

25. あるモデルのパターン選択性について

群馬大学、教養部、物理教室、 樽見 和明

1. はじめに

最近、非線形非平衡系におけるパターン形成が多くの研究者の注意を集めています。流体力学的な安定性不安定性の問題¹⁾、結晶成長の問題²⁾、DLA³⁾、化学反応系⁴⁾、などはその代表的な例です。多くの未解決の問題が山積していますが、そのなかでもパターン選択性の問題は非常に興味のある問題のひとつといえます。ここでは系が境界条件、初期条件、にほとんど依存せずにあるwavenumberで特徴づけられる周期的な空間構造を、系が自ら選択するという wavenumber selection (以下WSと記す) について報告します。

このWSのメカニズムを理論的にどのように理解すればよいのでしょうか。系のhomogenousな状態を特徴づけるsteady stateが不安定化を起こし更に複雑なパターンに到るわけですが、そのsteady stateの近傍の線形解析は、一般的にある幅を持ったwavenumberを、系が最終的に選ぶパターンを特徴づける候補として与えるに過ぎず、系が何故その幅を持ったwavenumberの中からある特異的なものを選択するかについては、何も答えてはくれません。

今までにいくつか理論的な試みがされており、代表的なもののみ挙げますと、リアプノフ汎関数を探る解析⁵⁾、marginal stability の原理⁶⁾、slowly varying external parameter を利用する方法⁷⁾、などがありますが未だ決定打はない状況です。

ここでは次の偏微分方程式で記述される系におけるWSを論じることになります。

$$\partial_t F = -(F^2 + \partial_x^2)(v(F) + \gamma \partial_x^2 F) \quad (1)$$

intervalは $0 < x < L$ で、周期的境界条件を考えます。

Eq.(1)は、ある原始的な生命体のモデル、“Protocell model”に由来したものです。このモデルは、化学反応系に生命体の持つ重要な性質である自律境界の効果を検討にいたったもので⁸⁾、系を支配する方程式はそれ故に複雑な非線形性を示します。我々は、系の示す複雑なdynamicsをある手法で界面のdynamicsに還元しパターン形成をつかさどる本質的なメカニズムを解析的に論じることになりました⁹⁾。

Eq.(1)において $F(x)$ は、界面に沿う位置 x における界面の場所を表しており、 $v(F)$ は界面のnormal方向への成長速度を表しています。 σ はスケーリング変換の結果残ったパラメータで surface tension の効果を反映するものです。Eq.(1)は時間的にも空間的にもnonlocalな系を、界面のdynamicsに還元するという単純化を行い、ある位置 x ある時刻 t における界面の変位 F をlocalな情報で表現した事になっています。しかしながらEq.(1)は、パターンの選択性という点に関しては、元の系の本質的なメカニズムを反映していると、我々は考えています。

2、定常状態近傍の系の振舞い

$v(F)$ は、一般には F の複雑な関数ですが、ここでは簡単の為に $v(F)=F$ の場合を考えます。Eq.(1)は、 $F=0$ という homogeneous な解を持ちます。この解の近傍の perturbation、

$$F = \phi + \delta \exp(ikx + \lambda t) \quad (2)$$

を考えます。ここで周期的境界条件の為に $k = \frac{2\pi}{L} m$ ($m=0, 1, 2 \dots$) eigenvalues λ は、

$$\lambda = k^2(1 - \sigma k^2) \quad (3)$$

Fig.(1) にこの結果が図示されています。F=0 という homogeneous な解は $0 < k < \sqrt{1/\delta}$ の wavenumber に対する perturbation に対して不安定です。なお "maximum growth rate" は $\sqrt{1/2\delta}$ であたえられます。安定な領域と不安定なそれとを分ける $k = \sqrt{1/\delta}$ は、Fig.(2)に実線で示されています。

3、定常状態から遥かに離れた非線形領域での振舞い

(3-1)、数値実験

系は $0 < k < \sqrt{1/\delta}$ の wavenumber で特徴づけられる perturbation に対して不安定で、線形領域では各々の perturbation は Eq.(3)で与えられるその wavenumber に対応する rate で成長しパターンを形成し始めますが、その過程で Eq.(1)における $-F^3$ 、 $-\delta F^2 \partial_x^2 F$ の非線形効果が働き各モード間の相互作用により系の dynamicsは複雑になります。そこで我々はその非線形 dynamicsを明らかにする為に次に示す一連の数値実験を試みました。

