omega}) \hat{u} = \hat{F} & 0 < \omega < \omega_0 \\ \hat{u} = \frac{d\hat{u}}{d\omega} = 0 & (\omega = 0, \omega_0) \end{cases}$$

但し、 $\hat{F}(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} F(\tau, \omega) d\tau,$

$\hat{u}(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} u(\tau, \omega) d\tau$, であり。

(3) の上式は、具体的には、

$$(4) \quad \tilde{u}^{(IV)} + (-2\lambda^2 + 4i\lambda + 4)\tilde{u}'' + (\lambda^4 - 4i\lambda^3 - 4\lambda^2)\tilde{u} = \tilde{F}$$

となる。

[2°] (Agranovich - Vishik).

問題 (3) に対し、 $\tilde{F}$ を $\tilde{u}$ に対応させる作用素 $R(\lambda)$,

$$R(\lambda) : L^2(\tilde{D}) \rightarrow H^4(\tilde{D}) \cap H_0^2(\tilde{D}) \quad (\tilde{D} = (0, \omega_0)).$$

が存在し、次を満たす。即ち、 $R(\lambda)$ は、

1) λ に関し有理型で、

2) 任意の $p > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、

$$R(\lambda) \text{ は、 } \Lambda_{p\delta} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} \lambda| < p \text{ か } |\operatorname{Re} \lambda| > \delta\}$$

において極が存在しない。

3) 更に、次の評価が成立する。

$$\exists C = C(p, \delta) ;$$

$$(|\lambda|^4 \|R(\lambda)\tilde{F}\|_{L^2(\tilde{D})})^2 + \|R(\lambda)\tilde{F}\|_{H^4(\tilde{D})}^2 \leq C \|\tilde{F}\|_{L^2(\tilde{D})}^2$$

$$(\forall \tilde{F} \in L^2(\tilde{D}), \forall \lambda \in \Lambda_{p\delta} \text{ に対し})$$

[1°], [2°] により、問題 (1) に対する Kondrat'ev の定理 [3°],
及び正則性の定理 [4°] が成り立つ。

[3°] (Kondratiev)

$R(\lambda)$ が直線 $\operatorname{Im} \lambda = (-\alpha + 6)/2$ 上に極がなりとすると,
 $\forall f \in \dot{W}_\alpha^0(G_0)$ に対し, (1) の解 $u \in \dot{W}_\alpha^4(G_0)$ が存在して,
 評価

$$\|u\|_{\dot{W}_\alpha^4(G_0)} \leq C \|f\|_{\dot{W}_\alpha^0(G_0)}.$$

が成立する。

[4°] (Kondratiev)

問題 (1) において, u は $\dot{W}_\alpha^4(G_0)$, f は $\dot{W}_0^0(G_0) = L^2(G_0)$
 に属すると仮定し, 更に, $R(\lambda)$ が $1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 3$ に極がなりとす
 ると, u は $\dot{W}_0^4(G_0)$ に属す。

元の問題 [P] に戻る。

任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し, $u \in H_0^2(\Omega)$ が一意的に存在して,

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (\forall v \in H_0^2(\Omega))$$

を満たすか, 容易な計算により,

[5°] $u \in \dot{W}_\alpha^4(\Omega)$ が成立する。

但し, $\dot{W}_\alpha^k(\Omega)$ は, $P_j \in \Omega$ の頂点, $\gamma(x) = \min_j (\operatorname{dist}(x, P_j))$ とし

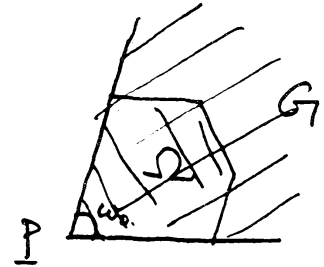
$$\|u\|_{\dot{W}_\alpha^k(\Omega)}^2 = \sum_{m=0}^k \int_{\Omega} \gamma^{\alpha-2(k-m)} \sum_{|\ell|=m} |D^\ell u|^2 dx.$$

によってノルムを定義した重み付きの函数空間である。

P を Ω の一つの頂点とし、

右図のような cme を G とする。

P に於ける内角を ω_0 とする。



[6°] 問題 (2)' $\Delta^2 v = f$ in G ; $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ on ∂G

に対応する ([2°]における) $R(\lambda)$ が $1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 3$ に極がない、と仮定すると、(P)の解 u は、 Θ を P の^(小)近傍として、 $u \in H^4(\Theta \cap \Omega)$ が成り立つ。

① 通常 of 局所的議論、及び、[4°], [5°]より、[6°]が成立することがわかる。

角の近傍を除いた部分においては、 u は、滑らかであるので、

[7°] ω_0 が $\pi/2$ 以下のとき、問題 (2) に対応する $R(\lambda)$ が、
 $1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 3$ に極がない、

ことを示せば、定理の証明は完了する。

[7°]の証。

問題 (3) で右辺 $\tilde{F} = 0$ とおいた問題を考えよ。

$$(5) \begin{cases} \tilde{u}^{(iv)} + (-2\lambda^2 + 4i\lambda + 4)\tilde{u}'' + (\lambda^4 - 4i\lambda^3 - 4\lambda^2)\tilde{u} = 0 & (0 < \omega < \omega_0) \\ \tilde{u} = \frac{d\tilde{u}}{d\omega} = 0 & (\omega = 0, \omega_0) \end{cases}$$

但し ' は $\frac{d}{d\omega}$ を示す。

$$\beta^4 + (-2\lambda^2 + 4i\lambda + 4)\beta^2 + (\lambda^4 - 4i\lambda^3 - 4\lambda^2) = 0 \quad \text{の根は,}$$

$\beta = \pm \lambda, \pm i(i\lambda + 2)$ より, (5) の一般解は, $\lambda \neq 0, 2i$, このとき

$$\tilde{u} = C_1 \cos i\lambda\omega + C_2 \sin i\lambda\omega + C_3 e^{(i\lambda+2)\omega} + C_4 e^{(i\lambda+2)\omega}.$$

λ が $R(\lambda)$ の根であることと, (5) に自明でない解があること

とは, 同値であり, その条件は,

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & \cos i\lambda\omega_0 & 0 & i\lambda \sin i\lambda\omega_0 \\ 0 & \sin i\lambda\omega_0 & i\lambda & i\lambda \cos i\lambda\omega_0 \\ 0 & e^{(i\lambda+2)\omega_0} & i\lambda+2 & (i\lambda+2)e^{(i\lambda+2)\omega_0} \\ 1 & \cos(i\lambda+2)\omega_0 & 0 & -(i\lambda+2)e^{(i\lambda+2)\omega_0} \end{vmatrix} = 0.$$

$-z = i\lambda + 1$ と変数変換して計算すると, (6) の左辺の行列式

は, $4(z^2 e^{2z\omega_0} - e^{2z\omega_0})$ となる。

計算によると, $z^2 e^{2z\omega_0} - e^{2z\omega_0} = 0$ は, $\omega_0 \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$ の範囲で, $z=0, 1$ 以外の根はないことがわか

る。従って (6) の根は, $1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 3$ の範囲で, $\lambda = i, 2i$ の

みをもつか, $\lambda = 0, 2i$, i は他の計算により, $R(\lambda)$ の根で

ないことがわかってゐるので, [7°] が示される。Q.E.D.

文献 V. A. Kondrat'ev [1] Trans of the Moscow Math Soc. 16
227-313 (1967)