F=0 の不安定な定常状態に局所的な perturbationを与えました。局所的な、という条件という以外は様々な perturbationの variationを考えました。その場所や、振幅、符号、形、などです。また interval L は最終的に選ばれるパターンの wavenumber を k_s とする時 $L \gg 2\pi/k_s$ のように設定しました。この様に L を選んでおけば k_s に対する境界条件の影響は小さく WSに対する系の intrinsic な性質を探る事ができます。この結果が Fig.(2) にプロットで示されています。ある固定されたパラメータ $1/\delta$ に対して、初期の perturbation の variation にほとんど依存せず、プロットの幅で k_s が選ばれる事を示しています。2の線形解析では、 $0 < k < \sqrt{1/\delta}$ の幅で示される k は、すべて不安定でこの中にある wavenumber はすべて選ばれる可能性があります。しかし数値実験の結果はそこから初期条件の variation に依らず、ある特異な k_s がいつも選ばれる事を示しており、線形解析では説明のできない非線形

dynamics の興味ある結果と言えます。

なお wavenumber のみならず最終的に選ばれる周期的なパターンの振幅も Fig. (3) に示しました様な特異的な選択性を持つことが分かりました。

(3-2)、あるスケーリング解析

ここでは、(3-1)の結果がある簡単なスケーリング解析でよく説明できることを示します。Newell, Whitehead¹⁰⁾, Segel¹¹⁾らが Rayleigh-Bénard 問題で導入した方法を我々の場合に拡張し応用することにします。

空間的に、そして時間的に、ゆっくりと変化する変数 X, T を、

$$\left. \begin{aligned} X &= \epsilon x \\ T &= \epsilon^2 t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と導入します。ここで ϵ は、scaling parameter で我々の場合 $\epsilon \rightarrow 1/L$ と解釈できます。

さて今求めたい解は、最終的に系が選ぶ周期的な構造を記述すべきものですが、それを $\bar{F}$ とし、次のように展開できると仮定します。

$$\bar{F} = F_0 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots \quad (5)$$

ここで $\epsilon \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty)$ の極限で実現される asymptotic な解 F_0 を、

$$F_0 = A_0(X, T) \cos k_0 x \quad (6)$$

と仮定します。 k_0 は、最終的に選ばれる wavenumber です。 A_0 は、振幅ですがゆっくりと変化する変数 X, T のみの関数とします。 k_0, A_0 と

もにこの段階では未知です。

Eq.(4)より元のスケールでの ∂_x, ∂_t は、

$$\begin{aligned}\partial_x &\rightarrow \partial_x + \epsilon \partial_X \\ \partial_t &\rightarrow \epsilon^2 \partial_T\end{aligned}\tag{7}$$

と変換されます。

Eqs.(5)-(7)を、Eq.(1)に代入して両辺の各 ϵ のオーダーを比較します。まず ϵ^0 のオーダーを比較すると、

$$-(1-\delta k_0^2)\left(\frac{3}{4}A_0^2 - k_0^2\right)A_0 \cos k_0 x \quad + \text{higher order harmonics} \tag{8}$$

ϵ^1 のオーダーの比較からは、

$$-\left(-2 - \frac{\delta A_0^2}{2} + 4\delta k_0^2\right)k_0 \partial_X A_0 \sin k_0 x \quad + \text{higher order harmonics} \tag{9}$$

を得ます。この二つのオーダーの比較から次の関係を得ます。

$$\left. \begin{aligned}\frac{3}{4}A_0^2 - k_0^2 &= 0 \\ -2 - \frac{\delta A_0^2}{2} + 4\delta k_0^2 &= 0\end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Eq.(10)より未知変数である k_0, A_0 が、パラメータ δ の関数として

$$\left. \begin{aligned}k_0 &= \sqrt{\frac{4}{5\delta}} \\ A_0 &= \sqrt{\frac{3}{5\delta}}\end{aligned} \right\} \tag{11}$$

と得られます。

Eq.(11)の結果を Figs.(2),(3)に加えたのが点線で示したもので、(3-1)で得ら

れた結果と良く一致しています。なおこの結果は線形解析での **maximum growth rate** とは異なるもので、非線形dynamicsの効果に依るものです。

ϵ^2 のオーダーからは、Eq.(11)で記述される周期的な解に系がどの様に近づくかという漸近的な振舞いに対する情報が得られます。詳細な計算は省略して結果のみ記しますと、

$$\partial_T A_0 = 2 \partial_X^2 A_0 \quad (12)$$

Eq.(12)は、最終的に選ばれた周期的な解 F_0 にゆらぎがあっても、それは元のスケール x, t に比べれば、ゆっくりと変化するスケール X, T での拡散則に従い、いかなるゆらぎも均されてしまい漸近的には、Eq.(11)で記述される解が実現することを、示しています。

ここで展開されたスケーリングの手法は、スケーリングのパラメータとしてよく導入される **threshold 近傍**という方法をとっていませんので、すべての領域で有効な結果が得られるというもので、より一般的な手法と思われます。この手法が、他のWSを示す系（特に **large systems**）に対して有効かどうかについては、これからの検討課題と考えます。

References

1. F.H.Busse, in: Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence (Springer Verlag, Berlin, 1981)
2. J.S.Langer, Rev. Mod. Phys. 52(1980)1.
3. T.A.Witten & L.M.Sander, Phys. Rev. B 27(1983)5686.
4. P.C.Fife, in: Mathematical aspects of reacting and diffusing systems (Springer Verlag, Berlin, 1979)
5. Y.Pomeau and P.Manneville, J. Phys. Lett. (Paris) 40(1979)609
6. G.Dege and J.S.Langer, Phys. Rev. Lett. 50(1983)383.
7. L.Kramer, E.Ben-Jacob, H.Brand, & M.C.Cross, Phys. Rev. Lett. 49(1982)1891.
8. H.Schwegler, K.Tarumi, & B.Gerstmann, J. Math. Biol. 22(1985)335.
9. K.Tarumi & H.Schwegler, Bull. Math. Biol. 49(1987)307.
10. A.C.Newell & J.C.Whitehead, J. Fluid Mech. 38(1969)279.
11. L.A.Segel, J. Fluid Mech. 38(1969)203.

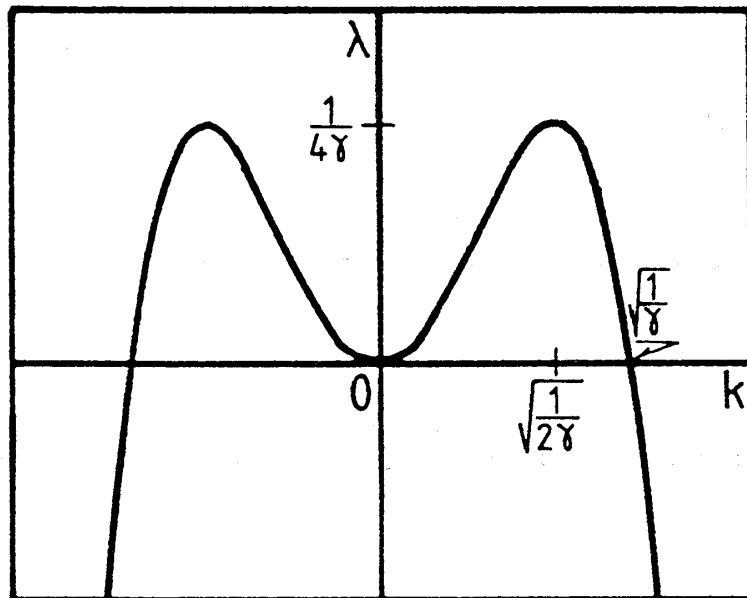


Fig. 1. Eigenvalue λ vs wavenumber k : linear analysis

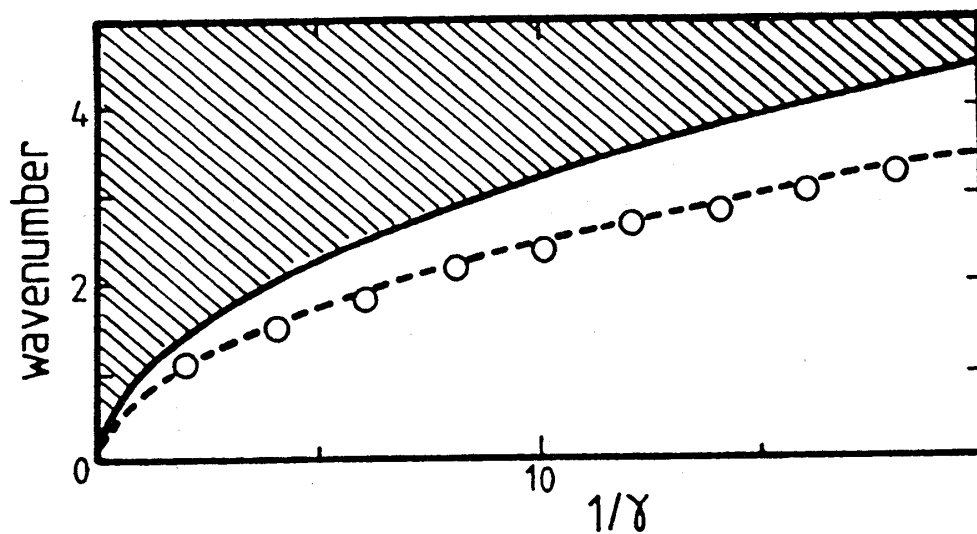


Fig. 2. Wavenumber vs inverse of the surface tension parameter; the circles show numerical results. The dotted curve is theoretical.

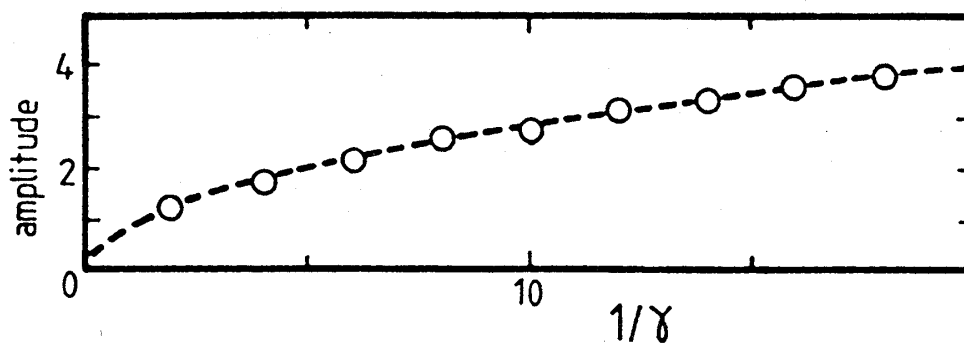


Fig. 3. Amplitude vs inverse of the surface tension parameter.